DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE, HAMBURG — M. BORN, GÖTTINGEN — C. RUNGE †, GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

GÖTTINGEN

BAND IX

EINLEITUNG IN DIE MENGENLEHRE

VON

ADOLF FRAENKEL

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

EINLEITUNG IN DIE MENGENLEHRE

VON

DR. PHIL. ADOLF FRAENKEL
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT KIEL

DRITTE UMGEARBEITETE
UND STARK ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 13 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

DEM ANDENKEN AN

ERNST STEINITZ

DEN MENSCHEN UND
DEN FORSCHER

GESTORBEN IN KIEL AM 29. SEPTEMBER 1928

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Büchlein ist im Feld entstanden und aus dem Feld in Druck gegeben worden; die Anregung zu ihm verdanke ich Unterhaltungen, in denen ich Kriegskameraden (Nichtmathematikern) gelegentlich öde Stunden durch Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre verkürzen konnte.

Wenn auch diese Entstehung in der Anlage der Schrift noch erkennbar sein mag, so wird dadurch doch der beabsichtigte Zweck nicht beeinträchtigt: eine kurze Einführung in eine der gewaltigsten Errungenschaften des menschlichen Geistes, in die Grundzüge der abstrakten Mengenlehre, zu bieten, verständlich für jedermann, der *Interesse* nimmt an der mathematischen Begründung des Unendlichgroßen und daher auch so viel *Geduld* mitbringt, um sich allmählich in etwas abstrakte Gedankengänge hineinzufinden. Vorkenntnisse mathematischer oder philosophischer Art sind hierzu in keiner Weise erforderlich . . .

. . . Dabei habe ich eine gewisse Breite der Darstellung, dem Zweck der Schrift entsprechend, grundsätzlich nicht gescheut; ich verweise gegenüber der Forderung nach „Eleganz" auf ein Wort BOLTZMANNS: man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen.

Marburg, im Januar 1919.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, die das seit Jahresfrist vergriffene Buch beim Publikum und bei der Kritik gefunden hat, veranlaßt mich die Anlage der Schrift im ganzen unverändert beizubehalten. Namentlich habe ich wiederum eine gelegentliche Breite, ja selbst vereinzelte Wiederholungen nicht gescheut; ich halte es im vorliegenden Fall für wichtiger, auch dem mathematisch weniger Geübten einen Einblick selbst in grundsätzlich oder sachlich *schwierige* Partien zu ermöglichen, als den Kenner durch äußerste Kürze und Eleganz zu erfreuen. Nur nach zwei Richtungen hin ist das Buch erheblicher erweitert worden.

Zunächst wurde in den §§ 1—11 die Darstellung in zahlreichen Punkten ausgestaltet, namentlich bei der Einführung grundsätzlich

wichtiger Begriffe sowie an Stellen, wo in der ersten Auflage einzelne schwierigere Beweise unterdrückt oder nur skizziert worden waren, die nunmehr eine vollständige Ausführung erhielten. . . .

Die zweite wesentlichere Ausgestaltung betrifft die Behandlung der *prinzipiellen Fragen*, die mit der Grundlegung der Mengenlehre zusammenhängen und zum Teil das *Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie* berühren. . . .

Marburg, im Frühjahr 1923.

Vorwort zur dritten Auflage.

Daß auch die zweite Auflage des vorliegenden Buches bei der Kritik günstige Aufnahme gefunden hat und innerhalb dreier Jahre vergriffen war, muß ich wohl als eine Mahnung auffassen, Charakter und Anlage der Schrift nicht allzusehr zu verändern — so nahe dies wenigstens für die erste Hälfte gelegen hätte, die die abstrakte Mengenlehre im Sinne CANTORS behandelt. Hier habe ich mich damit begnügt, den Stoff in mäßigen Grenzen zu vermehren, die Darstellung straffer zu gliedern, Literaturangaben reichlicher einzustreuen und an die Mitarbeit und Selbstprüfung des Lesers sichtbar zu appellieren durch einfache Aufgaben am Schluß der einzelnen Paragraphen. Mit alledem erhalten die §§ 2—12 ein Gewand, das sich nicht mehr allzu weit unterscheidet von dem, wie es sonst bei mathematischen Lehrbüchern üblich ist. Allerdings habe ich die Breite im Anfang unverändert beibehalten; sie soll (und wird nach gemachten Erfahrungen) auch dem mathematisch völlig ungeübten Leser, wenn er nur zu intensiver Mitarbeit fähig und willens ist, es ermöglichen, ungeachtet der voll gewahrten Strenge der Darstellung selbst an die schwierigeren Fragen heranzukommen. — Dem Wunsch einer hochgeschätzten und temperamentvollen Rezensentin, den Abschnitt über Punktmengen erheblich auszugestalten (oder fortzulassen), konnte ich mich nicht entschließen nachzukommen; die Beispiele aus diesem Gebiet, dem es an vorzüglichen Darstellungen in deutscher Sprache nicht mangelt, sollen lediglich als Illustrationen zu vorangegangenen Abschnitten dienen und u. a. auch gewisse Betrachtungen CANTORS über *geordnete* Punktmengen, die inzwischen in den Hintergrund getreten sind, dem Leser vorführen.

Eine vollständige Umarbeitung hingegen, verbunden mit einer Verdoppelung des Umfangs, hat sich die zweite Hälfte (Kapitel IV und V) gefallen lassen müssen, die der Grundlegung der Mengenlehre und damit den Prinzipienfragen der Mathematik überhaupt gewidmet ist; also Fragen, die heute einen Mittelpunkt des Interesses und der Diskussion in weiterem als nur dem mathematischen Kreise bilden. In der Tat ist zu diesem in rascher Entwicklung befindlichen Gegenstand seit

dem Erscheinen der zweiten Auflage eine wahre Flut von Veröffentlichungen von freilich sehr verschiedenem Werte erschienen.

Die Auseinandersetzung mit etwas älteren philosophischen Standpunkten zum Aktual-Unendlichen konnte als bereits überholt teils fortfallen, teils auf kurze Hinweise bei den einzelnen Begriffsbildungen beschränkt werden. Dagegen wurde die Schilderung des Intuitionismus in den Prägungen seiner verschiedenen Vertreter (die untereinander wohl nicht ganz so tief und grundsätzlich abweichen, als sie es selbst glauben) derart ausgestaltet, wie es den neuesten Originalarbeiten und der zunehmenden Klärung der Problemlage entspricht. Fernerhin glaubte ich dem gigantischen, wenn auch keineswegs endgültigen Werk der *Principia Mathematica*, das in Deutschland bisher nur in engem Kreise gewürdigt und noch weniger gekannt wird, eine Darstellung schuldig zu sein. Diese kann zwar weder in die Details eingehen noch die Grundfragen in dem vollen erforderlichen Ausmaß behandeln; sie hat das mir vorschwebende Ziel erreicht, wenn sie das Interesse des Lesers erweckt und ihm den — ebenso wie beim Intuitionismus nicht gerade bequemen — Zugang zu den Quellen merklich ebnet. Bei Niederschrift dieser Zeilen sind gerade die „Grundzüge der theoretischen Logik" von HILBERT und ACKERMANN erschienen, die wohl zum erstenmal einem breiteren deutschen Leserkreis viele tieferliegende Hauptgedanken der Logik RUSSELLS darlegen; auch *nach* dieser Schilderung, die andere Zwecke verfolgt, wird meine Skizze noch einem Bedürfnis entgegenkommen.

Das V. Kapitel gibt eine dem heutigen (keineswegs schon endgültigen) Stand entsprechende Darstellung der axiomatischen Mengenlehre in dem durch ZERMELO angebahnten Sinn, wobei die psychologisch-didaktische Begründung der Axiome, die wirkliche Herleitung der Theorie aus den Axiomen und die großen allgemeinen Probleme der axiomatischen Methode überhaupt gleichmäßig zu ihrem Rechte kommen. Auf Einzelheiten einzugehen ist möglichst vermieden worden, um so mehr als dafür mehrfach auf meine 1927 in der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" erschienene Schrift verwiesen werden kann. Dagegen glaubte ich dem Leser nicht nur Fertiges bieten, sondern ihn auch zu den am Rande der heutigen Forschung noch gähnenden Klüften und Abgründen heranführen zu sollen — selbst da, wo die offenen Fragen viel mehr philosophische oder weltanschauliche als eigentlich mathematische Züge tragen (wie z. B. auf S. 325—332). Daß die mathematische Forschung sich regelmäßig einer gedrängten, dogmatischen und unspychologischen Darstellung befleißigt, die dem Studenten und selbst dem nach anderer Richtung spezialisierten Forscher das Eindringen in einem fast prohibitiven Ausmaß erschwert, hat neben gewissen inneren vor allem historische (z. B. das allzu suggestiv wirkende Vorbild von GAUSS) und äußere Gründe (Umfang der Zeitschriften).

Der Erfolg muß lehren, ob die völlige Abkehr von dieser Darstellungsart auch in den Schlußteilen des vorliegenden Buches es zuwege bringt, dem weniger Geübten das Verständnis selbst schwieriger Dinge zu erschließen und weiteren philosophischen Kreisen klarzumachen, welche Bedeutung (qualem et quantam) für sie die mathematische Grundlagenforschung besitzt — wie das zu meiner Freude mit der 2. Auflage vielfach gelungen ist.

Während es bei der Schilderung der gegensätzlichen Prinzipien und Schulen in der zweiten Hälfte des Buches mein Bestreben war, die äußerste Unparteilichkeit zu wahren und jede Richtung mit den ihr selbst gemäßen Argumenten zu begründen, glaubte ich dem Leser am Schluß ein kurzes persönliches Glaubensbekenntnis schuldig zu sein (Ende des § 18); daß dieses auch für mich schon morgen überholt oder modifiziert sein kann und für die Überzeugung des Lesers keineswegs maßgebend sein darf, sei auch an dieser Stelle betont für Leser, die sich etwa das *iurare in verba magistri* noch nicht in dem für den Mathematiker und Philosophen wünschenswerten Maße abgewöhnt haben.

Auf eine möglichst erschöpfende Zusammenstellung der neueren (namentlich auch der vielfach mit Schwierigkeiten beschafften ausländischen) Literatur zu den behandelten Gegenständen der Grundlagenforschung habe ich besondere Sorgfalt verwandt; diese Mühe wird belohnt sein, wenn dadurch für jüngere Forscher die Inangriffnahme des einen oder anderen Problems angeregt und erleichtert wird. Die Lektüre des Buches selbst erfordert weder weitere Literatur noch überhaupt besondere Vorkenntnisse.

Für freundliche Hilfe bei der Korrektur und wertvolle Ratschläge zu einzelnen Gegenständen danke ich Frau DEUTSCHBEIN-Marburg und den Herren BECKER-Freiburg i. B., BERNAYS-Göttingen, CARNAP-Wien, KURATOWSKI-Lemberg, PRÜFER-Münster, RAMSEY-Cambridge, TARSKI-Warschau; ganz besonders aber den Herren BAER-Freiburg i. B. und PLESSNER-Marburg, die vollständige Korrekturen des Buches durchgesehen und es durch eine Fülle wichtiger Bemerkungen bereichert haben. Weiterhin gilt mein Dank der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* für ihr stets bewährtes Entgegenkommen, ferner den Freunden im In- und Ausland, die sich mit Fragen und Anregungen zur bisherigen Gestalt des Buches an mich gewandt haben, sowie Herrn cand. math. STROCKA-Kiel, der die Herstellung des Namenverzeichnisses übernahm. Schließlich gehe das Buch diesmal nicht in die Welt ohne ein Wort des Gedenkens für GERHARD HESSENBERG, den ausgezeichneten Menschen und Denker, dessen Arbeiten ich in wissenschaftlicher und didaktischer Hinsicht gleich viel verdanke.

Kiel, im Sommer 1928.

ADOLF FRAENKEL.

Inhaltsverzeichnis.

Drittes Kapitel.

Ordnungstypen und Ordnungszahlen.

Viertes Kapitel.

Erschütterungen der Grundlagen und ihre Folgen.

Fünftes Kapitel.

Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre. Die axiomatische Methode.

Druckfehlerberichtigungen.

Seite		Zeile		
Seite	48	Zeile	3	von oben: lies C_0 statt C_0
„	53	„	7	von unten: lies eindeutige) statt eindeutige
„	72	„	10	von unten: lies Aufg. 4/5 statt Aufg. 415
„	72	„	9	von unten: lies Nr. 5) statt Nr. 5,
„	74	„	10	von unten: lies S. 72), statt S. 72,
„	124	„	3	von unten: lies Aufg. 1 statt Aufg.
„	132	„	7	von unten: lies 57 ff. statt 57 ff,,
„	137	„	9	von oben: lies *verändert* statt *miteinander vertauscht*
„	140	„	11	von oben: lies *verändert* statt *vertauscht*
„	156	„	14	von oben: lies $\bar{c}$ und ein letztes $\bar{\bar{c}}$ statt c und ein letztes c
„	253	„	9	von unten: lies F. BERNSTEIN statt BERNSTEIN
„	261	„	6	von unten: lies keine statt eine
„	261	„	2	von unten: lies für statt (ür
„	356	„	17	von unten: lies [2]) und FINSLER [3] statt [2] und FINSLER [3])
„	364	„	14	von unten: lies S. 343 statt S. 349
„	374	„	9	von unten: lies die Fußnote statt Fußnote
„	397	„	13	von oben: lies BRIDGMAN statt BRIDGMANN
„	402	„	2	von oben: lies 1928, S. 90f. statt 1928.

Ferner sind die auf S. 9 und S. 306 angeführten Seitenzahlen der Schrift BECKER [2] um 440 zu vergrößern, wenn man die (sonst für diese Schrift angegebene) Seitenzahl im Bande des Jahrbuchs erhalten will.

§ 1. Einleitung.

„. . . so protestiere ich . . . gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer *vollendeten*, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.“ (Briefwechsel GAUSS-SCHUMACHER, II [1860], S. 269; GAUSS' Werke, VIII [1900], S. 216.) Diese aus dem Jahre 1831 stammende, gegen einen bestimmten Gedanken SCHUMACHERS gerichtete Äußerung des „princeps mathematicorum“ C. F. GAUSS, drückt einen horror infiniti aus, der in ganz allgemeinem Sinn bis vor wenigen Jahrzehnten Gemeingut der Mathematiker war und gerade durch die Autorität von GAUSS eine schier unangreifbare Stütze erhalten hatte. Die Mathematik sollte es hiernach nur mit endlichen Größen und Zahlen, die Null eingeschlossen, zu tun haben; das Unendlichgroße mochte ebenso wie das Unendlichkleine, mehr oder weniger unscharf definiert, allenfalls in der Philosophie eine kümmerliche Existenz fristen — aus der Mathematik blieb es verwiesen.

Dem erst während des Weltkrieges verstorbenen Halleschen Mathematiker GEORG CANTOR[1] (3. März 1845 bis 6. Januar 1918) blieb es vorbehalten, die GAUSSsche Behauptung in dem Sinn, in dem sie verstanden worden war, nicht nur zu bekämpfen, sondern auch zu widerlegen und dem Begriff des Unendlichgroßen das Bürgerrecht im mathematischen Königreich zu verschaffen; ein Bürgerrecht, das wohl andersartig, aber nicht weniger rechtmäßig ist als dasjenige der sonst in der Mathematik anerkannten Zahlen. Es hat außer der schöpferischen Intuition und künstlerischen Zeugungskraft, von der CANTOR bei seinen Entdeckungen geleitet wurde[2], auch noch ungewöhnlicher Energie und

[1] Vgl. die kurze Biographie von WANGERIN [1] und die von SCHOENFLIES [11] und [12] mitgeteilten Erinnerungen und Briefe, sowie einen 1929 im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinenden ausführlichen Nachruf. (*Alle Literaturverweise — gekennzeichnet durch eine dem Namen beigefügte Nummer in eckigen Klammern — beziehen sich auf das am Schluß des Buches stehende Literaturverzeichnis*; diese Verweise, die namentlich in der zweiten Hälfte des Buches sich zahlreich finden, sollen natürlich nur dem Wunsch nach Sonderinformation in dieser oder jener Frage entgegenkommen, niemals aber eine *notwendige* Ergänzung zur Lektüre des vorliegenden Buches ausdrücken; dieses will vielmehr durchaus auch ohne weitere Literaturheranziehung verständlich sein.)

[2] Vgl. die charakteristische These seiner Habilitationsschrift [1]: „Eodem modo literis atque arte animos delectari posse.“

Beharrlichkeit seitens des Entdeckers bedurft, um seine Anschauungen durchzuhalten und durchzufechten; wurden diese doch zu seinem lebhaftem Schmerz lange Zeit hindurch von der überwiegenden Mehrzahl seiner mathematischen[1] Zeitgenossen als unklar oder falsch oder wenigstens — von den Wohlwollendsten — als „hundert Jahre zu früh gekommen"[2] bekämpft, bis in das letzte Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts hinein, in dem CANTOR seinerseits (1897) seine schriftstellerische Tätigkeit abschloß und von dem an gleichzeitig seine Lehre sich überwiegend durchsetzte[3]. Nicht allein GAUSS und andere hervorragende *Mathematiker* wurden als Kronzeugen gegen den Begriff des Unendlichgroßen ins Feld geführt; auch gegen die von seinen *philosophischen* Gegnern angerufenen Autoritäten, gegen ARISTOTELES, LOCKE, DESCARTES, SPINOZA, LEIBNIZ und weitere Logiker aus alter und neuer Zeit mußte sich CANTOR verteidigen; ja seine Lehre sollte nicht nur gegen die Wahrheiten der Logik und der Mathematik, sondern vollends gar gegen die religiösen Grundsätze verstoßen, wogegen er als eine echt religiöse Natur sich ganz besonders wehrte[4].

---

[1] Vor allem von KRONECKER. Dagegen haben zwei Führer der damaligen Mathematikergeneration, WEIERSTRASS und HERMITE — letzterer entgegen einer (namentlich durch POINCARÉ) weit verbreiteten Meinung — ihr anfängliches Mißtrauen gegen CANTORS Schöpfungen bald überwunden und in Hochschätzung, ja Bewunderung verwandelt. In MITTAG-LEFFLER ist ihm frühzeitig sogar ein einflußreicher tätiger Helfer erstanden; die auf dessen Veranlassung im Band 2 der Acta Mathematica erschienenen französischen Übertragungen CANTORscher Arbeiten — übersetzt z. T. von POINCARÉ (nach MITTAG-LEFFLER [2]) — haben viel zur Verbreitung seiner Ideen beigetragen. Die ersten, die (1883/84) CANTORS Ideen auf funktionentheoretische (und geometrische) Probleme *anwandten*, waren MITTAG-LEFFLER [1], POINCARÉ [1] und SCHEEFFER [1] und [2], während die gleichzeitigen Arbeiten BENDIXSONS ([1]—[4]) gewissermaßen parallel mit CANTOR gingen.

[2] Mit dieser Begründung soll CANTORS (später im 46. Band der Math. Annalen 1895 erschienene) zusammenhängende Darstellung in den 80er Jahren von einer der angesehensten mathematischen Zeitschriften, die sich ihm sonst bereitwillig öffnete, abgelehnt worden sein (nach CANTOR-STÄCKEL [1]). Auch seine in den 70er Jahren im Journal f. d. reine u. angew. Mathematik erschienenen Arbeiten, die mehrere der entscheidendsten Entdeckungen enthalten, waren nur nach längerem Widerstand und verspätet aufgenommen worden (vgl. SCHOENFLIES [11], S. 99). Übrigens beklagt sich CANTOR auch noch 1908 in einem Brief an W. H. YOUNG über die mangelnde Anerkennung, die er in seiner Heimat gefunden habe (vgl. W. H. YOUNG [2], S. 422f.); in der Tat ist aber sein Werk seit der Jahrhundertwende gerade auch in Deutschland in den Vordergrund des mathematischen Interesses und Forschens gerückt.

[3] Im Ausland namentlich durch den Anhang von COUTURATS Doktordissertation [1] und das eine starke Wirkung ausübende Lehrbuch BOREL [1] sowie BAIRE [1]; vgl. auch die 1899 in der Revue Philosophique erschienenen Aufsätze BORELS, die in Note IV von BOREL [2] wieder abgedruckt sind.

[4] Vgl. namentlich CANTOR [7 V], [9] und [10], sowie GUTBERLET [1] und [2] und TERNUS [1], besonders S. 218—222. Zweifellos hat sich ja der Begriff des Unendlichen überhaupt zunächst mehr gefühlsmäßig, vorwiegend als religiöses Problem, der Menschheit aufgedrängt und ist — mindestens in unserem Kultur-

In welcher Weise dennoch, all diesen wirklichen oder auch nur vermeintlichen Zeugen zum Trotz, ganz bestimmte und untereinander scharf unterscheidbare unendliche Zahlen in die Mathematik eingeführt und wohldefinierte Rechenoperationen mit ihnen gelehrt werden können, dies im Zusammenhang darzustellen soll den Hauptzweck der ersten Hälfte des vorliegenden Buches (bis § 12) bilden. Dabei wird die für die Mathematik überhaupt charakteristische, in keiner anderen Wissenschaft ähnlich ausgeprägte Möglichkeit des freien Neuschaffens sichtbar hervortreten; der Geburtsstunde der Mengenlehre entstammt der Satz: „Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit“[1]. Wie klar sich CANTOR schon in einer verhältnismäßig frühen Periode seiner Arbeit über das Ziel und den umstürzenden Charakter des Unternehmens war und wie deutlich er dessen sieghaftes Durchdringen gegenüber allen Einwänden voraussah, das erhellt aus folgenden Sätzen, mit denen seine 1883 erschienene, in der Buchausgabe mit einem rührend bescheidenen Vorwort eingeleitete Abhandlung [7 V] beginnt:

„Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist.“

„Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so große, daß es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nötig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, daß ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Überzeugung aussprechen, daß

---

kreis — erst in der Hand der Griechen zum Problem, und zwar alsbald zum *wissenschaftlichen* Problem geworden. Andererseits sind die heute vielfach unterschätzten, speziell auch das Problem des Unendlichen betreffenden Gedankengänge der scholastischen Philosophie und Theologie (man vergleiche hierfür etwa DEMPF [1]) in mancher Hinsicht von der gleichzeitigen Feinheit und Kühnheit der Ideen der klassischen Mengenlehre; es ist wohl kein bloßer Zufall, daß CANTOR — wie noch mehr BOLZANO — bei den Scholastikern in die Schule gegangen ist (vgl. F. KLEIN [2], S. 52 und 56). Im übrigen werde in historischer Beziehung im allgemeinen etwa auf die VI. Vorlesung („Die Geschichte des Unendlichkeitsproblems“) von RUSSELL [7] sowie auf KEYSER [2] verwiesen, im besonderen für die Vorgeschichte und ältere Geschichte der Mengenlehre (sowie der damit zusammenhängenden Teile der Funktionentheorie) auf JOURDAIN [2].

[1] CANTOR [7 V], S. 564; man vergleiche auch die dort vorangehenden Absätze.

diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, daß ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle."

Wie steht es nun mit Art und Berechtigung dieser merkwürdigen Erweiterung der Zahlenreihe? Und ist die — in der Wissenschaft sonst ihresgleichen nicht findende — Ungebundenheit des frei und kühn schaffenden Mathematikers auch in diesem Fall durch die Forderung logischer Widerspruchslosigkeit und Folgerichtigkeit in den notwendigen Grenzen gehalten worden? Hierüber möge sich der Leser auf Grund des vorliegenden Buches, das keinerlei besondere Vorkenntnisse voraussetzt, selbst sein Urteil bilden; er wird die letzte Frage hoffentlich im großen ganzen bejahen können.

Erstes Kapitel.

Grundlagen. Begriff der Kardinalzahl.

§ 2. Begriff der Menge. Beispiele von Mengen.

CANTOR[1] hat den Begriff der Menge folgendermaßen definiert:

Eine Menge[2] ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen.

1. Beispiele. Bevor wir diese Definition im einzelnen zergliedern, wollen wir einige Beispiele von Mengen betrachten, die uns anschauliches Material zum Verständnis der Definition liefern sollen[3].

1. Wir denken uns eine bestimmte Anzahl konkreter Gegenstände, z. B. aus einem vor uns stehenden Obstteller etwa 5 Äpfel, 2 Birnen und 1 Aprikose; der Inbegriff dieser 8 Dinge stellt eine Menge dar.

---

[1] CANTOR [12 I], S. 481; vgl. auch schon [7 III], S. 114f., und [7 V], S. 587. CANTOR verwendet übrigens in der älteren Zeit vorzugsweise die Bezeichnungen „Mannichfaltigkeit" und „Mannichfaltigkeitslehre". Der französische Ausdruck, der weniger als der auch quantitativ auffaßbare deutsche für Mißverständnisse Raum läßt, ist „ensemble", der englische „class" oder „aggregate" oder auch (besonders bei Punktmengen) „set".

[2] Die nachstehend gesperrt gedruckten Bezeichnungen werden im Lauf der späteren Betrachtungen noch öfters benutzt. Das am Schluß stehende Sachregister gibt zu jeder dieser Bezeichnungen die Stelle an, wo sie erklärt ist.

[3] Diese Beispiele stellen nicht einen Teil des logischen Gebäudes dar, das wir uns schrittweise aufrichten wollen, sondern dienen nur der Verdeutlichung des Mengenbegriffs; daher wird in diesen Beispielen mehr Wert auf Anschaulichkeit als auf logische Strenge gelegt. Der geübtere Leser wird sich mit den nachfolgenden Beispielen nur ganz flüchtig zu befassen brauchen.

Die Elemente der so gebildeten Menge sind die einzelnen Früchte; durch den bei aller Handgreiflickeit dieser Elemente doch *gedanklichen* Akt ihrer Zusammenfassung zu einem Ganzen haben wir die *Menge* der 8 Früchte gebildet[1]. Die Menge enthält 8 untereinander verschiedene Elemente, die wir uns in eine Reihe angeordnet denken (z. B.: ein erster Apfel, ein zweiter Apfel usw., die eine Birne, die andere Birne, endlich zuletzt die Aprikose). Sehen wir dann von der besonderen Natur der einzelnen Elemente ab, so stellt uns die Menge nur mehr ein *Ordnungsschema* dar mit dem Inhalt: erstens, zweitens, . . ., achtens. Endlich können wir außer von der Natur der Elemente auch noch von ihrer Anordnung absehen, die Elemente gewissermaßen in einen Sack geworfen und durcheinander geschüttelt denken; dann vermittelt uns die Menge als einzigen Inhalt nur mehr die *Anzahl* der in ihr zusammengefaßten Früchte, nämlich die Anzahl 8.

Zum nämlichen Ordnungsschema und zu der nämlichen Anzahl gelangen wir offenbar, wenn wir statt von unseren Früchten etwa von acht an einer Schnur aufgereihten Perlen ausgehen.

2. Statt konkrete Gegenstände zu einer Menge zusammenzufassen, können wir das nämliche mit abstrakten Begriffen unternehmen, also z. B. Mengen bilden, die aus gewissen Eigenschaften, gewissen Naturgesetzen, gewissen Dreiecken usw. gebildet sind. Wir können so etwa gewisse *Zahlen* zu einer Menge zusammenfassen, z. B. die Menge bilden, deren Elemente die Zahlen 1, 2, 3, . . ., 8 sind; vergleichen wir diese Menge mit der unter 1. gebildeten Menge von Früchten, so leuchtet ein, daß beide Mengen sich in nichts voneinander unterscheiden, sobald von der besonderen Natur ihrer Elemente abgesehen wird.

3. Eine unvergleichlich viel umfassendere Menge, die aber gleich den bisher betrachteten immerhin nur endlichviele Elemente enthält, bilden wir auf folgende Weise[2]: Ein System von 100 Zeichen, das alle möglichen Konsonanten- und Vokallaute, die Ziffern, die Interpunktionszeichen usw. sowie das Spatium (d. i. die Type für den im Buchdruck leerbleibenden Raum zwischen den Worten und den Zeilen) umfaßt, mag als Material für die Herstellung eines beliebigen Buches zugrunde gelegt werden. Für den Umfang eines Buches werde festgesetzt, daß es eine Million solcher Zeichen umfassen soll; damit sind auch alle kürzeren Bücher eingeschlossen, da die fehlenden Zeichen ja

---

[1] Nebenbei werde bemerkt, daß auch bei einer einzigen Frucht (oder überhaupt einem einzigen Element) von der Menge gesprochen werden kann, die diese Frucht enthält; diese Menge, ein abstrakter Begriff, kann logisch und daher auch mathematisch von der konkreten Frucht unterschieden werden (vgl. auch S. 21, Fußnote 3).

[2] Die (freilich auf viel ältere Ideen zurückgehende) Betrachtung stammt wohl wesentlich aus E. E. KUMMERS Vorlesungen und aus KURD LASSWITZ' „Traumkristallen"; vgl. dazu z. B. FÜRST-MOSZKOWSKI, Das Buch der 1000 Wunder (München), Nr. 150, und HAUSDORFF [3], S. 61f.

als Spatien angenommen werden können. In diesem Sinn wird nachstehend der Ausdruck „Buch" gebraucht.

Wir fassen nun die *Menge aller denkbaren Bücher* ins Auge. Da jedes Buch irgendeine Verteilung von 100 Zeichen auf 1000000 Plätze darstellt und offenbar nur endlichviele verschiedene solche Verteilungen oder Kombinationen möglich sind (wie eine einfache Überlegung lehrt, gibt es deren $100^{1000000}$), so enthält unsere Menge nur endlichviele verschiedene Bücher; darunter kommen indes z. B. alle religiösen und philosophischen Schriften der Vergangenheit und Zukunft, alle Dramen und Gedichte, alle entdeckten oder künftig zu entdeckenden wie auch die ewig unbekannt bleibenden Wissensschätze vor, ebenso alle denkbaren Kataloge, Logarithmentafeln, Matrikelbücher, Zeitungsartikel, Heiratsannoncen usw., natürlich auch jede unsinnige Zusammenstellung. Kurz: wir erhalten eine Universalbibliothek im vollsten Sinne des Wortes. Bei noch so kleinem Druck und noch so dünnem Papier würde der Weltenraum bis zu den fernsten uns sichtbaren Gestirnen nur einen verschwindend winzigen Teil unserer Büchermenge zu fassen vermögen.

Wie unüberbrückbar dennoch die Kluft zwischen einer so umfassenden Menge und einer Menge mit *unendlichvielen* Elementen ist, geht anschaulich aus folgender Bemerkung hervor: Nimmt man die Existenz unendlichvieler Weltkörper mit sprechenden, druckenden und Mathematik (einschließlich Mengenlehre) treibenden Bewohnern an, so muß auf unendlichvielen jener Weltkörper das nämliche Lehrbuch der Mengenlehre mit gleichnamigem Verfasser und Verleger, gleicher Jahreszahl, denselben Druckfehlern usw. erscheinen. Denn in unserer Universalbibliothek kommen ja nur endlichviele Bücher überhaupt, um so mehr nur endlichviele über Mengenlehre vor; wenn also auf jedem Weltkörper auch nur ein einziges Lehrbuch der Mengenlehre von dem angegebenen Höchstumfang erscheint, so müssen unter diesen unendlichvielen Lehrbüchern unendlichviele gleiche sein.

4. Wir haben bisher endliche Mengen betrachtet, d. h. solche, die *endlichviele* Elemente enthalten. Bei dem rein gedanklichen Charakter der Bildung einer Menge können wir diese Beschränkung fallen lassen und Mengen mit *unendlichvielen* Elementen, sogenannte „unendliche Mengen", bilden. Dabei soll auf die Bedeutung der mehrfach verwendeten Begriffe „endlich" und „unendlich", von denen der Leser eine hinreichend deutliche naive Vorstellung besitzt, vorläufig nicht näher eingegangen werden (vgl. S. 22ff.). Freilich lassen sich Beispiele unendlicher Mengen solange schwerlich finden, als man für die Elemente nur nach Gegenständen unserer (unmittelbaren oder mittelbaren) Sinneswahrnehmungen Ausschau hält, als man also Mengen von der unter 1. bis 3. geschilderten Art aufsucht. Gerade die neuesten Forschungen der Physik haben nämlich der Überzeugung Bahn gebrochen, daß die Naturerkenntnis uns weder im Großen noch im Kleinen notwendig zu Unendlichem führt:

sowohl die Annahme einer nur endlichen (wenn auch unbegrenzten) Ausdehnung des Weltalls wie auch die Überzeugung von der nur begrenzten Teilbarkeit der Materie und Energie, also von ihrer Zusammensetzung aus nur endlichvielen kleinsten Teilen (Atomen bzw. Elektronen und Energiequanten) steht in bestem Einklang mit unseren Erfahrungen. Die Außenwelt scheint uns also nur endliche Mengen darzubieten. Um zu Mengen mit unendlichvielen Elementen zu gelangen, müssen wir demnach Erzeugnisse nicht unserer sinnlichen Erfahrung, sondern unseres Denkens in Betracht ziehen. Einen naheliegenden Weg hierzu weist uns das Beispiel 2. Statt wie dort bei der Zahl 8 haltzumachen, können wir nämlich in der Zahlenreihe weitergehen und uns die Menge *aller* Zahlen 1, 2, 3, ... und so weiter fort ohne Ende, die Menge aller „natürlichen Zahlen“[1], gebildet denken. Auch diese Menge stellt uns ein bestimmtes, allerdings unbegrenztes Ordnungsschema dar, sobald wir die besondere Natur ihrer Elemente außer acht lassen, d. h. sobald wir davon absehen, daß die Elemente gewisse Zahlen sind. Dagegen können wir bei bei dieser Menge von der *Anzahl* ihrer Elemente im gewöhnlichen Sinne nicht sprechen.

Schon an dieser Stelle sei hervorgehoben, von welch ganz anderem Charakter der hier gebrauchte Begriff „Unendlich“ (unendlichviele Elemente, unendliche Menge, unendliches Ordnungsschema) ist als der sonst vielfach in der Mathematik verwendete. In der niederen und höheren Analysis ist vielfach die Rede von veränderlichen Größen, die unendlichgroß oder unendlichklein „werden“ (nicht „sind“), und von den bei solchen Prozessen auftretenden Eigenschaften anderer Größen, die als von jenen abhängig definiert sind. Hiermit ist folgendes gemeint: jene Größen können über jeden noch so großen endlichen Betrag hinauswachsen oder sich unbegrenzt der Null annähern, ohne daß dieser Zu- oder Abnahme bestimmte Grenzen gesetzt sind. In jedem Stadium des Prozesses, wie immer und wie weit er auch durchgeführt werde, haben die Größen jedoch bestimmte endliche bzw. von Null verschiedene Werte. Es handelt sich also bei diesem Gebrauch des Begriffs „Unendlich“ nur, wie sich GAUSS ausdrückte (vgl. oben S. 1), um eine façon de parler, die eine umständlichere Ausdrucksweise entbehrlich macht; z. B. würde der Satz: „wird die positive Zahl n unendlichgroß, so wird der Quotient $\frac{1}{n}$ unendlichklein“ ausführlicher und schärfer so zu fassen sein: „der Wert des Quotienten $\frac{1}{n}$ (n positiv) kann dadurch der Null beliebig nahegebracht werden, daß man die Zahl n auf hin-

[1] Die aus den Elementen der Arithmetik geläufigen einfachsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..., besonders auch das Rechnen mit ihnen, werden nicht nur zwecks Bildung von Beispielen als bekannt vorausgesetzt, sondern auch öfters systematisch als Beweishilfsmittel herangezogen. Die grundsätzliche Seite dieses Verfahrens wird auf S. 183 und im § 18 besprochen werden.

reichend große Werte beschränkt". Man spricht in diesem Sinne vom uneigentlichen oder potentiellen Unendlich. In scharfem und deutlichem Gegensatz hierzu ist die im vorigen Absatz betrachtete Menge (wie auch das durch sie bestimmte Ordnungsschema) ein fertiges, abgeschlossenes, in sich festes Unendliches, insofern als sie unendlichviele genau definierte Elemente (die natürlichen Zahlen) umfaßt, keines mehr und keines weniger[1]. Hier liegt also ein eigentliches oder aktuales Unendlich vor, das als reines, in einem einheitlichen Akt zum Bewußtsein gebrachtes Gedankending nichts Widerspruchsvolles in sich zu bergen scheint. Das nämliche gilt für die drei folgenden Beispiele.

5. Wir denken uns (vgl. Abb. 1) eine Strecke etwa von der Länge 10 cm von links nach rechts gezogen und durch Markierung ihres Halbierungspunktes (Mittelpunktes) in zwei Hälften geteilt; der Halbierungspunkt werde mit P_1 bezeichnet. Die linke Hälfte halbieren wir abermals und bezeichnen ihren Halbierungspunkt mit P_2; ebenso halbieren wir die links von P_2 liegende Strecke, die $2\frac{1}{2}$ cm lang sein wird (nämlich den vierten Teil so lang wie die ursprüngliche Strecke), und markieren ihren Halbierungspunkt P_3. Dieses Verfahren denken wir uns unbegrenzt derart fortgesetzt, daß nach jedem Schritt die linke der entstandenen Hälften abermals halbiert und der Halbierungspunkt markiert wird; beim n^{ten} Schritt, wobei n irgendeine natürliche Zahl bedeuten kann, erhalten wir so den Halbierungspunkt P_n. Wir können nun diese *sämtlichen* Halbierungspunkte P_1, P_2, P_3 usw. zu einer Menge zusammenfassen; es leuchtet ein, daß bei Ordnung der Halbierungspunkte in dieser Reihenfolge (also von rechts nach links, nicht etwa von links nach rechts) sich unsere Menge von Punkten durch nichts von der unter 4. betrachteten Menge aller natürlichen Zahlen unterscheidet, außer durch die Eigenart der Elemente. Aber auch bei völliger Außerachtlassung der Reihenfolge, wenn wir uns also lediglich den ungeordneten Inbegriff der (durcheinander gewürfelt gedachten) sämtlichen Punkte P_n vorstellen, hat dieser Inbegriff — d. i. eben die *Menge* der Punkte — einen klaren und sogar halbwegs anschaulichen Sinn. Unser Verstand, zur gleichzeitigen Auffassung gesetzmäßig geschaffener Mannigfaltigkeiten glücklich eingerichtet, mag sogar den Begriff dieser Gesamtmenge von unendlichvielen Punkten einfacher finden als den Begriff einer Teilmenge von etwa einer Milliarde dieser Punkte; einer Teilmenge, die trotz ihrer Endlichkeit infolge der großen Anzahl von

[1] Hier und da immer wieder auftretenden, anscheinend unausrottbaren Mißverständnissen gegenüber werde scharf hervorgehoben, daß dieses „Unendlich" der Menge aller ganzen Zahlen *nichts* zu tun hat mit einem vermeintlichen Unendlichwerden der Elemente, d. h. der ganzen Zahlen, die vielmehr alle endlich sind. Die Menge der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw. stellt ja im gleichen Sinn wie die oben betrachtete Menge ein Unendlich dar!

Elementen der naiv-anschaulichen Erfassung vielleicht größere Schwierigkeiten bereitet als die Gesamtmenge[1].

Die soeben vorgeführte Menge kann man in Zusammenhang setzen mit dem aus dem griechischen Altertum bekannten (von ZENO stammenden) Paradoxon des *Wettlaufs zwischen Achilles und der Schildkröte*. Man denke sich diesem Wettlauf die Abb. 1 (etwa unter entsprechender Vergrößerung) derart zugrunde gelegt, daß Achilles vom rechten Endpunkt aus, die Schildkröte vom Punkt P_1 aus (also mit gehörigem Vorsprung) den Lauf in der Richtung nach links beginnt und Achilles stets doppelt so rasch läuft wie die Schildkröte. Bis Achilles den Ausgangspunkt P_1 der Schildkröte erreicht hat, ist diese bei P_2 angelangt; sobald Achilles bei P_2 eintrifft, steht die Schildkröte bei P_3, usw.; bedeutet n eine beliebige natürliche Zahl, so wird, wenn Achilles den Punkt P_n erreicht, die Schildkröte schon bei P_{n+1} sein, also immer noch einen Vorsprung haben. Die Gesamtheit all der Strecken, die Achilles so durcheilt, um den jeweiligen Vorsprung der Schildkröte einzuholen, stellt eine Menge von unendlichvielen Strecken dar, die beständig abnehmen und sämtlich in der Strecke von Abb. 1 enthalten sind. Der Begriff dieser unendlichen Menge ist

$P_5\ P_4\ P_3\quad P_2\qquad P_1$

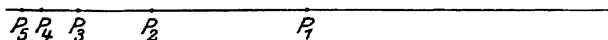



Abb. 1.

also bis zu einem gewissen Grad sogar anschaulich, jedenfalls durchaus faßbar und logisch einwandfrei.

Man kann übrigens, wenn man Wert darauf legt, auch auf eine im engeren Sinn anschauliche Art zu einer unendlichen Menge gelangen, die zu den bisher geschilderten unendlichen Mengen in einer nahen, sich von selbst erklärenden Beziehung steht: etwa durch zweckmäßige Aufstellung einiger Spiegel derart, daß in einem unter ihnen („Ausgangsspiegel“) neben anderen gespiegelten Gegenständen auch das eigene Bild des Ausgangsspiegels erscheint, in diesem Bild also wieder dessen Bild usw.; die Gesamtheit der im Ausgangsspiegel sichtbaren Spiegel bildet dann, streng genommen, eine unendliche Menge[2].

---

[1] Näher betrachtet, liegt das letzten Endes daran, daß zur Umfangsbestimmung einer „großen“ endlichen Menge *viele* Schritte — abhängig von der Zahl der Elemente — erforderlich sind, während bei einer unendlichen Menge der oben geschilderten Art dafür der einheitliche, wenn auch viel tiefer liegende Schritt der „vollständigen Induktion“ (vgl. Ende des § 11) eintritt.

[2] Vgl. die anschaulichen „Modelle“ des (dort potentiell verstandenen) Unendlich mittels „transfiniter Iteration“ bei BECKER [2], S. 99ff. (wo auch weitere Literaturhinweise zu finden sind), sowie die — sicherlich nicht durch mathematische Erwägungen veranlaßte — Verwendung des nämlichen Gedankens an entscheidender Stelle des holländischen Romans von C. und M. SCHARTEN-ANTINK: De jeugd van Francesco Campana (S. 111ff.). Die wissenschaftliche Bedeutung derartiger Modelle dürfte freilich von BECKER überschätzt werden.

6. Statt wie in Beispiel 4. nur die „natürlichen", also die positiven ganzen Zahlen zu einer Menge zusammenzufassen, können wir auch die unendliche Menge bilden, die aus allen (positiven und negativen) *reellen Zahlen* (einschließlich Null) besteht; wie in der elementaren Arithmetik gezeigt wird (vgl. auch S. 43f.), erhält man die Gesamtheit aller verschiedenen reellen Zahlen einfach z. B. dadurch, daß man sich alle möglichen *unendlichen* (d. h. nicht bei einer bestimmten Stelle abbrechenden) *Dezimalbrüche* gebildet denkt.

Eine mit dieser Menge nahe verwandte, ihr gegenüber sich durch Anschaulichkeit auszeichnende Menge entsteht auf folgende Weise (vgl. Abb. 2): Wir denken uns eine etwa von links nach rechts verlaufende,

P_0 P_1

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \; -\frac{2}{3} \quad 0 \quad 1 \; \sqrt{2} \; 2 \quad 3 \quad 4$

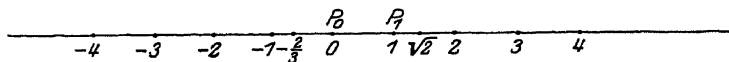



Abb. 2.

nach beiden Seiten hin unbegrenzte gerade Linie (Gerade) gezogen und auf ihr einen ganz beliebigen Punkt als „*Nullpunkt*" P_0 markiert. In einer beliebigen Entfernung *rechts* von P_0, z. B. in der Entfernung 1 cm, markieren wir auf der Geraden einen zweiten Punkt, den „Einspunkt" P_1. Wir haben so auf der Geraden drei Dinge *willkürlich* gewählt und zugrunde gelegt: einen Punkt (den Nullpunkt), eine Maßeinheit (etwa 1 cm), eine bestimmte der zwei möglichen Richtungen (etwa die von links nach rechts); war die Wahl dieser drei Ausgangspunkte unserem freien Ermessen überlassen, so ergibt sich nun alles weitere zwangsläufig. Es entspricht nämlich[1] der naiven Vorstellung (und der damit im Einklang stehenden üblichen geometrischen Forderung) in bezug auf die Art und Weise, wie eine gerade Linie mit Punkten erfüllt ist, wenn wir folgendes annehmen: Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es auf dem rechts von P_0 gelegenen Teil unserer Geraden einen einzigen Punkt, der gerade a-mal so weit (bei unserer Annahme also a cm) von P_0 entfernt liegt wie der Punkt P_1; es gibt so z. B. ($a = 3$, $= \frac{1}{4}$, $= \sqrt{2}$ gesetzt) je einen Punkt rechts von P_0 auf unserer Geraden, der 3 cm, $\frac{1}{4}$ cm, $\sqrt{2}$ cm $= 1{,}414\ldots$ cm von P_0 entfernt liegt. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir einen Punkt, der a-mal so weit rechts von P_0 liegt wie der Einspunkt P_1, kurz selber durch die Zahl a; daher wird der Einspunkt P_1 auch durch die Zahl 1 und, wie man leicht als folgerichtig einsieht, der Nullpunkt P_0 auch durch die Zahl 0 bezeichnet. Endlich bezeichnen wir den Punkt der Geraden, der von P_0 ebensoweit entfernt ist wie der Einspunkt P_1, aber *links* von P_0 liegt, mit -1. Ist wieder a eine beliebige positive reelle Zahl, so gibt es einen einzigen Punkt unserer Geraden, der links von P_0 liegt und

[1] Tiefergehende Bemerkungen über diese Beziehung zwischen Zahlen und Punkten, deren Grundlagen im obigen Text noch nicht in voller Strenge auseinandergesetzt sind, findet man zu Beginn des § 10 (S. 143).

dabei a-mal soweit von P_0 entfernt ist wie der Einspunkt P_1; dieser Punkt werde mit $-a$ bezeichnet, so daß bei unserer Annahme z. B. der Punkt -7 unserer Geraden links von P_0 in der Entfernung 7 cm gelegen ist. Mit allen auf diese Weise erhaltenen Punkten ist die Gesamtheit der Punkte auf der Geraden erschöpft. Durch diese Festsetzungen haben wir eine halbwegs anschauliche Zuordnung aller reellen Zahlen zu sämtlichen Punkten einer Geraden erhalten, eine Zuordnung, bei der jeder reellen Zahl ein einziger Punkt entspricht und umgekehrt; sie ist stets in völlig bestimmter Weise möglich, unabhängig davon, wie auch immer die Maßeinheit, d. h. die Entfernung zwischen den Punkten P_0 und P_1, gewählt sein mag. Die Gerade mit den in der angegebenen Weise bezeichneten Punkten nennt man die Zahlengerade. Wir werden sie im Laufe unserer Betrachtungen ihrer Anschaulichkeit wegen öfters heranziehen und dabei die Größe der Maßeinheit immer beliebig lassen, so daß man es eigentlich mit unendlichvielen, für unsere Zwecke gleichwertigen Zahlengeraden zu tun hat.

Wir können nun auch die *Menge aller Punkte unserer Geraden* betrachten. Ordnen wir diese Punkte von links nach rechts, die reellen Zahlen aber der zunehmenden Größe nach (und zwar mit Rücksicht auf das Vorzeichen, so daß z. B. -7 kleiner ist als -3, -3 kleiner als $+3$), so zeigt die geordnete Menge aller Punkte unserer Geraden keinerlei Unterschied gegenüber der geordneten Menge aller reellen Zahlen, sobald nur in beiden Fällen von der besonderen Natur der Elemente abgesehen wird.

7. Einem letzten Beispiel einer Menge sei folgende Bemerkung vorausgeschickt, an die wir auch später wieder anknüpfen werden: Unter einer *algebraischen Gleichung* wird eine Beziehung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

verstanden, wo $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ bestimmte gegebene Zahlen sind, während die Zahl x unbekannt ist und derart gesucht wird, daß die Gleichung gerade befriedigt, ihre linke Seite also gleich Null wird. Dabei bedeutet n irgendeine positive ganze Zahl, die — falls a_n von Null verschieden ist, wie wir annehmen wollen — der *Grad* der Gleichung genannt wird; auch unter $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ wollen wir stets nur (positive oder negative) *ganze* Zahlen (die Null eingeschlossen) verstehen. Es gibt dann, wie in den Elementen der Algebra gezeigt wird, entweder keine oder eine oder mehrere, aber niemals mehr als n verschiedene reelle Zahlen x, die die Gleichung befriedigen und „*Wurzeln*" derselben heißen; eine Wurzel wird im allgemeinen natürlich nicht ganzzahlig sein. Z. B. hat die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ die beiden Wurzeln $x = +\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ und $x = -\sqrt{2}$, während die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ überhaupt keine reelle Wurzel besitzt. Eine reelle Zahl, die Wurzel einer derartigen algebraischen Gleichung ist, nennt

man eine (reelle) algebraische Zahl. Es ist zwar jeder gemeine Bruch $\frac{p}{q}$ eine algebraische Zahl, da $x = \frac{p}{q}$ der Gleichung $qx - p = 0$ genügt; umgekehrt aber läßt sich nicht jede algebraische Zahl als gemeiner Bruch darstellen, für $\sqrt{2}$ z. B. ist eine solche Darstellung unmöglich[1]. Die Gesamtheit aller gemeinen Brüche bildet somit einen Teil der Gesamtheit aller algebraischen Zahlen.

Es läge nun die Vermutung nahe, daß ebenso wie z. B. die Zahl $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ sich *alle* reellen Zahlen oder, was dasselbe besagt, *alle* unendlichen Dezimalbrüche als Wurzeln gewisser algebraischer Gleichungen auffassen lassen; dies ist, wie wir später (S. 54) sehen werden, keineswegs der Fall. Eine reelle Zahl a, die *nicht* als Wurzel einer algebraischen Gleichung darstellbar ist, d. h. zu der sich überhaupt keine algebraische Gleichung finden läßt, die durch $x = a$ befriedigt würde, bezeichnet man als eine (reelle) transzendente Zahl. Wir können uns nun die *Menge aller (reellen) transzendenten Zahlen* gebildet denken, deren Elemente jedenfalls nur einen Teil der reellen Zahlen ausmachen. Die tatsächliche Bildung dieser Menge vermöge wirklicher, etwa gesetzmäßig ausgedrückter Angabe ihrer einzelnen Elemente würde zwar beim heutigen Stande der Forschung (und vielleicht für immer) unmöglich sein. Es ist begreiflich, daß sogar schon für eine einzelne Zahl die Entscheidung über ihre Transzendenz im allgemeinen nicht leicht herbeizuführen ist. Denn um eine gegebene Zahl a als transszendent nachzuweisen, muß man ja zeigen, daß keine aller unendlichvielen denkbaren algebraischen Gleichungen die Zahl a zur Wurzel hat, eine allem Anschein nach (und auch in Wirklichkeit) recht schwierige Aufgabe; gelingt dieser Nachweis nicht, ohne daß man doch umgekehrt eine algebraische Gleichung auffinden kann, die durch a befriedigt wird, so ist damit nur gesagt, daß vorläufig die Entscheidung darüber aussteht, ob a algebraisch oder transzendent ist. In der Tat ist bis heute nur von gewissen begrenzten Klassen reeller Zahlen[2] bekannt, daß sie transzendent sind, obwohl man weiß, daß es außer den als transzendent *nachgewiesenen* noch unendlichviele weitere transzendente Zahlen gibt; wir werden in § 5 sehen, in welcher Weise solch ein Existenzbeweis allgemein geführt werden kann, ohne die Kenntnis all der als existierend nachzuweisenden transzendenten Zahlen im einzelnen.

Die ausdrückliche Bildung der Menge aller transzendenten Zahlen

---

[1] Für den Beweis dieser Behauptung vgl. S. 148.

[2] Die bekanntesten dieser transzendenten Zahlen sind die bei der Berechnung des Kreisumfangs und -inhalts vorkommende Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ und die Basis e der natürlichen Logarithmen. Als CANTOR [5] 1874 die Menge aller transzendenten Zahlen betrachtete und Eigenschaften von größter Wichtigkeit für sie bewies (vgl. nachstehend S. 54), war noch unbekannt, ob π eine transzendente Zahl ist und somit jener Menge als Element angehört; die entsprechende Feststellung für e datiert aus eben jenem Jahre.

ist also ganz unmöglich. Dennoch ist diese Menge ein wohl denkbarer, logisch einwandfreier Begriff; *jede* vorgelegte reelle Zahl kann ja nach Definition nur *entweder* algebraisch *oder* transzendent sein, wenn wir auch nicht immer imstande sind, die Entscheidung darüber zu treffen; und eben alle transzendenten Zahlen und nur sie stellen die Elemente unserer Menge dar.

2. Über Cantors Definition des Mengenbegriffs. Nachdem wir so einige Beispiele von Mengen wirklich kennengelernt haben, ist es leicht, die zu Beginn dieses Paragraphen angegebene Definition der Menge in ihrer Bedeutung und Tragweite zu würdigen. Man wird in jener Begriffsumgrenzung freilich weniger eine Definition im strengen Sinne des Wortes zu erblicken geneigt sein als vielmehr einen anschaulichen Hinweis auf einen logischen Elementarakt, der schon dem primitiven Denken geläufig ist. Den Begriff „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens" näher zu zergliedern, kann philosophischer Betrachtung überlassen bleiben (vgl. auch §§ 13ff.); für unsere vorläufigen Zwecke ist seine Bedeutung hinreichend klar. Übrigens werden wir als Elemente von Mengen in der Regel nur mathematische Objekte verwenden, wie Zahlen, Punkte usw., oder auch wiederum Mengen von solchen Objekten.

Ebenso leuchtet nach den vorgeführten Beispielen genügend ein, was unter der „Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen" zu verstehen ist[1]; die Objekte werden als Elemente bezeichnet, das Ganze als die durch die Elemente bestimmte (oder „sie enthaltende", gelegentlich auch: „aus ihnen bestehende") Menge. Immerhin ist es aus logischen wie auch aus mathematischen Erwägungen heraus zweckmäßig, sich die „Zusammenfassung" nicht etwa allzu handgreiflich vorzustellen; die Meinung, eine Menge „bestehe" aus ihren Elementen wie etwa ein Ganzes aus seinen Teilen, ist jedenfalls abzuweisen, wie ja auch der Umfang eines Begriffs nicht aus den unter ihn fallenden Gegenständen besteht. Vielmehr ist eine Menge unter allen Umständen als abstrakter Begriff zu fassen, selbst wenn ihre Elemente konkrete Gegenstände sein sollten. Man denke sich also in einer mehr formalen (und abstrakten) Art der Gesamtheit der Elemente ein einheitliches Gedankending zugeordnet, das die Elemente „enthält"; in diesem Sinn ist es auch von vornherein angängig, einem einzelnen Element a eine Menge zuzuordnen, die a allein enthält, ohne doch notwendig mit a zusammenzufallen — eine Auffassung, die sich uns auch aus Gründen der Allgemeinheit noch als unumgänglich erweisen wird. Was eigentlich diese als „Mengen" bezeichneten Dinge im logischen

[1] Für Freunde philologischer Kritik sei im Hinblick auf den doppelsinnigen Gebrauch der Endung auf „ung" bemerkt, daß natürlich nicht der *Akt* des Zusammenfassens, sondern das *Ergebnis* dieses Aktes gemeint ist.

Sinne darstellen[1], ist vom mathematischen Standpunkt aus ebenso bedeutungslos, wie die Ergebnisse der Arithmetik davon unabhängig sind, welcher logischen (oder psychologischen) Auffassung über den Zahlbegriff der forschende Arithmetiker huldigt.

Wenn die Natur der Elemente, die in einer Menge vorkommen, für die an die Menge geknüpften Betrachtungen keine Rolle spielt, so spricht man von einer *abstrakten Menge*; in den meisten Partien dieses Buches (mit Ausnahme des § 10) haben wir es mit solchen abstrakten Mengen zu tun. Unter den andersartigen Mengen, für die die spezielle Natur der Elemente auch besondere Eigenschaften bedingt, sind die Mengen von *Zahlen* oder *Punkten* in der Analysis wie in der Geometrie von größter Bedeutung.

Es bleibt jetzt nur mehr übrig, die Begriffe „bestimmt" und „wohlunterschieden" zu erklären. Der letztere ist zweckmäßigerweise in dem Sinne zu verstehen, daß *für je zwei in Frage kommende Objekte feststehen muß, ob sie für den vorliegenden Fall als gleich oder als verschieden zu betrachten sind, und daß die Elemente einer Menge sämtlich untereinander verschieden sein sollen*; ein Objekt kann also in einer Menge nur entweder als Element vorkommen oder nicht vorkommen, nicht aber etwa „wiederholt" als Element auftreten. Das Attribut „bestimmt" dagegen fordert: *Von jedem beliebigen Objekt muß feststehen, ob es Element der in Frage stehenden Menge ist oder nicht*; *diese Bedingung ist notwendig, aber auch hinreichend für die „Existenz" der betreffenden Menge.* Jenes Feststehen bedeutet aber nicht ein wirkliches *Feststellen* in jedem einzelnen Fall, sondern es muß nur „intern bestimmt sein", d. h. *begrifflich* feststehen, ob ein gegebenes Objekt zu unserer Menge gehört oder nicht. Dies läßt sich etwa in dem oben vorgeführten Beispiel 7. für eine gegebene reelle Zahl im allgemeinen mit den heutigen Mitteln der Wissenschaft nicht rechnerisch feststellen, und es war CANTOR bei seiner Untersuchung der Menge der transzendenten Zahlen für die Zahlen π und e unbekannt, wie wir auch heute die entsprechende Frage z. B. für die Zahl 2^π oder π^π nicht lösen können; aber jedenfalls ist für eine bestimmte Zahl stets „intern", auf Grund des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, entschieden, ob sie transzendent ist oder nicht, und daher stellt die Gesamtheit aller transzendenten Zahlen wirklich eine Menge dar[2].

---

[1] RUSSELL ([5], Kap. 17) verficht die Auffassung, daß die Mengen nicht eigentliche „Objekte", sondern „logische Fiktionen" oder „unvollständige Symbole" sind; dabei ist indes „Fiktion" keineswegs im Sinn von „mit einem Widerspruch behaftet" zu verstehen (vgl. § 15).

[2] Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten spielt hier also eine wesentliche Rolle, insofern als bei gegebener Menge M für jedes Objekt a eine der beiden Möglichkeiten „a ist Element von M" und „a ist nicht Element von M" zutreffen soll, ein Drittes aber ausgeschlossen bleibt. Von den in diesem Absatz angeschnittenen Prinzipienfragen wird in den §§ 13ff. noch die Rede sein.

Eine Definition im strengen Sinn ist freilich mit alledem nicht erzielt; denn der wesentlichste Punkt der „Definition", nämlich die „Zusammenfassung" einer Vielheit zu einer Einheit, stellt ja im Grund gerade den Mengenbegriff dar, so daß die Definition — an der allerdings der in ihr steckende Verzicht auf jede Einschränkung charakteristisch ist — stark tautologischen Charakter besitzt und besser nur als Hinweis oder Erläuterung aufzufassen ist. Es handelt sich eben um eines der Grundelemente unseres Denkens, die einer näheren Zergliederung nicht fähig sind.

Eine Menge ist nach unserer „Definition" vollkommen bestimmt durch die Gesamtheit ihrer Elemente. Zwei Mengen M und N gelten demgemäß dann, aber auch *nur* dann, als gleich (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die nämlichen Elemente enthalten. Dabei können die beiden Mengen übrigens sehr wohl auf verschiedene Arten definiert sein. Z. B. ist die Menge der Zahlen mit der Eigenschaft „eine der fünf kleinsten Primzahlen zu sein" gleich der Menge der Zahlen mit der Eigenschaft „mit einer der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 zusammenzufallen"; die beiden Eigenschaften sind zwar untereinander logisch verschieden, aber „vom gleichen Umfang" (*umfangsgleich*). Man bedient sich zur Bezeichnung der Tatsache, daß eine Menge M die Elemente a, b, c usw. enthält, der Schreibweise

$$M = \{a, b, c, \ldots\};$$

hier können entweder die in M enthaltenen Elemente sämtlich innerhalb der geschweiften Klammern hingeschrieben, oder es kann durch Punkte angedeutet werden, daß die weiteren Elemente der Menge als bekannt anzusehen sind.

Auf die Mängel der angegebenen CANTORschen Definition der Menge und auf die Frage, in welcher Richtung eine andere Erklärung des Mengenbegriffs gesucht werden könnte, werden wir später (im vierten und fünften Kapitel) zurückkommen; bis dahin bleiben wir bei der CANTORschen Definition, die uns völlig hinreichende Dienste leisten wird.

§ 3. Die Begriffe der Äquivalenz, der Teilmenge, der unendlichen Menge.

1. Abbildung und Äquivalenz. Derjenige Begriff, auf dem sich die Einführung „unendlicher Zahlen" und das Rechnen mit ihnen in erster Linie aufbaut, ist der Begriff der Äquivalenz.

In den Beispielen 1. und 2. des vorigen Paragraphen wurde einmal eine Menge von acht Früchten, dann eine Menge von acht Zahlen betrachtet und darauf hingewiesen, daß beide Mengen sich lediglich durch die Natur ihrer Elemente unterscheiden; ihre Elemente können also (übrigens auf mannigfache Art) derart aufeinander bezogen werden, daß jeder bestimmten Frucht je eine einzige Zahl und umgekehrt

jeder der acht Zahlen je eine Frucht entspricht. Das gleiche gilt z. B. von den beiden im Beispiel 6. betrachteten Mengen, der Menge aller reellen Zahlen und derjenigen aller Punkte einer geraden Linie; wie sich aus der dortigen Betrachtung ergibt, können die Elemente beider Mengen einander in solcher Weise zugeordnet werden, daß zu jeder reellen Zahl ein einziger Punkt gehört und umgekehrt.

Derartige Zuordnungen gehören zu den primitivsten und unentbehrlichsten Funktionen des menschlichen Denkens. Auf einer hinreichend frühen Kulturstufe freilich wird man noch nicht verschiedenartige Gegenstände einander zuordnen, sondern nur z. B. verschiedene Haufen von Nüssen miteinander vergleichen und für den einen Haufen ein Mehr oder Gleichviel *an Nüssen* feststellen wie für den anderen. Einen ungeheuren Schritt darüber hinaus, der im Grunde die Geburtsstunde des Zahlbegriffs bezeichnet, hat man aber bereits getan, sobald man die Beschränkung auf gleichbenannte Gegenstände fallen läßt und — auf einer Kulturstufe, wo Zahl und Zählen noch fernliegende Dinge sind — auch schon z. B. einen Haufen Nüsse und eine Handvoll Glasperlen (z. B. zu Tauschzwecken) miteinander vergleicht, indem man in willkürlicher Weise nacheinander je eine Nuß und eine Perle herausgreift und einander gegenüberlegt. Das Resultat ergibt dann, je nachdem schließlich Nüsse, Perlen oder keine von beiden übrigbleiben, daß mehr Nüsse, mehr Perlen oder von beiden gleichviel vorhanden waren; im letzten Fall haben sich die zwei Mengen als gleichgroß (gleichanzahlig) erwiesen. Auf diese Weise läßt sich, und zwar sowohl psychologisch wie auch logisch-mathematisch[1], der *Begriff der endlichen Anzahl* einführen (als das Gemeinsame endlicher Mengen, deren Elemente einander gegenseitig eindeutig zugeordnet werden können). Das wissenschaftlich und überhaupt kulturell Bedeutsame dieser Einführung liegt darin, daß an Stelle individuell verschiedener und beschränkter Mengen von Vergleichsobjekten (z. B. Nüssen) nunmehr in der Gesamtheit aller endlichen Anzahlen 1, 2, 3, . . . eine universelle und unerschöpfliche Vergleichsmenge zur Verfügung steht, deren Elemente keine zufälligen äußeren Merkmale mehr aufweisen, sondern allein durch ihre Eignung zum Zählprozeß völlig charakterisiert sind.

Dieser Anzahlbegriff scheint uns zunächst nur für Mengen mit endlichvielen Elementen einen Sinn zu haben. Nichts hindert uns indes, das Verfahren der Zuordnung auf ganz beliebige Mengen anzuwenden. Wir setzen demnach fest:

Definition 1. Eine Menge M heißt einer Menge N äquivalent, wenn die Elemente von N den Elementen von M *umkehrbar eindeutig*

---

[1] Siehe z. B. KATZ [1], bes. S. 31—33, und WEBER-EPSTEIN [1], S. 1—18, wo auch weitere Literaturangaben zu finden sind.

(gegenseitig eindeutig, ein-eindeutig) zugeordnet werden können, d. h. in solcher Weise, daß vermöge der Zuordnung jedem Element von M ein einziges Element von N, aber gleichzeitig auch umgekehrt jedem Element von N ein einziges von M entspricht.

Damit eine Menge einer anderen äquivalent sei, muß die fragliche Zuordnung also *umkehrbar* eindeutig sein, nicht nur eindeutig schlechthin. Ist z. B. M eine Menge von fünf Äpfeln, N die Menge der drei Zahlen 1, 2, 3, so könnte man dem ersten Apfel die Zahl 1, dem zweiten Apfel die Zahl 2, jedem der drei folgenden Äpfel aber die Zahl 3 zuordnen. Diese Zuordnung ist eindeutig, aber nicht umkehrbar eindeutig; denn bei ihr entspricht zwar jedem Apfel eine einzige, ganz bestimmte Zahl, aber umgekehrt entsprechen der Zahl 3 nicht nur ein einziger, sondern drei Äpfel; beide Mengen brauchen daher nicht äquivalent zu sein (und sind es auch wirklich nicht). In einem Lande, in dem die Polygamie herrscht, ist jeder z. Zt. verheirateten Frau eindeutig ein verheirateter Mann (als ihr Mann) zugeordnet, während umgekehrt bei gewissen polyandrisch lebenden Völkerschaften jedem verheirateten Mann eindeutig eine ebensolche Frau entspricht. In beiden Fällen ist die Zuordnung nicht umkehrbar eindeutig; wohl aber ist sie dies in den Staaten mit Monogamie, wo daher die Menge aller verheirateten Männer derjenigen aller verheirateten Frauen äquivalent ist.

Um zu zeigen, daß eine gegebene Menge einer anderen *nicht* äquivalent ist, genügt es gemäß Definition 1 natürlich keineswegs, eine nicht eindeutige oder nicht umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den beiderseitigen Elementen herzustellen; dazu ist vielmehr der Nachweis erforderlich, daß überhaupt *keine* umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen beider Mengen möglich ist (vgl. hierzu S. 49f.).

Ausdrücklich werde noch auf folgenden Unterschied hingewiesen: Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen zweier *endlicher* Mengen kann z. B. in der Weise definiert werden, daß je zwei einander zuzuordnende Elemente direkt einander gegenübergestellt oder durch eine (etwa tabellarische) Aufzählung bezeichnet werden. Das ist natürlich bei unendlichen Mengen nicht möglich. Hier kann die Zuordnung, wenn man sie ausdrücklich anzugeben wünscht, nur durch ein *Gesetz* definiert werden, d. h. durch eine allgemeine Regel, die eine endliche Formulierung zuläßt, aber dennoch für alle unendlichvielen Elemente die Zuordnungsvorschrift eindeutig liefert.

Der Leser, dem der Begriff der *Funktion* einigermaßen vertraut ist (wenn auch nur von den so häufigen graphischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge her), werde noch darauf hingewiesen, daß es sich bei der „Zuordnung" um nichts anderes handelt als eben den Funktionsbegriff, auf den wir ausführlicher noch auf S. 61 zu sprechen kommen[1]. In der Tat

[1] Die nächsten Betrachtungen können von dem weniger geübten Leser bei der erstmaligen Lektüre überschlagen werden. Allgemein wird in diesem Buch — vor allem in den ersten Abschnitten, während deren Durcharbeitung sich der

liegt, wenn eine Zuordnung jedem Element der Menge M eindeutig je ein Element der Menge N entsprechen läßt, eine eindeutige[1] Funktion $y = f(x)$ vor; das Argument x der Funktion (die „unabhängige Veränderliche") durchläuft dabei alle Elemente der Menge M, während die Funktionswerte y (die Werte der „abhängigen Veränderlichen") sämtlich der Menge N angehören, aber nicht untereinander stets verschieden zu sein brauchen. Der letzte Umstand hindert im allgemeinen daran, die Funktion auch „umzukehren", d. h. x als (eindeutige) Funktion von y aufzufassen; denn zu verschiedenen Argumentwerten x kann eben der nämliche Funktionswert y gehören (z. B. zu verschiedenen Tageszeiten die nämliche Temperatur).

Dieser Gedanke der Zuordnung gestattet es übrigens, sich von der Beschränkung, die in der Verschiedenheit sämtlicher Elemente einer Menge (S. 14) liegt, freizumachen, wenn ein Bedürfnis dazu vorliegt (vgl. z. B. S. 83). Geht man nämlich von einer Menge M aus, so definiert eine Funktion $y = f(x)$, deren Argument x die Elemente von M durchläuft, eine Gesamtheit von Funktionswerten y, die nicht alle untereinander verschieden zu sein brauchen; vielmehr wird in dieser Gesamtheit ein bestimmter Wert y_0 „so oft" vorkommen, wie die „Anzahl" der verschiedenen Argumentwerte x angibt, zu denen eben dieser Funktionswert $f(x) = y_0$ gehört. Ein in der Mathematik sehr häufig vorkommendes Beispiel stellt eine (endliche oder unendliche) *Folge* (z. B. von Zahlen) dar:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots;$$

die Menge der Argumente ist die Gesamtheit der (natürlich untereinander verschiedenen) Indizes, d. h. der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (eventuell bis zu einer letzten Zahl); die Zahlen a_1, a_2 usw. selbst aber brauchen keineswegs untereinander verschieden zu sein, sie können z. B. die Ziffernfolge eines unendlichen Dezimalbruchs durchlaufen, etwa von $\pi = 3{,}14159 \ldots$.

Ist schließlich — in Spezialisierung der Verhältnisse des vorletzten Absatzes — die Funktion $y = f(x)$ (eindeutig) *umkehrbar*, d. h. gehört zu jedem Element y der Menge N der Funktionswerte auch nur ein einziger Argumentwert x aus M, so leistet die Funktion eine *umkehrbar eindeutige* Zuordnung. In diesem Fall ist also die Menge N der Menge M äquivalent. Der Äquivalenzbegriff ist somit nichts Neues, sondern gründet sich ganz und gar auf den in den verschiedensten mathematischen Gebieten auftretenden Begriff der umkehrbaren (willkürlichen) Funktion.

Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen wollen wir auch kurz eine Abbildung der beiden Mengen aufeinander nennen; eine solche Abbildung (bzw. die Vorschrift oder das Gesetz, wonach sie hergestellt wird) wird in der Regel mit einem großen griechischen Buchstaben (Φ, Ψ usw.) bezeichnet werden.

Demnach sind von den Beispielen des vorigen Paragraphen einander äquivalent die Mengen unter 1. und 2., dann die beiden unter 6. betrachteten Mengen, endlich auch die Mengen unter 4. und 5. Weitere Beispiele äquivalenter Mengen werden uns noch in diesem und in den folgenden Paragraphen beschäftigen.

Leser von selbst eine gewisse Übung aneignen wird — durch kleineren Druck gewisser Stellen stets angedeutet, daß die betreffenden Betrachtungen von etwas schwierigerer Natur sind und vom Leser beiseite gelassen werden können, ohne daß dadurch das Verständnis der späteren Überlegungen merklich beeinträchtigt wird.

[1] Unter „Funktion" wird auch ohne weitere Hinzufügung immer „eindeutige Funktion" verstanden, d. h. eine solche, die jedem Argumentwert nur *einen einzigen* Funktionswert zuordnet.

2. Grundeigenschaften der Äquivalenz. Schon an dieser Stelle seien drei Eigenschaften der Äquivalenz hervorgehoben, die fast selbstverständlich scheinen, aber dennoch eines Beweises bedürftig und fähig sind. Vor allem *ist jede beliebige Menge sich selbst äquivalent*; um dies zu erkennen, braucht man nur die Menge auf sich selbst in der Weise abzubilden, daß jedes einzelne Element sich selber zugeordnet wird. Man nennt aus diesem Grund die Äquivalenz eine *reflexive* Beziehung. Ebenso leicht ist einzusehen, daß *die Beziehung der Äquivalenz zwischen zwei Mengen eine gegenseitige oder symmetrische ist*, daß also, falls die Menge M der Menge N äquivalent ist, auch umgekehrt die letztere der ersteren äquivalent ist. Da nämlich die in Frage stehende Zuordnung nicht nur eindeutig schlechthin, sondern umkehrbar eindeutig ist, so wird auch jedem Element von N ein Element von M eindeutig, und zwar umkehrbar eindeutig zugeordnet, was gemäß der Definition gerade besagt, daß die Menge N der Menge M äquivalent ist. Um diese Überlegung anschaulicher zu machen, verstehen wir unter M die in Beispiel 1. des vorigen Paragraphen betrachtete Menge von Früchten, unter N die in Beispiel 2. vorgeführte Menge von Zahlen. Daß die Menge M der Menge N äquivalent ist, läßt sich dann anschaulich machen durch das folgende Schema:

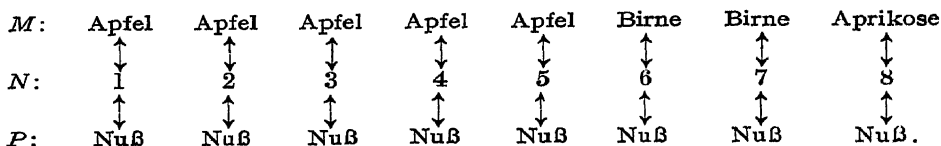
M:	Apfel	Apfel	Apfel	Apfel	Apfel	Birne	Birne	Aprikose
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N:	1	2	3	4	5	6	7	8,

in dem die doppelte Zuspitzung der Pfeile andeutet, daß die Zuordnung umkehrbar eindeutig ist; dasselbe Schema besagt aber offenbar gemäß unserer Definition, daß auch umgekehrt die Menge N der Menge M äquivalent ist. Durch diese der Äquivalenz zukommende Eigenschaft der Gegenseitigkeit gewinnen wir erst das — teilweise schon benutzte — Recht, schlechthin von der Äquivalenz „zweier Mengen" oder „zwischen zwei Mengen" oder von einer Abbildung „zwischen zwei äquivalenten Mengen" zu sprechen oder zu sagen, zwei Mengen seien „einander äquivalent" — kurz: Ausdrucksweisen für die Äquivalenz und die Abbildung zu gebrauchen, bei denen beide Mengen als gleichberechtigt erscheinen.

Um die dritte und letzte hier hervorzuhebende Eigenschaft der Äquivalenz kennenzulernen, gehen wir aus von drei Mengen M, N und P, von denen einmal M und N, ferner N und P äquivalent sein sollen; unser Ziel ist der Nachweis, daß auch M und P äquivalent sind oder daß die Äquivalenz, wie man sich ausdrückt, eine *transitive* (etwa: fortwirkende) Beziehung ist. Es bezeichne Φ eine (wegen der vorausgesetzten Äquivalenz sicherlich existierende) Abbildung zwischen den Mengen M und N, Ψ eine ebensolche zwischen N und P. Ist m irgendein Element von M, so ordnet ihm die Abbildung Φ ein bestimmtes Element n von N, diesem wiederum die Abbildung Ψ ein bestimmtes Element p von P zu; da die Abbildungen Φ und Ψ umkehrbar eindeutig sind, entspricht dem Element p von P vermöge Ψ auch nur das einzige Element n von N und diesem vermöge Φ das einzige Element m von M. Wir setzen nun fest, daß dem Element m von M das Element p von P (und damit diesem jenes) zugeordnet werden soll; wird diese Festsetzung für alle Elemente m von M und damit für alle Elemente p von P getroffen, so erhalten wir offenbar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen Elementen von M und allen Elementen von P. Die Möglichkeit der Herstellung einer derartigen Zuordnung beweist nun in der Tat, daß die Mengen M und P äquivalent sind; *sind also zwei Mengen einer und derselben dritten Menge äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.*

Um diesen Beweisgang zu veranschaulichen, fügen wir zu den zwei im vorletzten Absatz betrachteten Mengen M und N noch eine dritte Menge P hinzu, die etwa acht verschiedene Nüsse enthalten möge; diese Menge P ist offenbar äquivalent der aus acht Zahlen bestehenden Menge N. Je eine Abbildung zwischen

den Mengen M und N einerseits und zwischen den Mengen N und P andererseits veranschaulicht uns das folgende Schema:

M:	Apfel	Apfel	Apfel	Apfel	Apfel	Birne	Birne	Aprikose
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N:	1	2	3	4	5	6	7	8
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
P:	Nuß	Nuß	Nuß	Nuß	Nuß	Nuß	Nuß	Nuß.

Eine Abbildung zwischen den Mengen M und P und damit den Nachweis der Äquivalenz dieser beiden Mengen gewinnt man hieraus (entsprechend dem eben durchgeführten Beweisverfahren) einfach dadurch, daß man die Elemente der Menge N wegstreicht und dann je zwei untereinanderstehende Elemente der Mengen M und P einander zuordnet. (Man hat damit ersichtlich die Umkehrung des Verfahrens durchgeführt, das die Vergleichung zweier Mengen von Gegenständen durch Zwischenschaltung einer Menge von Zahlen, d. h. durch „Abzählung" der Mengen, lehrt.)

Die Tatsache, daß zwei Mengen M und N äquivalent sind, bezeichnet man durch die Schreibweise: $M \sim N$ (gelesen: M äquivalent N). Unsere letzten Betrachtungen zeigen, daß *jeder* Menge M die Eigenschaft $M \sim M$ zukommt, daß ferner zugleich mit $M \sim N$ stets auch $N \sim M$ gilt und daß endlich aus den beiden Beziehungen $M \sim N$, $N \sim P$ die Beziehung $M \sim P$ folgt. Oder in Worten: die Äquivalenz von Mengen ist eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung. In einer Gesamtheit von Mengen, unter denen jede einer bestimmten unter ihnen äquivalent ist, ist daher jede vorkommende Menge jeder anderen äquivalent.

3. Begriff der Teilmenge. Es sei eine Menge M gegeben. Wir denken uns einen Teil ihrer Elemente willkürlich herausgegriffen und fassen die durch sie bestimmte Menge M' ins Auge; eine solche Menge M' heißt eine Untermenge oder Teilmenge der Menge M. Also:

Definition 2. Eine Menge M' heißt eine Teilmenge der Menge M, wenn jedes Element von M' gleichzeitig auch Element von M ist.

Darunter ist auch der Grenzfall enthalten, daß *alle* Elemente von M in der Teilmenge M' vorkommen, d. h. daß die Mengen M und M' gleich sind; in diesem Fall ist gleichzeitig M' Teilmenge von M und M Teilmenge von M'; man nennt dann M' zuweilen eine uneigentliche Teilmenge von M. Enthält dagegen M auch Elemente, die sich in M' nicht finden, so spricht man der Deutlichkeit wegen nötigenfalls von einer *eigentlichen* (echten) Teilmenge M'.

So hat z. B. die Menge $\{1, 2, 3\}$ die sieben Teilmengen $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$ und $\{1,2,3\}$; alle bis auf die letzte, die eine uneigentliche Teilmenge ist, sind eigentliche Teilmengen der Menge $\{1,2,3\}$. Diese Menge und all ihre Teilmengen sind andererseits eigentliche Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *aller* natürlichen Zahlen; ebenso ist z. B. die Menge aller geraden Zahlen $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ eine Teilmenge der

Menge aller natürlichen Zahlen, und zwar eine eigentliche Teilmenge, weil die (in der Menge aller natürlichen Zahlen vorkommenden) ungeraden Zahlen 1, 3, 5, . . . in ihr nicht enthalten sind.

Nach der Definition der Teilmenge leuchtet ein, daß, *wenn M eine Teilmenge der Menge N und N eine Teilmenge der Menge P ist, auch M eine Teilmenge von P ist.* Ferner ist offenbar jede Teilmenge einer endlichen Menge wiederum endlich.

Aus rein formalen Gründen, namentlich um gewisse Tatsachen einfacher und bequemer aussprechen zu können, führen wir an dieser Stelle noch eine uneigentliche Menge ein, die sogenannte Nullmenge[1]. Diese ist dadurch definiert, daß sie überhaupt kein Element enthält; sie ist also vermöge der Definition von S. 4 gar keine Menge, soll aber auf Grund besonderer Festsetzung, also einer Erweiterung jener Definition, als solche, und zwar als *endliche* Menge gelten und *mit* 0 *bezeichnet werden*[2]. Ihren Wert gewinnt die Einführung der Nullmenge namentlich durch die folgende Definition, die sich später als nützlich erweisen wird: *Die Nullmenge* 0 *soll als* (*uneigentliche*) *Teilmenge jeder beliebigen Menge — auch von sich selbst — gelten.* Dies steht offenbar noch im Einklang mit Definition 2.[3*] Bei dieser Präzisierung des Begriffs „Teilmenge" besitzt die oben als Beispiel angeführte Menge $\{1, 2, 3\}$ nunmehr $8 = 2^3$ Teilmengen.

Merkwürdigerweise haben einige Autoren (z. B. DIECK [2], S. 102 und 106) Anstoß an vorstehenden Definitionen genommen, nach denen auch die Nullmenge als „Menge" gilt und zu den Teilmengen einer Menge M auch M selbst sowie die Nullmenge gerechnet wird; diese Erklärungen sind geradezu als „in sich widerspruchsvoll" angesprochen worden.[4] Offenbar sind diese Einwände völlig grundlos und einer allzu ausschließlich auf die sogenannte „Realdefinition" eingeschworenen Auffassung entsprungen: der Auffassung etwa, als ob Begriffe wie „Menge" und „Teilmenge" gewissermaßen fertig dagewesen und von den Mathematikern vorgefunden worden seien, die nun — im Lichte der Wahrheit besehen — Mißbrauch damit getrieben hätten. In Wirklichkeit ist die Definition eine *Festsetzung*, die nichts Neues schafft, vielmehr letzten Endes nur der (allerdings praktisch unentbehrlichen) Vereinfachung der Ausdrucksweise dient und daher

---

[1] Die „Nullklasse" ist zunächst von den Vertretern der Logistik (vgl. § 15) verwendet, dann aber als Nullmenge von ZERMELO und anderen systematisch in der Mengenlehre benutzt worden.

[2] Eine Verwechselung zwischen der Zahl 0 und der Nullmenge 0 wird nicht auftreten können, auch da nicht, wo (wie z. B. auf S. 70) das Zeichen 0 bald nacheinander in der einen und in der anderen Bedeutung vorkommt.

[3*] Man kann sich diese Festsetzung so plausibel machen: Faßt man von den Elementen einer gegebenen Menge M diejenigen zusammen, die eine gewisse Eigenschaft besitzen, so entsteht eine Teilmenge von M. Ist die Eigenschaft speziell von solcher Art, daß *kein* Element von M sie besitzt, so wird die entstehende Teilmenge zur Nullmenge; dagegen entsteht eine Teilmenge mit einem einzigen Element, wenn die Eigenschaft nur diesem allein zukommt.

[4] Die derart (in diesem wie in vielen anderen Punkten) orientierten, durch die „Philosophie des Als-Ob" irregeleiteten Auffassungen erfahren eine bündige Widerlegung bei STUDY [1_2] und BETSCH [1].

rein nach Momenten der *Zweckmäßigkeit*, nicht etwa der „*Richtigkeit*" zu treffen und zu beurteilen ist; so erweist es sich als selbstverständlich, daß die nämliche Bezeichnung anders in der Wissenschaft als im täglichen Leben, anders in dieser als in jener Wissenschaft, ja selbst in verschiedenen Teilen derselben Wissenschaft verschieden gebraucht werden kann[1], wobei nur natürlich jede Verwechselung ausgeschlossen bleiben muß. Im vorliegenden Fall ist es lediglich *zweckmäßig und bequem*, neben den durch die Definition von S. 4 bezeichneten „Zusammenfassungen" auch noch die „Nullmenge" als Menge zu betrachten, ferner die letztere, wie es sich dem Wortlaut der Definition 2 formell einfügt, als „Teilmenge" jeder Menge aufzufassen, schließlich auch jede Menge als Teilmenge von sich selbst anzusehen (wie man ja auch eine ganze Zahl als „Teiler" von sich selbst bezeichnet). Mit „Richtigkeit" haben alle diese Festsetzungen überhaupt nichts zu tun — wenn sie nur widerspruchsfrei zulässig sind, wie dies ohne weiteres einleuchtet. Übrigens hat sich eine derartige, der „Nominaldefinition" zuneigende Auffassung weit über die Reihen der Mathematiker hinaus auch bei den Logikern mehr und mehr durchgesetzt; es sei etwa auf SIGWART [1], Bd. 1, S. 379 verwiesen.

4. **DEDEKINDS Kennzeichnung der unendlichen Mengen.** Es sei M eine endliche Menge. Darunter wollen wir zunächst (wie bisher) im üblichen naiven Sinn eine Menge von endlichvielen Elementen verstehen (z. B. die Menge der hundert natürlichen Zahlen von 1 bis 100 oder die Menge aller Druckzeichen in dem vorliegenden Buch); dieses „endlich" läuft offenbar darauf hinaus, daß es *eine natürliche Zahl* n *derart gibt, daß* M gerade n verschiedene Elemente enthält und somit *der Zahlenmenge* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *äquivalent ist.* Bedeutet M' eine eigentliche Teilmenge von M (also eine Menge, die einige, aber nicht alle unter jenen hundert Zahlen oder unter diesen Zeichen enthält), so sind M und M' sicher nicht äquivalent. Denn beginnt man der Reihe nach irgendwie jedem Element von M in umkehrbar eindeutiger Weise je ein Element von M' zuzuordnen, so wird schließlich — und zwar nach endlichvielen Schritten — die Menge M' erschöpft sein, während in M noch Elemente übrig sind, denen kein Element von M' zugeordnet ist. Der hierdurch gedanklich völlig bestimmte Beweis dieser fast trivial erscheinenden arithmetischen Tatsache, die eines strengen Nachweises fähig und bedürftig ist, soll hier nicht genauer ausgeführt werden[2].

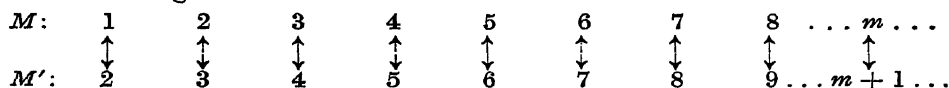
Ganz anders liegen die Verhältnisse bei unendlichen Mengen, also bei Mengen, die unendlichviele Elemente enthalten, wie wir solche Mengen in den Beispielen 4. bis 7. des vorigen Paragraphen kennengelernt haben. Man überzeugt sich leicht, zunächst freilich mit einiger Überraschung, von der folgenden merkwürdigen Tatsache: *Zwei un-*

[1] In einer Theorie der Farben könnte z. B., je nachdem es für den beabsichtigten Zweck einfacher ist, Weiß entweder als „Farbe" aufzufassen sein oder nicht.

[2] Für nähere Ausführung dieses und verwandter, der Arithmetik zugehöriger Punkte vergleiche man z. B. WEBER-EPSTEIN [1], S. 11; HÖLDER [2], S. 15; LOEWY [1], S. 384.

endliche Mengen, von denen die eine eine eigentliche Teilmenge der anderen ist, können dennoch sehr wohl einander äquivalent sein.

Betrachten wir z. B. neben der Menge M aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... die Menge M', die aus M durch Streichung der Zahl 1 hervorgeht, also die Menge $M' = \{2, 3, 4, \ldots\}$! M' ist offenbar eine eigentliche Teilmenge von M. Um anschaulich zu zeigen, daß diese zwei Mengen M und M' äquivalent sind, beziehen wir ihre Elemente der Reihe nach in folgender Weise durch Pfeile aufeinander:

$$\begin{array}{llllllllll} M: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots m \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \quad \updownarrow \\ M': & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots m+1 \ldots \end{array}$$

Wenn wir uns, um den Sachverhalt bequemer veranschaulichen und formulieren zu können, bei der Anschreibung der Teilmenge M' deren Elemente mit roter Tinte aufgezeichnet denken, so können wir unser Verfahren so beschreiben: Es wird jeder schwarzen Zahl m die rote Zahl $m + 1$ oder (anders ausgedrückt) jeder roten Zahl m' die schwarze $m' - 1$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist ersichtlich umkehrbar eindeutig. Die Mengen sind also wirklich äquivalent, obgleich M' nur einen Teil der Elemente von M enthält, nämlich sie alle mit Ausnahme des Elementes 1.

Der Leser mache sich zum besseren Verständnis alles Folgenden dieses erste und denkbar einfachste Beispiel der Äquivalenz von zwei anscheinend „verschieden großen" Mengen recht deutlich; er wird bemerken, wie das Gelingen einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung wesentlich darauf beruht, daß die Mengen unendlichviele Elemente enthalten. Wären M und M' endlich und enthielten sie — abgesehen von der nur in M vorkommenden Zahl 1 — die nämlichen Elemente, so würde eine umkehrbar eindeutige Zuordnung nicht herstellbar sein; denn am Schluß bliebe dann in der Menge M ein letztes Element übrig, dem kein Element aus M' gegenüberstände. Natürlich muß die Abbildung, aus der wir die Äquivalenz von M mit einer eigentlichen Teilmenge M' ablesen, überdies unter anderem die Eigenschaft haben, daß sie nicht etwa jedes Element sich selbst zuordnet; von unserem allgemeinen Standpunkte aus (Definition 1) haben indes die höchst speziellen Abbildungen, die jedes Element sich selbst zuordnen, nicht den mindesten Vorzug vor allgemeineren Abbildungen, und nur die völlige Verkennung dieses Umstandes kann zu so schweren (auch sonst zuweilen anzutreffenden) Irrtümern führen wie denen, auf die sich die wertlose Schrift NOLTE [1] gründet.

Zahlreiche weitere Beispiele der Äquivalenz von Mengen, von denen die eine eine eigentliche Teilmenge der anderen ist, werden uns in diesem wie in den nächsten Paragraphen noch entgegentreten; hier sei besonders auf die Beispiele hingewiesen, die durch die Abbildungen 4 und 5 (S. 51 und 52) in leicht verständlicher Weise illustriert werden.

Diese Erscheinung, daß eine Menge gewissermaßen „gleichviel Elemente enthalten“ kann wie eine eigentliche Teilmenge von ihr, steht in einem gewissen Kontrast zu dem bekannten Satz: Das Ganze ist stets größer als ein Teil davon. Das Auffällige dieses Kontrastes, den z. B. schon GALILEI klar hervorgehoben hat, hat historisch beim Zugang zum Begriff des Aktual-Unendlichen eine wesentliche und zunächst hinderliche Rolle gespielt, da es die unendlichen Mengen, die eine so paradoxe Eigenschaft besitzen, zu diskreditieren schien. In Wirklichkeit war indes jener Satz vom Ganzen und Teil nur im Gebiet des Endlichen erprobt und es lag kein Grund vor zu erwarten, daß er bei dem Riesenschritt, der vom Endlichen zum Unendlichen führt, seine Gültigkeit unverändert bewahre[1].

Den angeführten grundlegenden Unterschied zwischen unendlichen und endlichen Mengen, nämlich das Bestehen oder Nichtbestehen einer Äquivalenz zwischen der Menge M und einer eigentlichen Teilmenge von M, hat man nun — vom naiven Begriff der endlichen und der unendlichen Menge absehend — geradezu zur *Definition* der Begriffe „unendliche Menge“ und „endliche Menge“ benutzt. Im Anschluß an *Peirce* und namentlich an die berühmte Schrift [2] des hervorragenden Braunschweiger Mathematikers R. DEDEKIND (1831 bis 1916) bedient man sich nämlich der folgenden

Definition 3. Eine Menge M heißt unendlich oder transfinit (überendlich), wenn es eine eigentliche Teilmenge von M gibt, die zu M äquivalent ist; gibt es keine zu M äquivalente eigentliche Teilmenge von M, so wird M als eine endliche Menge bezeichnet.

5. Verhältnis der gewöhnlichen zur DEDEKINDschen Kennzeichnung. Wie man sieht, unterscheidet sich Definition 3 von der naiven Kennzeichnung der Endlichkeit oder Unendlichkeit einer Menge (S. 22) namentlich auch dadurch, daß in letzterem Fall die *endliche* Menge positiv (wesentlich mittels des Begriffs der natürlichen Zahl) definiert wird und die unendliche negativ, als nicht-endliche Menge erscheint,

---

[1] Noch paradoxer erscheint die Äquivalenz zweier anscheinend sehr umfangsverschiedener unendlicher Mengen, wenn man sie *scheinbar* ins praktische Leben überträgt; das sich dabei einstellende unbehagliche Gefühl löst sich, wenn man sich klar macht, daß die Wirklichkeit eben nur eine scheinbare ist und darauf unser Empfinden nicht geeicht ist. Bekannt ist so die Geschichte von Tristram Shandy, der daran geht, seine Lebensgeschichte zu schreiben, und zwar so pedantisch, daß er zur Schilderung der ersten Tage seines Lebens je ein volles Jahr benötigt. Er wird natürlich mit seiner Biographie niemals fertig, wenn er so fortfährt. Würde er indes unendlich lang leben (etwa „abzählbar unendlichviele“ Jahre in der Ausdrucksweise des nächsten Paragraphen), so würde seine Biographie „fertig“; es würde dann nämlich, genauer ausgedrückt, *jeder* noch so späte Tag seines Lebens schließlich eine Schilderung bekommen, weil das für diese Arbeit an die Reihe kommende Jahr eben irgend einmal in seinem Leben erschiene. (Vgl. die Zuordnungen auf S. 29ff.)

während nach Definition 3 die *unendliche* Menge den primären Begriff darstellt, die endliche aber als nicht-unendliche Menge erklärt wird.

Wir wollen uns in unseren ferneren Überlegungen der Einfachheit halber mit der naiven, in mancher Hinsicht vorzuziehenden Auffassung der Begriffe einer „endlichen" bzw. „unendlichen" Menge begnügen, wie wir sie bisher schon mehrfach benutzt haben. Es bietet aber keine wesentlichen Schwierigkeiten, sich lediglich auf die soeben ausgesprochene Definition zu stützen und mit ihr allein sich die Begriffe „endlichviele" und „unendlichviele" erklärt zu denken (vgl. indes S. 298f.)[1]. Um dem Leser eine Anschauung davon zu geben, daß wirklich die Definition 3 den nämlichen Begriffsumfang für „endlich" und „unendlich" liefert wie die Definition des gewöhnlichen Sprach- und Denkgebrauchs, mögen hier noch einige diesbezügliche Bemerkungen angeschlossen werden; auf lückenlose Strenge im Beweis soll bei dieser eingeschalteten Betrachtung kein Wert gelegt werden, es kommt nur auf eine Andeutung des Gedankenganges an.

Vor allem ist zu zeigen, daß im Sinne unserer Definition *eine unendliche Menge niemals einer endlichen äquivalent sein kann*; wäre dem nicht so, so könnten wir die Definition nicht als brauchbar betrachten, da uns vielmehr gerade der Äquivalenzbegriff die Handhabe geben soll sogar zur weiteren Untereinteilung sowohl der endlichen wie der unendlichen Mengen (vgl. S. 55ff.). Zum Nachweis jener Tatsache gehen wir aus von einer im Sinne der Definition 3 unendlichen Menge M, d. h. von einer solchen, die eine zu M äquivalente eigentliche Teilmenge M' besitzt. Es sei N irgendeine zu M äquivalente Menge; wir haben zu zeigen, daß auch N im Sinne unserer Definition unendlich ist (was ja nur die positive Wendung der zu beweisenden Tatsache darstellt). Zu diesem Zweck werde eine bestimmte Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen M und N mit Φ bezeichnet; durch diese Abbildung werden dann den Elementen der Teilmenge M' von M *von selbst* die Elemente einer gewissen Teilmenge von N in umkehrbar eindeutiger Weise zugeordnet; diese zu M' äquivalente Teilmenge von N möge N' heißen. Da M' nicht alle Elemente von M enthält, wird auch N' nicht alle Elemente von N enthalten, d. h. N' ist eine eigentliche Teilmenge von N. Endlich ist $N' \sim N$, wie aus den Beziehungen $N' \sim M'$, $M' \sim M$ und $M \sim N$ gemäß S. 20 hervorgeht. N besitzt also die zu N äquivalente eigentliche Teilmenge N', d. h. N ist wirklich, wie wir zeigen wollten, im Sinne der Definition 3 eine unendliche Menge.

Um den Nachweis zu führen, daß unsere Definition der endlichen und der unendlichen Menge im Einklang steht mit der naiven Vorstellung, die wir von Mengen mit „endlichvielen" oder mit „unendlichvielen" Elementen haben, können wir folgenden Gedankengang einschlagen. Gemäß S. 22 wird durch die Behauptung, die Menge M enthalte nur endlichviele Elemente, die Existenz einer natürlichen Zahl n von solcher Art ausgedrückt, daß M äquivalent ist der Menge von Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$; gibt es keine derartige natürliche Zahl n, so sagen wir, M enthalte unendlichviele Elemente. Nach S. 22 ist eine Menge N

[1] Russell (vgl. z. B. [5]) zieht mit Nutzen zwei verschiedene Bezeichnungsarten heran: er nennt Mengen, die im naiven Sinn endlich sind, „induktiv" (aus einem auf S. 181 zu berührenden Grund), dagegen Mengen, die im Sinn Dedekinds unendlich sind, „reflexiv", und unterscheidet demgemäß induktive, nicht-induktive, nicht-reflexive und reflexive Mengen, was trotz der Darlegungen der nächsten Absätze seinen guten Sinn hat (vgl. S. 299).

von der Form $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, wo n eine natürliche Zahl bedeutet, niemals einer eigentlichen Teilmenge von sich selbst äquivalent; eine im gewöhnlichen Sinn endliche Menge ist also auch endlich gemäß Def. 3. Andererseits aber besitzt eine Menge M, die zu *keiner* Menge der Form $\{1, 2, 3; \ldots, n\}$ äquivalent ist, stets eine zu sich selbst äquivalente eigentliche Teilmenge. Man kann nämlich zunächst aus M ein beliebiges erstes Element m_1 herausgreifen, dann ein zweites m_2, ein drittes m_3 usw. und kann dieses Verfahren *ohne Ende* fortsetzen, weil anderenfalls aus der Erschöpfung von M eine Äquivalenz zwischen dieser Menge und einer Menge der Form $\{1, 2, \ldots, n\}$ folgen würde. Faßt man die Gesamtheit *aller* so in bestimmter Weise herausgegriffen gedachten Elemente zu der Menge $M_1 = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$, dagegen alle etwa nicht in M_1 vorkommenden Elemente von M zu einer Menge M_2 — eventuell $M_2 = 0$ — zusammen, so sind M_1 und M_2 Teilmengen von M, deren Elemente zusammengenommen die Gesamtheit der Elemente von M darstellen. Nun ist die Menge M_1 einer eigentlichen Teilmenge von sich selbst, z. B. der Teilmenge $N_1 = \{m_2, m_3, m_4, \ldots\}$, ganz ebenso äquivalent, wie sich auf S. 23 die Mengen $\{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\{2, 3, 4, \ldots\}$ als äquivalent erwiesen haben; ferner erkennt man durch Abbildung der Menge M_1 auf N_1 und der Menge M_2 auf sich selbst, daß die Gesamtheit der Elemente von N_1 und M_2 zusammengenommen eine zu M äquivalente Menge N darstellt, die eine eigentliche Teilmenge von M ist (nämlich das Element m_1 von M nicht enthält). M ist also im Sinne unserer Definition eine unendliche Menge. (Vgl. auch S. 298.)

Demnach ist jede im gewöhnlichen Sinne endliche Menge auch endlich im Sinne der Definition 3, jede im gewöhnlichen Sinne unendliche Menge auch unendlich im Sinne dieser Definition, und da sich diese Aussage umkehren läßt, so ist die Übereinstimmung beider Begriffspaare nachgewiesen[1].

Aufgaben. 1. Gibt es zwischen zwei äquivalenten Mengen neben einer gegebenen Abbildung immer noch weitere Abbildungen? Beispiele! Man spezialisiere auf die Abbildungen zwischen einer Menge und sich selbst!

2. (Für die mit dem Funktionsbegriff ein wenig vertrauten Leser.) Können die Funktionen

$$y = 3x + 5, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \sin x$$

allgemein zur Abbildung einer Menge von Argumentwerten x auf die Menge der entsprechenden Funktionswerte verwendet werden? Läßt sich diese Frage, soweit sie in dieser Form zu verneinen ist, wenigstens bei geeigneter Beschränkung der Veränderlichkeit von x (etwa auf ein gewisses Intervall) bejahen?

3. Wie läßt sich die erste der auf S. 19 bewiesenen Eigenschaften der Äquivalenz rein „formal" aus der zweiten und dritten herleiten, ohne die (einfachere, aber „inhaltliche") Methode der Zuordnung eines jeden Elements zu sich selbst heranzuziehen[2]?

---

[1] Auch die Nullmenge, die überhaupt keine eigentliche Teilmenge besitzt, gilt nach Definition 3 (ebenso wie nach unserer früheren Festsetzung) als endliche Menge.

[2] Die (von dem Anfänger nicht weiter zu beachtende) stillschweigende Voraussetzung einer solchen Herleitung ist freilich, daß es zu jeder Menge überhaupt eine äquivalente gibt, und diese Voraussetzung macht das formale Verfahren im vorliegenden Fall *praktisch* wertlos; nicht aber in anderen entsprechenden Fällen.

4. Wieviele verschiedene Teilmengen besitzt eine endliche Menge M mit m Elementen und inwiefern läßt gerade die Antwort hierauf es als zweckmäßig erscheinen, auch M selbst und die Nullmenge als Teilmengen von M aufzufassen?

5. Warum ist es für den Beweis (S. 25) der Nichtäquivalenz zwischen einer endlichen und einer unendlichen Menge (gemäß Definition 3) bequemer, von einer unendlichen Menge auszugehen als von einer endlichen?

6. Man führe den oben (S. 26) angegebenen Beweis, daß eine im naiven Sinn unendliche Menge M auch nach Definition 3 unendlich ist, für folgende Mengen und folgende Methoden des Herausgreifens von Elementen m_1, m_2 usw.:

a) M = Menge aller natürlichen Zahlen; herauszugreifen ist stets eine möglichst kleine durch 5 teilbare Zahl.

b) M = Menge aller positiven gemeinen Brüche in „gekürzter“ Form; herauszugreifen ist stets eine Zahl mit möglichst kleiner, aber schrittweise wachsender Summe von Zähler und Nenner, und zwar im Zweifelsfall eine möglichst große Zahl von dieser Summe.

§ 4. Abzählbare Mengen.

Wir wollen uns jetzt zunächst mit den in bestimmtem Sinne einfachsten unendlichen Mengen, den sogenannten abzählbaren Mengen, beschäftigen und verschiedene Beispiele solcher abzählbarer Mengen betrachten, die uns schon eine Fülle überraschender Tatsachen liefern werden.

1. Definition der abzählbaren Menge. Wir gehen aus von einer besonders naheliegenden unendlichen Menge, von der schon im Beispiel 4 des § 2 betrachteten Menge aller natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...; diese Menge bezeichnen wir für den Augenblick mit M. N sei irgendeine ihr äquivalente Menge und Φ eine Abbildung zwischen M und N. Dann können wir das durch diese Abbildung dem Element 1 von M zugeordnete Element der Menge N mit n_1 bezeichnen, das dem Element 2 entsprechende Element von N ebenso mit n_2, das zu 3 zugeordnete mit n_3 usw., indem wir zur Bezeichnung eines jeden Elementes von M die betreffende natürliche Zahl als „*Index*“ verwenden. Hiernach läßt sich die Menge N schreiben in der Form: $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$; mit anderen Worten: wir haben die Elemente von N *abgezählt*, so daß sich ein erstes, zweites, drittes, ... Element von N angeben läßt. Umgekehrt wird jedes beliebige Element n von N an einer bestimmten, etwa der k^{ten} Stelle, wobei k eine natürliche Zahl bedeutet, in der abgezählten Menge N vorkommen; denn durch die Abbildung Φ wird n irgendeiner bestimmten natürlichen Zahl k von M zugeordnet und dies soll ja eben besagen, daß n die

k^{te} Zahl unserer Abzählung ist. Demnach läßt sich jede Menge N, die der Menge aller natürlichen Zahlen äquivalent ist, in Form einer abgezählten Menge $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ darstellen. Doch muß N nicht von vornherein als abgezählte, d. h. durch die angeführte Ordnung der Elemente ausgezeichnete Menge gegeben sein. In N braucht ja zunächst überhaupt nicht eine bestimmte Reihenfolge der Elemente vorgeschrieben zu sein; auch zutreffendenfalls braucht die Reihenfolge nicht von Anfang an die obige zu sein, wie bald durch Beispiele gezeigt wird. Aber die *Möglichkeit* der Abzählung der Elemente folgt aus der Äquivalenz mit M und deshalb wird jede zur Menge der natürlichen Zahlen äquivalente Menge eine abzählbare Menge genannt. Manchmal ist es bequem, den Ausdruck statt für die Menge vielmehr für ihre Elemente zu verwenden, also zu sagen, es lägen abzählbar unendlich-viele Elemente vor. Eine abzählbare Menge ist also stets unendlich[1], und eine zu einer abzählbaren Menge äquivalente Menge stets wiederum abzählbar.

2. Einfachste Beispiele und Sätze. Betrachten wir zunächst einige Beispiele von abzählbaren Mengen! Wie wir oben (S. 23) sahen, ist gleich der Menge $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ auch die Menge $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ abzählbar. Das Gleiche gilt offenbar für jede Menge N, die aus der Menge der natürlichen Zahlen durch Weglassung endlichvieler natürlicher Zahlen entsteht; denn ordnen wir die (immer noch unendlichvielen) übriggebliebenen Zahlen wieder ebenso wie vorher (nämlich nach ihrer Größe), so haben wir damit schon eine erste, eine zweite, eine dritte Zahl usw. der Menge N definiert und so jeder Zahl von N eine bestimmte Platznummer zugeordnet, d. h. wir haben durch jene Ordnung die Menge N bereits abgezählt. Wir können aber das gleiche Verfahren auch einschlagen, falls N aus der Menge der natürlichen Zahlen durch Weglassung *unendlichvieler Zahlen* entstanden ist, solange nur N selbst noch unendlichviele Zahlen enthält. Ist z. B. N die Menge aller positiven *geraden* Zahlen, so läßt sich N auf die Menge aller natürlichen Zahlen n in folgender Weise umkehrbar eindeutig abbilden:

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \ldots 2n \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \quad \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots n \ldots, \end{matrix}$$

d. h. 2 wird die erste, 4 die zweite Zahl von N usw. Es ist also zunächst *jede unendliche Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen abzählbar.*

Bei diesem Beweis haben wir lediglich die Abzählbarkeit der Menge der natürlichen Zahlen benutzt, nicht etwa eine weitere Eigenschaft, die in der Natur der Elemente (nämlich der Zahlen) begründet wäre.

[1] Zuweilen werden auch die endlichen Mengen als abzählbar bezeichnet und es wird dann im Gegensatz zu ihnen von „abzählbar unendlichen" Mengen gesprochen. Wir bleiben der Kürze halber bei der obigen Ausdrucksweise.

Der nämliche Beweis läßt sich daher für eine beliebige abzählbare Menge durchführen, aus der endlich- oder unendlichviele Elemente fortgelassen werden, und wir erhalten so das allgemeine Ergebnis:

Satz 1. *Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wiederum abzählbar.*

Gewissermaßen durch eine Umkehrung des obigen Verfahrens läßt sich andererseits zeigen, daß auch z. B. *die Menge aller positiven und negativen ganzen Zahlen*, also eine *umfassendere* Menge als die der natürlichen Zahlen, *abzählbar ist.* Ordnen wir diese Menge wie üblich der Größe nach und zwar unter Berücksichtigung des Vorzeichens, so daß die negativen Zahlen vor den positiven zu stehen kommen, so ist die Menge zunächst nicht abgezählt; denn es läßt sich z. B. die Zahl 1 nicht durch eine Platznummer als die soundsovielte unserer Menge bezeichnen, da ihr ja unendlichviele Zahlen (nämlich alle negativen) vorausgehen. Dennoch kann man unsere Menge mittels eines einfachen Kunstgriffes abzählen. Wir wollen nämlich als erstes Element die Zahl 1, als zweites die Zahl -1, als drittes 2, als viertes -2, als fünftes 3, als sechstes -3 usw. nehmen; die Abzählung, d. h. die Zuordnung zur Menge der natürlichen Zahlen, wird dann folgende:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \end{array}$$

In der so abgezählten Menge kommt auch wirklich *jedes* Element der Menge, d. h. jede positive oder negative ganze Zahl, an bestimmter Stelle vor; ist nämlich m irgendeine positive ganze Zahl, so ist m offenbar die $(2\,m-1)^{\text{te}}$, $-m$ dagegen die $(2\,m)^{\text{te}}$ Zahl unserer Abzählung. Die ursprünglich keineswegs *abgezählte* Menge ist hiermit abgezählt worden und damit als *abzählbar* nachgewiesen.

Die Hinzufügung der Zahl 0 ändert ersichtlich nichts an der Abzählbarkeit unserer Menge, wie überhaupt die Eigenschaft einer Menge, abzählbar zu sein, durch Hinzufügung *endlichvieler* Elemente zu ihren ursprünglichen Elementen nicht verändert wird; denn man kann ja die endlichvielen neuen Elemente in der Abzählung an den Anfang stellen und bewirkt dadurch nur, daß jedes der ursprünglichen Elemente in der neuen Abzählung eine um eine feste Zahl erhöhte Platznummer erhält. Ja noch mehr! Wenn wir bedenken, daß sowohl die Menge der positiven wie auch die der negativen ganzen Zahlen jeweils abzählbar ist, und wenn wir ferner berücksichtigen, daß auch im vorigen Absatz (vgl. S. 28 unten) kein Gebrauch von den besonderen Eigenschaften der Zahlen (d. h. der *Elemente* der betrachteten Mengen) gemacht worden ist, so können wir dem vorigen Absatz folgende auf den ersten Blick merkwürdige Tatsache entnehmen: auch bei Hinzufügung *unendlichvieler* Elemente zu den Elementen einer abzählbaren

Menge M kann diese unter Umständen noch abzählbar bleiben; dann nämlich, wenn die hinzugefügten Elemente ihrerseits die Elemente einer abzählbaren Menge N darstellen. (Im vorigen Absatz war M etwa die Menge der positiven, N die der negativen ganzen Zahlen.) In die vergrößerte Menge können nun wiederum die Elemente einer abzählbaren Menge aufgenommen werden, ohne daß der Charakter der Abzählbarkeit beeinträchtigt würde, und dieser Vermehrungsprozeß läßt sich *beliebig* fortsetzen (d. h. k-mal, wo k eine beliebige, wenn auch noch so große natürliche Zahl bedeutet)[1]. Wir erhalten somit das Resultat, das gegenüber dem von der Verminderung einer abzählbaren Menge handelnden Satz 1 auch für ihre Vermehrung eine entsprechende Tatsache feststellt:

Satz 2. *Werden zu den Elementen einer abzählbaren Menge weitere endlichviele oder abzählbar unendlichviele Elemente hinzugefügt, so entsteht wiederum eine abzählbare Menge. Ebenso ergibt sich durch Vereinigung der Elemente endlichvieler Mengen, von denen jede endlich oder abzählbar, und zwar mindestens eine abzählbar ist, stets eine abzählbare Menge.*

3. Die Menge der rationalen Zahlen. Wir wollen jetzt ein von den bisher behandelten Mengen wesentlich verschiedenes Beispiel einer abzählbaren Menge betrachten. Bekanntlich liegen zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen (z. B. zwischen den Zahlen 1 und 2) unendlichviele gemeine Brüche oder, wie man dafür zu sagen pflegt, rationale Zahlen; wir schreiben eine rationale Zahl in der „gekürzten" Form $\frac{m}{n}$, wobei wir unter n stets eine natürliche (also *positive* ganze) Zahl und unter m eine zu n teilerfremde positive oder negative ganze Zahl verstehen wollen[2]. (Weisen m und n zunächst einen gemeinsamen Teiler auf, wie z. B. in den Brüchen $\frac{6}{3}$ oder $-\frac{10}{4}$, so kann man diesen Mangel durch „Kürzen", d. h. Wegdividieren des größten gemeinsamen Teilers von Zähler und Nenner beseitigen; so wird man 2 oder ausgeschrieben $\frac{2}{1}$ für $\frac{6}{3}$, $\frac{-5}{2}$ oder in üblicherer Schreibweise $-\frac{5}{2}$ für $\frac{-10}{4}$ einsetzen.) Wie man sich leicht überzeugt, liegen sogar zwischen irgend zwei verschiedenen *rationalen* Zahlen, mögen diese sich auch noch so wenig voneinander unterscheiden, immer noch unendlichviele verschiedene andere rationale Zahlen. Denn mag die Differenz zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m_1}{n_1}$

[1] Vgl. hierzu die Fußnote von S. 7.

[2] Ist im besonderen $n = 1$, so stellt $\frac{m}{1}$ die ganze Zahl m dar; auch $0 = \frac{0}{1}$ wird als rationale Zahl betrachtet. — Teilerfremd nennt man zwei ganze Zahlen m und n, wenn es außer 1 keine natürliche Zahl t („gemeinsamen Teiler") gibt, die in beiden Zahlen m und n gleichzeitig enthalten wäre.

noch so klein sein, man kann sie immer noch in beliebig viele, z. B. eine Million, gleiche Teile teilen, dann den Unterschied zwischen je zwei so entstandenen Zwischenzahlen wieder in beliebig viele gleiche Teile spalten und in dieser Weise endlos fortfahren; man erhält so unendlichviele zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m_1}{n_1}$ gelegene Zahlen, die offenbar sämtlich rational sind.

Wir betrachten nun die Menge aller denkbaren positiven und negativen rationalen Zahlen (einschließlich Null). Diese Menge ist nach dem Gesagten unendlich mal viel umfassender als die Menge der ganzen Zahlen, da zwischen je zwei Elementen der letztgenannten (in ersterer ganz enthaltenen) Menge immer noch unendlichviele rationale Zahlen liegen. Dennoch *ist auch die Menge aller rationalen Zahlen abzählbar,* wie man z. B. folgendermaßen einsehen kann: Wir denken uns auf einem Papierblatt, das man sich grenzenlos ausgedehnt vorstellen möge, ein unendliches System von Horizontalzeilen (kurz: Zeilen), in gleichen Abständen verlaufend, und senkrecht dazu ein ebensolches System von Vertikalzeilen (kurz: Kolonnen) (vgl. Abb. 3). Die Zeilen und Kolonnen sollen numeriert werden, und zwar je eine beliebige mit 0, die darauf nach oben bzw. rechts folgenden mit 1, 2, 3 usw., die der Zeile 0 nach unten bzw. der Kolonne 0 nach links sich anschließenden mit —1, —2, —3 usw. Jeder der Schnittpunkte einer Zeile und einer Kolonne, die man als die „Gitterpunkte" des Systems zu bezeichnen pflegt, ist dann völlig bestimmt durch Angabe der Nummer m der zugehörigen Zeile und der Nummer n der zugehörigen Kolonne; wir wollen den Punkt symbolisch durch das Zeichen $\binom{m}{n}$ ausdrücken.

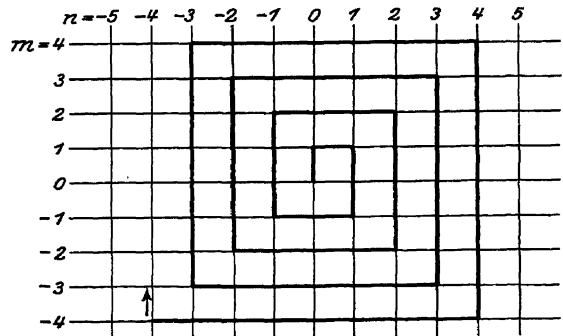



Abb. 3.

Dann ist es zunächst leicht, *die Gesamtheit aller Gitterpunkte abzuzählen*; man verfolge zu diesem Zweck den in der Abbildung angedeuteten Weg, der von $\binom{0}{0}$ über $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{0}{1}$ usw. verläuft und sich spiralförmig nach außen windet, und lasse die Gitterpunkte in der Reihenfolge aufeinanderfolgen, wie man sie bei Verfolgung dieses Weges erreicht. (Hiermit hat man, in der Sprache der Arithmetik ausgedrückt, eine Doppelfolge von Punkten zu einer einfachen Folge umgeordnet.) Man lasse schließlich aus der erhaltenen abgezählten Menge der Gitterpunkte all die Punkte $\binom{m}{n}$ fort, für die $\frac{m}{n}$ nicht gekürzt ist, also nicht die oben (S. 30) verlangten Eigenschaften (n positiv, m und n teilerfremd) be-

sitzt[1]; es bleiben unendlichviele Gitterpunkte (sämtlich auf der rechten Hälfte der Abbildung) übrig und jeder von ihnen wird im Einklang mit Satz 1 auch jetzt wieder längs unseres Weges eine gewisse — gegen vorher niedriger gewordene — Platznummer aufweisen. Die übriggebliebenen Gitterpunkte stimmen aber (bis auf die Klammern) in der Bezeichnung ersichtlich genau mit *sämtlichen* rationalen Zahlen überein. Die Abzählbarkeit der Menge der übriggebliebenen Gitterpunkte erweist also die nämliche Eigenschaft für die Menge aller rationalen Zahlen; man kann eine Abzählung dieser Menge an Hand des Weges in Abb. 3 sofort angeben. Sie beginnt mit

$$\frac{1}{1},\ \frac{0}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \ldots$$

und ordnet also die rationalen Zahlen in eine ganz und gar andere Reihenfolge als deren übliche Anordnung der Größe nach, wie diese auf der Zahlengeraden (S. 10f.) im Sinne von links nach rechts anschaulich hervortritt. Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... und sämtlichen rationalen Zahlen ist damit hergestellt.

Um zu zeigen, daß eine Abzählung der Menge aller rationalen Zahlen auch auf rein arithmetischem Weg, unter Ausschaltung jedes anschaulichen Hilfsmittels, durchgeführt werden kann, werde noch folgendes Verfahren angegeben, das eine etwas andere Form der Abzählung liefert: $\frac{m}{n}$ sei eine beliebige *positive* rationale Zahl; es sei also nicht nur n, sondern auch m positiv. Die Summe $m + n$ der ganzen positiven Zahlen m und n werde mit s bezeichnet: $s = m + n$. Ist umgekehrt die ganze positive Zahl s an Stelle von $\frac{m}{n}$ gegeben, so gibt es außer $\frac{m}{n}$ natürlich noch andere positive rationale Zahlen $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ usw. von der Eigenschaft, daß die Summe aus Zähler und Nenner für sie gerade s beträgt; dabei sollen wie stets nur solche Zahlen $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ usw. in Betracht kommen, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind. Bei festgegebenem Werte s wollen wir diese rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ usw., um eine bestimmte Reihenfolge unter ihnen zu haben, etwa so ordnen, daß zuerst die Zahl mit dem größten Zähler, dann Zahlen mit allmählich abnehmenden Zählern und dementsprechend zunehmenden Nennern, am Schluß die Zahl mit dem kleinsten Zähler und dem größten Nenner zu stehen kommt. Ist z. B. $s = 7$ gegeben, so sind alle rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, $\frac{m_1}{n_1}$ usw.

---

[1] Von den Punkten $\left(\frac{m}{n}\right)$, für die m oder n gleich 0 ist, soll nur der Punkt $\left(\frac{0}{1}\right)$ stehenbleiben. Einen anschaulichen Überblick über die Gesamtheit der stehenbleibenden und der fortgelassenen Punkte auf der rechten Hälfte der Abbildung verschafft man sich so: man denke sich im Punkt $\left(\frac{0}{0}\right)$ eine punktförmige Lichtquelle aufgestellt, in jedem anderen Gitterpunkt ein schmales Stäbchen; dann sind die fortgelassenen Punkte die Standorte derjenigen Stäbchen, die im Schatten anderer Stäbchen stehen.

der gewünschten Art in der angegebenen Reihenfolge die folgenden:

$$\tfrac{6}{1},\quad \tfrac{5}{2},\quad \tfrac{4}{3},\quad \tfrac{3}{4},\quad \tfrac{2}{5},\quad \tfrac{1}{6}.$$

Ist $s = 8$, so erhält man die nachstehende Folge:

$$\tfrac{7}{1},\quad \tfrac{5}{3},\quad \tfrac{3}{5},\quad \tfrac{1}{7};$$

denn $\tfrac{6}{2}$, $\tfrac{4}{4}$ und $\tfrac{2}{6}$ fallen weg, weil hier Zähler und Nenner nicht teilerfremd sind. Man erkennt, daß zu jedem Werte s, wie groß er auch immer sei, stets nur *endlichviele* rationale Zahlen $\frac{m}{n}$, $\frac{m_1}{n_1}$ usw. von der gewünschten Art gehören; denn es gibt ja nur endlichviele Paare von natürlichen Zahlen, deren Summe gleich der festen natürlichen Zahl s ist.

Wir ordnen nun die Gesamtheit aller rationalen Zahlen, unter denen auch die ganzen Zahlen (Nenner $n = 1$) vorkommen, in folgender Weise an: Zuerst kommt die Zahl $0 = \frac{0}{1}$, für die $s = 0 + 1 = 1$ ist. Dann folgen zunächst die endlichvielen positiven rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, für die $s = m + n$ den Wert 2 hat, darauf diejenigen, für die $s = 3$ ist, alsdann die mit $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$ und so endlos weiter. Innerhalb jedes Systems von rationalen Zahlen, für die s den nämlichen Wert hat, führen wir die oben erläuterte Anordnung nach abnehmenden Zählerwerten ein. Dabei schieben wir aber jetzt (wie oben S. 29) auch noch alle negativen rationalen Zahlen in der Weise ein, daß jeder positiven Zahl $\frac{m}{n}$ die mit dem Vorzeichen „minus" versehene negative Zahl $-\frac{m}{n}$ unmittelbar folgt. Wir erhalten demnach eine endlose Folge rationaler Zahlen, die so beginnt:

$$\tfrac{0}{1};\ \tfrac{1}{1},\ -\tfrac{1}{1};\ \tfrac{2}{1},\ -\tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{1},\ -\tfrac{3}{1},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{3};$$
$$\tfrac{4}{1},\ -\tfrac{4}{1},\ \tfrac{3}{2},\ -\tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ -\tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{4};\ \tfrac{5}{1},\ -\tfrac{5}{1},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{5};$$
$$\tfrac{6}{1},\ -\tfrac{6}{1},\ \tfrac{5}{2},\ -\tfrac{5}{2},\ \tfrac{4}{3},\ -\tfrac{4}{3},\ \tfrac{3}{4},\ -\tfrac{3}{4},\ \tfrac{2}{5},\ -\tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{6},\ -\tfrac{1}{6};$$
$$\tfrac{7}{1},\ -\tfrac{7}{1},\ \tfrac{5}{3},\ -\tfrac{5}{3},\ \ldots$$

In dieser Folge, die eine erste, zweite, dritte Zahl usw. enthält, sind nun *alle* überhaupt existierenden rationalen Zahlen enthalten und jede hat in ihr einen bestimmten, angebbaren Platz. Ist nämlich $\frac{p}{q}$ eine positive Zahl, so bilde man $p + q = t$; dann kommen in unserer Folge sicher nur endlichviele rationale Zahlen $\frac{m}{n}$ vor, für die $m + n = s$ kleiner ist als t und die daher unserer Zahl $\frac{p}{q}$ vorangehen; da auch nur endlichviele rationale Zahlen vorhanden sind, für die die Summe aus Zähler und Nenner gerade t beträgt, so gelangt man in unserer Folge nach einer bestimmten, endlichen Anzahl von Schritten zu der Zahl $\frac{p}{q}$. Sollte $-\frac{p}{q}$ eine negative rationale Zahl sein, so findet man sie eine Stelle weiter, nämlich unmittelbar nach der entsprechenden positiven Zahl. Wir haben durch unsere Anordnung also die Menge aller rationalen Zahlen abgezählt und sie damit auf die Menge der natürlichen Zahlen abgebildet.

Eine andere Abzählung der rationalen Zahlen, die es gestattet, verhältnismäßig leicht zu einer gegebenen Platznummer die zugehörige rationale Zahl zu bestimmen und umgekehrt, hat Faber [1] angegeben.

Mittels der in Beispiel 6 von § 2 vorgeführten Zahlengeraden (S. 10f.; vgl. auch die dortige Abb. 2) können wir aus der Menge aller rationalen

Zahlen sofort ein interessantes geometrisches Beispiel einer abzählbaren Menge gewinnen. Fassen wir nämlich jetzt, da wir im Besitz des Begriffs der umkehrbar eindeutigen Zuordnung und desjenigen der Äquivalenz sind, nochmals jenes Beispiel ins Auge, so bemerken wir, daß die Zahlengerade eine Abbildung zwischen Mengen von Zahlen und Mengen von Punkten liefert. Man greife auf der Zahlengeraden eine beliebige Menge von Punkten heraus (es muß nicht gerade die durch *sämtliche* Punkte der Geraden gebildete Menge sein); dann ist diese Punktmenge von selbst (nämlich durch die für die Punkte verwendete Bezeichnung) auf diejenige Zahlenmenge abgebildet, welche all die reellen Zahlen enthält, die die Punkte der betreffenden Punktmenge auf der Zahlengeraden bezeichnen. Jede solche Punktmenge ist demnach der ihr entsprechenden Zahlenmenge äquivalent.

Wir betrachten nun *die Menge, die all die Punkte der Zahlengeraden enthält, welche durch rationale Zahlen bezeichnet werden.* Man nennt diese Punkte kurz die *rationalen Punkte.* Um uns ein Bild von dieser Menge zu machen, bedenken wir, daß (vgl. S. 30) zwischen je zwei ganzen Zahlen und sogar zwischen je zwei beliebigen rationalen Zahlen immer noch unendlichviele verschiedene rationale Zahlen liegen; auf die Zahlengerade angewandt, besagt dies: zwischen je zwei noch so nahe beieinander gelegenen rationalen Punkten der Geraden liegen immer noch unendlichviele rationale Punkte. Unsere Menge von Punkten erfüllt also die Gerade überall unendlich dicht, sie ist, wie man sagt, eine „dichte Menge“ (vgl. auch S. 144). Fast könnte es scheinen, als werde die ganze gerade Linie nur eben von den Punkten unserer Menge ausgefüllt; diese Vermutung wird sich jedoch bald als im höchsten Grade trügerisch erweisen.

Vergleicht man mit der so betrachteten Punktmenge die nur aus den Punkten 1, 2, 3, ... der Zahlengeraden bestehende Punktmenge, die offenbar der Menge aller natürlichen Zahlen entspricht, so müssen diese beiden Punktmengen einander äquivalent sein, weil die beiden ihnen bezüglich äquivalenten Zahlenmengen, nämlich die Menge aller rationalen Zahlen und die Menge aller natürlichen Zahlen, sich als äquivalent erwiesen haben. Wie ungleich diese beiden äquivalenten Punktmengen sind, wieviel umfassender nämlich die erste ist als die zweite, lehrt aber schon die flüchtigste Anschauung; und die zunächst vielleicht naheliegende Meinung, zwei Mengen müßten „gleichgroß“ oder wenigstens „ungefähr gleichgroß“ sein, um sich als äquivalent zu erweisen, ist hiernach für unendliche Mengen als durchaus unzutreffend erkannt, während sie für endliche Mengen in der Tat, und zwar im schärferen Sinne, zutrifft (vgl. S. 22).

Übrigens ist nicht nur die Menge, die alle rationalen Zahlen in ihrer Gesamtheit enthält, abzählbar, sondern das nämliche gilt nach Satz 1 auch von jeder unendlichen Teilmenge dieser Menge, d. h. von

jeder Menge, die unendlichviele Elemente enthält und deren Elemente ausschließlich rationale Zahlen sind. Daher ist auch jede Menge von unendlichvielen rationalen Punkten der Zahlengeraden abzählbar, z. B. die Menge aller zwischen den Punkten 0 und 1 gelegenen rationalen Punkte.

Der Leser, der während der bisherigen Überlegungen sich etwas Übung angeeignet hat, wird nun auch die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen in allgemeinem Sinn zu deuten wissen. Abb. 3 (S. 31, vgl. die dortige Erklärung) läßt sich ja auffassen als eine Zusammenstellung *abzählbar unendlichvieler abzählbarer Mengen*, z. B. aller der Mengen, die jeweils die Gitterpunkte der nämlichen Zeile enthalten. Bedenkt man wieder wie auf S. 28, daß bei der Betrachtung die besonderen Eigenschaften der rationalen Zahlen nicht benutzt worden sind, so ergibt sich (in Erweiterung des Satzes 2) der Satz:

Satz 3. *Durch Vereinigung der Elemente abzählbar unendlichvieler Mengen, von denen jede abzählbar ist, entsteht wiederum eine abzählbare Menge.*

Der aufmerksame Leser wird nun vielleicht schon an dieser Stelle etwas gelangweilt oder mindestens enttäuscht sich fragen: Ist denn, bei allen interessanten Kunstgriffen im einzelnen, dies alles nicht letzten Endes trivial? Liegt denn die Sache nicht so, daß, wie beim gewöhnlichen rohen Begriff des Unendlichgroßen, ebenso auch bei den *unendlichen Mengen* sich alle Größenunterschiede verwischen, daß also bei Aufwendung genügenden Scharfsinns alle unendlichen Mengen aufeinander abgebildet werden können und somit der Satz gilt: *Alle* unendlichen Mengen sind untereinander äquivalent? Träfe dieser Satz zu, so wären der Begriff der Äquivalenz und die bisherigen Betrachtungen über unendliche Mengen ohne wesentliche Bedeutung; es würde sich mit den unendlichen Mengen ähnlich verhalten wie mit dem naiven Begriff des Unendlichen, dem man Eigenschaften beizulegen pflegt wie die folgenden: ,,Unendlich plus Unendlich = Unendlich", ,,Unendlich plus jeder endlichen Größe = Unendlich" usw., der aber eine scharfe Umgrenzung nicht zuläßt. Die Zurückweisung dieser berechtigten Frage werde dem Beginn des nächsten Paragraphen vorbehalten. Vorher soll hier noch ein letztes Beispiel einer abzählbaren Menge gegeben werden, das die eben gestellte Frage als noch näherliegend, aber dafür auch den im nächsten Paragraphen dargestellten ersten großen Triumph der Mengenlehre als um so bedeutungsvoller und dramatischer erscheinen läßt.

4. Die Menge der algebraischen Zahlen. Dem jetzt zu besprechenden Beispiel einer abzählbaren Menge sei eine Bemerkung vorangeschickt. Wie auf S. 11f. definiert, verstehen wir unter einer (reellen)

algebraischen Zahl jede reelle[1] Wurzel einer algebraischen Gleichung

(1) $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

wo der Grad n eine gegebene natürliche Zahl und $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ beliebig gegebene ganze Zahlen bedeuten. (Von diesen kann übrigens die erste a_n als von Null verschieden angenommen werden; sonst könnte man nämlich das Glied $a_n x^n$ fortlassen, so daß es sich um eine Gleichung von niedrigerem als dem n^{ten} Grad handeln würde.) Jede reelle Zahl also, durch deren Eintreten an Stelle der unbekannten Größe x die linke Seite der obigen Gleichung gleich Null wird, ist eine algebraische Zahl. Hiernach ist zunächst jede ganze Zahl und allgemeiner jede rationale Zahl algebraisch; denn die Zahl $\frac{p}{q}$ ist ja ersichtlich eine Wurzel der Gleichung $qx - p = 0$. Die rationalen Zahlen stellen aber offenbar nur einen kleinen Teil der Gesamtheit aller algebraischen Zahlen dar, da sie, wie wir eben sahen, schon mit den Wurzeln der Gleichungen *ersten* Grades ($n = 1$) zusammenfallen; in der Tat sind die reellen Wurzeln einer Gleichung von höherem als dem ersten Grad (also für $n = 2, 3, 4, \ldots$) im allgemeinen keine rationalen Zahlen, sondern „irrational" (so z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ usw.). Es möge hier noch ohne Beweis an den schon auf S. 11 erwähnten bekannten Satz aus den Elementen der Algebra[2] erinnert werden, wonach eine algebraische Gleichung niemals mehr verschiedene Wurzeln hat, als ihr Grad angibt; die Gleichung (1) besitzt also höchstens n Wurzeln.

Wir betrachten nun die *Menge aller algebraischen Zahlen* und wollen den Nachweis führen, daß auch diese Menge abzählbar ist. Zu diesem Zweck ordnen wir zunächst alle denkbaren algebraischen *Gleichungen* in bestimmter Reihenfolge an. Ist nämlich eine beliebige algebraische Gleichung n^{ten} Grades wieder in der Form (1) gegeben:

(1) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

[1] Wir haben in diesem Buch niemals Anlaß, uns mit imaginären oder komplexen Zahlen zu befassen, und werden daher von der hervorhebenden Bezeichnung „reell" in der Regel absehen.

[2] Vgl. z. B. Weber-Epstein [1], S. 368. Für den geübteren Leser sei der Beweis ganz kurz dargestellt: Bezeichnet man das Polynom auf der linken Seite von (1) mit $f(x)$ und ist r_1 eine reelle Wurzel von (1), so ergibt die Division von $f(x)$ durch $x - r_1$:

$$f(x) = (x - r_1)\cdot f_1(x) + s_1,$$

wo die Zahl s_1 gleich 0 sein muß, wie die Prüfung für $x = r_1$ ergibt; durch entsprechende Wiederholung findet man die Zerlegung:

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_k) f_k(x),$$

wo $k \leqq n$ ist und $f_k(x)$ ein Polynom ohne reelle Nullstellen (eventuell eine Konstante) bedeutet. Dann gibt es keine weitere, von $r_1, \ldots, r_k$ verschiedene Wurzel der vorgelegten Gleichung; denn für jeden weiteren Wert $x = r_{k+1}$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der letzten Beziehung von 0 verschieden, also auch das ganze Produkt $f(x)$.

wobei a_n von Null verschieden ist, und bezeichnen wir, wie üblich, mit $|a|$ den sogenannten *absoluten Betrag* der reellen Zahl a, d. h. die *positive* Zahl, die gleich a oder gleich $-a$ ist[1], so wird die ganze Zahl

$$h = (n-1) + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0| \tag{2}$$

die *Höhe* der Gleichung (1) genannt. Demnach gehört zu jeder algebraischen Gleichung eine einzige natürliche Zahl h als ihre Höhe; z. B. hat die Gleichung $2x^2 - 3x + 1 = 0$ die Höhe $1 + 2 + 3 + 1 = 7$, die Gleichung $x^3 = 0$ (oder ausführlicher geschrieben: $x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$) die Höhe $2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3$. Umgekehrt gibt es aber, wie leicht einzusehen ist, zu einer gegebenen natürlichen Zahl h zwar mehrere, aber stets nur *endlichviele* algebraische Gleichungen, die gerade die Höhe h besitzen.

Denn zunächst kann der Grad n einer Gleichung von der Höhe h sicher selbst nicht größer sein als die Zahl h, wie aus der obigen Beziehung (2) hervorgeht; die Anzahl der $n + 2$ Zahlen $n - 1$, $a_n, \dots, a_1, a_0$ ist also nicht größer als $h + 2$. Ferner läßt sich die Zahl h nur auf endlichviele verschiedene Arten als Summe von höchstens $h + 2$ positiven ganzen Zahlen (die Null einbegriffen) darstellen, d. h. es gibt nur endlichviele Systeme von höchstens $h + 2$ nichtnegativen ganzen Zahlen:

$$n-1,\ A_n,\ A_{n-1},\ \dots,\ A_1,\ A_0,$$

die zueinander addiert gerade die Zahl h ausmachen und von denen überdies noch A_n als von Null verschieden vorausgesetzt werden kann und soll. Schließlich gibt es drittens zu jedem solchen System

$$n-1,\ A_n,\ A_{n-1},\ \dots,\ A_1,\ A_0$$

wieder nur endlichviele Gleichungen vom Grade n, bei denen in der Schreibweise (1) die Zahlen $a_n = \pm A_n$, $a_{n-1} = \pm A_{n-1}, \dots, a_1 = \pm A_1$, $a_0 = \pm A_0$ (d. h. also die nach Belieben mit positivem oder negativem Vorzeichen versehenen Zahlen $A_n, \dots, A_0$) nacheinander auftreten.

Dieser etwas abstrakte Nachweis der Tatsache, daß zu einer bestimmten natürlichen Zahl h stets nur endlichviele algebraische Gleichungen mit der Höhe h gehören, wird sogleich verständlicher bei seiner Durchführung an einem konkreten Beispiel, etwa dem Falle $h = 3$. Hier kommen zunächst nur Gleichungen ersten, zweiten und dritten Grades in Betracht; denn schon für $n = 4$ ist die Beziehung (2), die dann die Form $3 = 3 + |a_4| + \dots + |a_1| + |a_0|$ annimmt, nicht mehr erfüllbar, wenn a_4, wie vorausgesetzt, von Null verschieden sein soll. Es ergibt sich also im Falle $h = 3$ für (2) die folgende Form:

$$3 = (n-1) + |a_n| + \dots + |a_1| + |a_0|,$$

wobei für n nur die Werte 3, 2 oder 1, für $n - 1$ also nur die Werte 2, 1 oder 0 in Betracht kommen und wobei überdies $|a_n|$ von Null verschieden ist. Diese Beziehung aber läßt sich, wie man durch Probieren leicht einsieht, nur auf folgende sieben Arten erfüllen:

$$\begin{aligned} 3 &= 2 + 1 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1 + 2 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 0 + 3 + 0 = 0 + 2 + 1 = 0 + 1 + 2. \end{aligned}$$

Jeder einzelnen dieser sieben Beziehungen entsprechen nun genau so viele Gleichungen der Form (1), wie die Anzahl aller möglichen Verteilungen von Plus-

[1] Es ist also z. B. $|5| = 5$, $|-4| = 4$; ferner sei $|0| = 0$.

und Minuszeichen in der betreffenden Beziehung beträgt (wobei nur von dem niemals negativen ersten Summanden $n - 1$ abzusehen ist); z. B. läßt sich die erste der sieben Beziehungen bei Hinzufügung von Vorzeichen auf folgende zwei Arten schreiben:

$$3 = 2 + |1| + |0| + |0| + |0| = 2 + |-1| + |0| + |0| + |0|,$$

die dritte dagegen auf folgende vier Arten:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + |1| + |1| + |0| = 1 + |1| + |-1| + |0| \\ &= 1 + |-1| + |1| + |0| = 1 + |-1| + |-1| + |0|. \end{aligned}$$

Den hier angeschriebenen zwei bzw. vier Beziehungen entsprechen dann die folgenden zwei bzw. vier algebraischen Gleichungen von der Höhe 3:

$$x^3 = 0, \qquad -x^3 = 0$$

bzw.

$$x^2 + x = 0, \qquad x^2 - x = 0, \qquad -x^2 + x = 0, \qquad -x^2 - x = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß man aus den vorher angeschriebenen sieben Beziehungen im ganzen 22 solche Gleichungen erhält, und das sind *sämtliche* Gleichungen von der Höhe 3.

Wir haben so erkannt, daß es zu jeder Höhe h stets nur *endlichviele* Gleichungen gibt, die diese Höhe besitzen, und können darauf gestützt die Gesamtheit aller algebraischen Gleichungen abzählen. In der gewünschten Abzählung sollen zuerst die Gleichungen von der Höhe 1 auftreten, dann die Gleichungen von der Höhe 2, darauf die von der Höhe 3 usw. Unter den endlichvielen Gleichungen, welche jeweils die nämliche Höhe besitzen, kann eine beliebige Reihenfolge vorgeschrieben werden; z. B. könnte man diese Gleichungen zunächst nach ihrem Grad ordnen, diejenigen gleichen Grades n aber nach der Größe der in ihnen vorkommenden Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots$ in dieser Reihenfolge. Auf diese Weise erhält man eine vollständige Anordnung aller algebraischen Gleichungen als erste, zweite, dritte und so endlos weiter. Ist eine beliebige Gleichung gegeben, so kann zwar im allgemeinen nur recht umständlich, aber doch mit Sicherheit, nämlich durch ein endliches Verfahren bestimmt werden, die wievielte Gleichung in unserer Anordnung vorliegt; man kann z. B. die Höhe der gegebenen Gleichung bestimmen, dann auf dem oben skizzierten Weg die Liste sämtlicher (endlichvielen) Gleichungen bis zu denen der fraglichen Höhe einschließlich aufstellen und endlich abzählen, wie viele Gleichungen in dieser Liste *vor* der gegebenen Gleichung auftreten.

Hiermit ist aber der gesuchte Beweis der Tatsache, daß die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist, nahezu vollendet. Wir denken uns nämlich die Wurzeln aller Gleichungen unserer Abzählung angeschrieben, und zwar zuerst die Wurzeln der ersten Gleichung, dann die der zweiten, darauf die der dritten usw. Eine bestimmte Gleichung besitzt stets nur *endlichviele* Wurzeln (vgl. S. 36); diese können wir jeweils ihrer Größe nach ordnen. Bei der sich so ergebenden Folge algebraischer Zahlen kann und wird es vorkommen, daß die nämliche

Zahl zu wiederholten Malen auftritt; z. B. kommt die Zahl 2 als Wurzel der Gleichung $x - 2 = 0$, also unter den Wurzeln der Gleichungen von der Höhe 3 vor, aber auch als Wurzel der Gleichung $x^2 - 4 = 0$, d. h. unter den Wurzeln der Gleichungen von der Höhe 6. Um eine Wiederholung der nämlichen Zahl zu verhindern, soll daher festgesetzt werden, daß jede Zahl nur *einmal*, nämlich bei ihrem ersten Auftreten, in unserer Anordnung stehenbleiben, bei jeder Wiederholung aber gestrichen werden soll. Wir erhalten so eine Folge algebraischer Zahlen, in der es eine erste, eine zweite, eine dritte und so endlos weiter gibt und in der keine Zahl zweimal vorkommt. Wie oben bei der Abzählung der Menge der rationalen Zahlen (S. 31 ff.) wird freilich auch hier die natürliche „Rangordnung" der algebraischen Zahlen, nämlich die Ordnung der Größe nach (oder, auf die Zahlengerade bezogen, von links nach rechts), durch das geschilderte Abzählungsverfahren gründlich zerstört. Z. B. kommen dabei die Zahlen $-\frac{1}{8}$ (Wurzel der Gleichung $8x + 1 = 0$) und $\sqrt{7} = 2{,}645\ldots$ (Wurzel der Gleichung $x^2 - 7 = 0$) nahe beieinander unter den Wurzeln der Gleichungen von der Höhe 9 vor, während die von $-\frac{1}{8}$ nur sehr wenig verschiedene Zahl $-\frac{1001}{8000}$ sehr weit davon entfernt auftritt, nämlich als Wurzel von $8000x + 1001 = 0$ bei den Gleichungen der Höhe 9001!

In der so erhaltenen Folge algebraischer Zahlen kommt schließlich auch *jede* algebraische Zahl wirklich an bestimmter Stelle vor. Denn ist eine beliebige algebraische Zahl, d. h. eine bestimmte reelle Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung gegeben, so kann man zunächst die Höhe dieser Gleichung bestimmen und so feststellen, den wievielten Platz in unserer Anordnung aller Gleichungen jene Gleichung besitzt; darauf kann man sich die Folge der algebraischen Zahlen bis zu den Wurzeln der fraglichen Gleichung einschließlich angeschrieben denken und schließlich abzählen, die wievielte Zahl in dieser Folge die gegebene Zahl ist. Es ist also wirklich die Menge *aller* algebraischen Zahlen, die wir auf diese Weise abzählen, d. h. auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden. Wir haben somit (und zwar nach der ursprünglichen Methode CANTORS) den Satz bewiesen:

Die Menge aller (reellen) algebraischen Zahlen ist abzählbar,

der die früheste veröffentlichte mengentheoretische Entdeckung CANTORS darstellt ([5], § 1)[1].

Eine anschaulichere Vorstellung von dem Sinne dieses Satzes erhalten wir, wenn wir uns an die geometrische Deutung des Satzes von

[1] Vielleicht ist es nicht überflüssig zu bemerken, daß der Beweis — ebenso wie der für die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen — auf vielen ähnlichen und gleichwertigen Wegen erbracht werden kann. Bei der Einführung der *Höhe* einer algebraischen Gleichung kommt es nicht etwa auf den Wert gerade dieser Zahl an, sondern nur auf ein Prinzip, das die Abzählung der zunächst (z. B. in der Algebra) in ganz anderer Klassifizierung sich darbietenden Gleichungen gestattet.

der Abzählbarkeit der Menge aller rationalen Zahlen (S. 34) erinnern. Wir sprachen damals von der überall dichten Erfüllung der Zahlengeraden mit rationalen Punkten. Es gibt aber (vgl. S. 12 und 36) auch Punkte auf der Zahlengeraden, die sich nicht durch rationale, sondern durch sogenannte irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi = 3{,}14159\ldots$ usw. bezeichnen lassen. Nun sind z. B. $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{5}$ algebraische Zahlen, nämlich Wurzeln der Gleichungen $x^2 - 2 = 0$ und $x^3 - 5 = 0$. Ebenso wie die Punkte $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{5}$ der Zahlengeraden gibt es unendlichviele weitere Punkte, die zwar nicht durch rationale Zahlen, wohl aber durch algebraische Zahlen bezeichnet werden; diese neuen Punkte bilden sogar gewissermaßen „die Regel", da sie den Wurzeln der Gleichungen vom zweiten und von jedem höheren Grad entsprechen, während die rationalen Punkte lediglich durch die linearen Gleichungen geliefert werden. Der bewiesene Satz besagt aber, daß *die Menge aller derjenigen Punkte der Zahlengeraden, die durch algebraische Zahlen bezeichnet werden, auch noch abzählbar ist.* Diese Punktmenge muß offenbar, wenn es mehr anschaulich als scharf ausgedrückt werden darf, die Gerade noch unvergleichlich viel dichter erfüllen, als dies von der Menge der rationalen Punkte gilt; und noch weit näher als bei der letzteren Menge liegt nunmehr der Gedanke, daß die jetzt betrachtete Punktmenge unsere Zahlengerade lückenlos erfülle, d. h. daß sie identisch sei mit der Gesamtheit *aller* Punkte auf der Geraden. Dies würde dann besagen, daß die Menge aller auf einer geraden Linie gelegenen Punkte abzählbar wäre, wie dies CANTOR in der Tat bei seiner ersten Beschäftigung mit diesem Gegenstand vermutet und zu beweisen versucht hat (CANTOR-STÄCKEL [1]).

Dem Nachweis, daß dies *nicht* der Fall ist, daß sich vielmehr schon die Menge aller Punkte einer beliebig kleinen endlichen Strecke nicht mehr abzählen läßt, soll der erste Teil des nächsten Paragraphen gewidmet sein.

5. Anwendungen auf beliebige unendliche Mengen. Zum Schlusse dieses Paragraphen sollen noch einige allgemeine Sätze bewiesen werden, die einen grundsätzlich anderen Charakter tragen als die vorangehenden Überlegungen. Bisher haben wir hier, sowohl bei den behandelten speziellen Mengen wie bei den allgemeinen Sätzen 1 bis 3, ausschließlich *abzählbare* Mengen in Betracht gezogen; nunmehr soll von *beliebigen unendlichen* Mengen die Rede sein, für die wir mittels der bisher entwickelten Methoden gleichfalls schon gewisse Tatsachen nachweisen können, die sich gar nicht von selbst verstehen. Das Sprungbrett, das uns den Übergang von den abzählbaren zu beliebigen Mengen ermöglicht, wird dargestellt durch den folgenden grundlegenden und später noch öfters benutzten Satz, welcher eine allgemeine Beziehung zwischen den Mengen der einen und der anderen Art darstellt:

Satz 4. *Jede unendliche Menge M besitzt abzählbare Teilmengen.*

Den Beweis kann man, wenn „unendliche Menge" im naiven Sinn (= nicht-endlich) verstanden wird, einfach so führen (vgl. S. 26): Wir greifen aus M zunächst ein beliebiges Element m_1 heraus, aus der dann noch übrigen Menge ein beliebiges weiteres Element m_2, weiter aus der um diese zwei Elemente verkleinerten Menge irgendein drittes Element m_3 usw. Dieses Verfahren denken wir uns *endlos* fortgesetzt; das ist deshalb möglich, weil M voraussetzungsgemäß nicht endlich ist, weil wir also auf diese Weise niemals die Menge M erschöpfen können. Vereinigen wir dann sämtliche durch jenes unbegrenzte Verfahren herausgegriffen gedachten Elemente, die lauter natürliche Zahlen als Indizes erhalten, zu einer Menge $M_1 = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$, so ist die abzählbare Menge M_1 eine (möglicherweise mit M zusammenfallende) Teilmenge von M, da jedes Element von M_1 schon in M vorkommt; in der Tat gehört also zu jeder unendlichen Menge eine abzählbare Teilmenge (und daher natürlich mehrere solche).

Der Beweis läßt sich übrigens auch so wenden, daß er der Auffassung der „unendlichen Menge" im DEDEKINDschen Sinn (vgl. S. 24) gerecht wird. Für den Fall, daß der vorstehende Beweis beim Leser ein mehr oder weniger ausgeprägtes Unbehagen erregt haben sollte, sei schon hier bemerkt, daß wir gegen Ende des Buches (S. 298) auf das angewandte Verfahren in grundsätzlicher Hinsicht nochmals zurückkommen.

Beispiel: Bedeutet M die Menge der natürlichen Zahlen, so wird M_1 die Menge aller Primzahlen oder aller geraden Zahlen oder aller natürlichen Zahlen (d. h. M selbst) sein, je nachdem man beim Prozeß des sukzessiven Herausgreifens immer eine möglichst kleine Primzahl, eine möglichst kleine gerade Zahl oder schlechthin eine möglichst kleine natürliche Zahl wählt.

Wir benutzen Satz 4, um für eine beliebige (nicht mehr notwendig abzählbare) unendliche Menge M eine Eigenschaft nachzuweisen, die der durch Satz 1 ausgedrückten Eigenschaft der abzählbaren Mengen weitgehend analog ist. Es sei nämlich M_0 eine beliebige *endliche oder abzählbare* Teilmenge von M von solcher Art, daß nach Entfernung sämtlicher Elemente der Menge M_0 aus der ursprünglichen Menge M immer noch eine unendliche Menge N — wiederum eine Teilmenge von M! — übrigbleibt; wir schreiben dann in einleuchtender Weise (vgl. auch S. 72): $M = M_0 + N$. Unser Ziel ist zu zeigen, daß die verkleinerte Menge N immer noch der ursprünglichen M äquivalent ist.

Zu diesem Zwecke verstehen wir gemäß Satz 4 unter N' eine abzählbare Teilmenge der unendlichen Menge N, während N'' die Menge der nicht zu N' gehörigen Elemente von N bezeichne; N'' kann — und zwar offenbar nur für den Fall einer abzählbaren Menge N — gleich der Nullmenge sein, braucht es jedoch auch in diesem Fall (gemäß

Satz 2) nicht zu sein. In jedem Falle läßt sich im gleichen Sinn wie oben schreiben: $N = N' + N''$. Hiernach gehört jedes beliebige Element von M einer einzigen der drei Mengen M_0, N', N'' an. Die Abbildung zwischen M und N soll nun darin bestehen, daß zunächst jedes zu N'' gehörige Element sich selbst zugeordnet wird; wir begnügen uns mit dieser trivialen Zuordnung, weil wir über die Menge N'' nahezu nichts wissen. Dann ist nur noch erforderlich, die zu M_0 und zu N' gehörigen Elemente von M den zu N' gehörigen Elementen von N umkehrbar eindeutig zuzuordnen. Das ist aber sicher möglich; denn N' ist eine abzählbare, M_0 eine endliche oder abzählbare Menge, so daß nach Satz 2 gilt: $N' + M_0 \sim N'$. Wir erhalten also:

Satz 5. *Läßt man aus einer beliebigen unendlichen Menge M endlichviele oder abzählbar unendlichviele Elemente fort, so ist die entstehende Restmenge N, falls sie überhaupt noch unendlich ist, der ursprünglichen Menge M äquivalent.*

In ganz ähnlicher Weise — oder noch einfacher durch Umkehrung des Satzes 5 — zeigt man die Richtigkeit der folgenden Behauptung, die den Satz 2 auf den Fall einer beliebigen (nicht gerade abzählbaren) unendlichen Menge ausdehnt:

Satz 6. *Fügt man den Elementen einer beliebigen unendlichen Menge noch weitere endlichviele oder abzählbar unendlichviele Elemente hinzu, so entsteht eine der ursprünglichen Menge äquivalente Menge.*

Aufgaben. 1. Ist die Menge aller endlichen (d. h. abbrechenden) Dezimalbrüche bzw. die Menge aller zwischen 0 und 1 gelegenen algebraischen Zahlen abzählbar?

2. Wie läßt sich die zweite Abzählungsart der rationalen Zahlen (S. 33) anschaulich mittels des Gitterpunktnetzes von Abb. 3 deuten?

3. Man zeige, daß die Menge all der Punkte einer Ebene, deren Koordinaten inbezug auf ein Cartesisches Koordinatensystem in dieser Ebene beide rational sind, abzählbar ist!

4. Man beweise den folgenden Satz (vgl. Satz 3): *Durch Vereinigung der Elemente abzählbar unendlichvieler (untereinander und von 0 verschiedener) Mengen, von denen jede endlich oder abzählbar ist, entsteht wiederum eine abzählbare Menge.*

5. Unter der Annahme, daß es unendlichviele transzendente Zahlen (S. 12) gibt, zeige man, daß die Menge aller transzendenten Zahlen äquivalent ist der Menge *aller* reellen Zahlen!

6. Warum ist die in Satz 5 hinsichtlich der Menge N gestellte Bedingung (N unendlich) von selbst erfüllt und somit überflüssig, sobald die unendliche Ausgangsmenge *M nicht abzählbar* ist?

7. Man führe den Beweis des Satzes 6 direkt, also ohne Verwendung des Satzes 5!

8. (Für den mit dem Begriff der „Häufungsstelle“ vertrauten Leser.) Man beweise: Eine unendliche Zahlenmenge (Punktmenge), die höchstens endlichviele Häufungsstellen (Häufungspunkte) besitzt, ist stets abzählbar.

§ 5. Das Kontinuum. Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die elementaren Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$.

1. Die Problemstellung. Wir betrachten die Gesamtheit aller positiven reellen Zahlen, die kleiner als 1 sind, einschließlich der Zahl 1 selber und wollen die aus all diesen Zahlen bestehende Menge im Laufe der nächsten Betrachtungen dieses Paragraphen stets mit C bezeichnen. Um von dieser Menge von vornherein eine einigermaßen anschauliche Vorstellung zu gewinnen, bedienen wir uns wieder der Zahlengeraden; da es sich um positive Zahlen handelt, haben wir die rechts vom Nullpunkt liegende Hälfte der Geraden zu betrachten und wir erkennen, daß der Menge C die Menge aller zwischen dem Nullpunkt 0 und dem Einspunkt 1 (letzteren Endpunkt eingeschlossen) gelegenen Punkte der Zahlengeraden entspricht (vgl. S. 10f.). Diese Punktmenge ist der Zahlenmenge C äquivalent; es sind also namentlich beide Mengen entweder gleichzeitig abzählbar oder gleichzeitig nicht abzählbar.

Wir wollen vorerst überlegen, in welcher Form wir die Elemente der Menge C, d. h. die reellen Zahlen zwischen Null und Eins, einheitlich und einfach darstellen können. Hierzu eignet sich z. B. die dem Leser schon von der Schule her wohlbekannte, allerdings auf der Schule meist nur für die Praxis behandelte Darstellung einer beliebigen reellen Zahl als *Dezimalbruch*. Man unterscheidet bekanntlich erstens *endliche* (oder abbrechende) Dezimalbrüche, d. h. solche, bei denen von einer gewissen Stelle an lauter Nullen auftreten, die also unter Fortlassung dieser Nullen vollständig hingeschrieben werden können (wie 0,3 oder 0,001), und zweitens *unendliche* Dezimalbrüche, für die dies nicht der Fall ist und bei denen daher unendlichviele Ziffern in periodischer oder nicht periodischer Folge auftreten (wie 0,333 . . . oder $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$). Daß zwei endliche bezw. zwei unendliche Dezimalbrüche, wenn sie nicht identisch sind, niemals die nämliche Zahl darstellen, mag aus der Schularithmetik als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt werden (und ist übrigens bei scharfer Begründung der Lehre von den Dezimalbrüchen auch wirklich fast selbstverständlich). Etwas anders liegen die Verhältnisse beim Vergleich endlicher und unendlicher Dezimalbrüche. Betrachtet man nämlich z. B. den endlichen Dezimalbruch 1 (d. h. 1,000 . . .) und den unendlichen Dezimalbruch 0,999 . . ., so besteht zwischen beiden Zahlen nicht die geringste Differenz, sie sind vielmehr genau gleich. Diese Tatsache, auf deren Beweis hier nicht eingegangen werden soll, wird dem Leser ohnehin sofort ein-

leuchten, wenn er sich zunächst erinnert oder durch Rechnen sich davon überzeugt, daß der Bruch $\frac{1}{3}$ die Dezimalbruchentwicklung 0,333 . . . besitzt; multipliziert man die beiden Seiten der Beziehung $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ mit 3, so ergibt sich:

$$1 = \frac{3}{3} = 0{,}999\ldots.$$

Beziehungen dieser Art bestehen, wie zwischen 1 und 0,999 . . ., so allgemein zwischen *jedem* endlichen und je einem gewissen unendlichen Dezimalbruch[1]; während sich im allgemeinen jede reelle Zahl nur *auf eine einzige Weise* als Dezimalbruch darstellen läßt, gibt es für jede Zahl, die sich als *endlicher* Dezimalbruch schreiben läßt, noch eine zweite Darstellung als unendlicher Dezimalbruch mit der Periode 9. Will man daher alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1, aber jede bloß ein einziges Mal, in Dezimalbruchform erhalten, so braucht man nur unter den mit 0, . . . beginnenden Dezimalbrüchen *alle endlichen auszuschließen*[2]. Es gilt also der Satz:

Die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 *und* 1, *letztere Zahl eingeschlossen, entspricht der Menge aller unendlichen Dezimalbrüche zwischen* 0 *und* 1 *einschließlich der Grenzen.*

Wir können und wollen daher auch die letztere Menge mit C bezeichnen. Die Festsetzung, daß die Zahl 1, nicht aber die Zahl 0 Element der Menge sein soll, ist erfüllt, da der Dezimalbruch 0,999 . . ., der gleich 1 ist, der Menge angehört, nicht aber der endliche Dezimalbruch 0 (= 0,000 . . .). Man beachte noch, daß alle Dezimalbrüche unserer Menge die folgende Form haben:

$$0,\ a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots,$$

wo $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ lauter *Ziffern* (d. h. Zahlen der Folge 0, 1, 2, . . ., 8, 9) bedeuten; gerade in Rücksicht auf diese einheitliche Darstellungs-

[1] Ist nämlich m eine natürliche Zahl und bedeuten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ lauter Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, . . ., 8, 9, wobei speziell a_m als von Null verschieden angenommen werde, so ist der endliche Dezimalbruch $0,\ a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, a_m$ gleich dem folgenden unendlichen Dezimalbruch:

$$0,\ a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, a_m - 1\ 9\ 9\ 9 \ldots;$$

z. B. ist 0,123 = 0,122999 . . . .

Die oben im Text angeführte Regel, wonach jeder endliche Dezimalbruch einem gewissen unendlichen Dezimalbruch gleich ist, erleidet einzig und allein für die Zahl 0 eine Ausnahme; die Null ist nicht als unendlicher Dezimalbruch darstellbar.

[2] Für die strenge Begründung des Wesens der Dezimalbrüche und ihrer in diesem Absatz angeführten Eigenschaften vgl. z. B. die Darstellung bei WEBER-EPSTEIN [1] (S. 106ff.) oder bei LOEWY [1] (S. 84ff.); man findet in diesen Werken (ebenso z. B. im ersten Kapitel von KNOPP [1]) auch eine scharfe Entwicklung des in dem vorliegenden Buch nicht erörterten Begriffs der reellen Zahl, den wir im oben angeführten Sinn einfach mit dem naiven Begriff des unendlichen Dezimalbruchs identifizieren.

möglichkeit (nicht etwa aus inneren Gründen) rechnen wir 1 mit zu C, nicht aber 0.

Wir wollen nun den Nachweis führen, daß die Menge C all dieser unendlichen Dezimalbrüche nicht abzählbar ist. Sie wird sich im Vergleich zur Menge aller natürlichen Zahlen (oder selbst aller algebraischen Zahlen) als so unvergleichlich viel umfassender erweisen, daß eine *Abzählung* der Elemente der Menge C, also deren Abbildung auf die Menge der natürlichen Zahlen, unmöglich wird: wie immer man nämlich versuchen mag eine solche Abbildung herzustellen, immer bleiben Dezimalbrüche von C übrig, denen keine natürliche Zahl gegenübersteht. Um diesen ebenso grundlegenden wie einfachen und geistvollen, wiederum von CANTOR herrührenden[1] Beweis zu führen, brauchen wir nur die Richtigkeit der folgenden Behauptung zu zeigen:

Hilfssatz. Ist irgendeine abzählbare Teilmenge C_0 von C gegeben, die zunächst nicht als eigentliche Teilmenge vorausgesetzt wird, so lassen sich Dezimalbrüche der Menge C angeben, die nicht in C_0 vorkommen. Oder auch: *Zu jeder abzählbaren Menge C_0 von unendlichen Dezimalbrüchen zwischen* 0 *und* 1 *gibt es weitere, nicht zu C_0 gehörige Dezimalbrüche der gleichen Art.*

Sobald dies nachgewiesen ist, folgt durch „indirekten Schluß“ unmittelbar, daß die Menge C aller unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 selbst *nicht* abzählbar ist, also auf keine Weise auf die Menge aller natürlichen Zahlen abgebildet werden kann; denn neben den Elementen der Menge *aller* unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 kann es doch sicherlich nicht *weitere* Dezimalbrüche derselben Art geben. Daß es überhaupt abzählbare Mengen von Dezimalbrüchen aus C gibt, zeigt z. B. die Menge aller rationalen Zahlen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, aller unendlichen *periodischen* Dezimalbrüche) zwischen 0 und 1, die jedenfalls unendlich und nach S. 31 abzählbar ist. Ob man nun von dieser oder von irgendeiner anderen, noch so umfassenden, aber immer noch abzählbaren Menge von Elementen aus C ausgehen mag, immer gibt es nach dem aufgestellten Hilfssatz noch weitere solche Elemente; niemals kann also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen natürlichen Zahlen und allen Dezimalbrüchen von C gefunden werden, weil die natürlichen Zahlen hierzu eben einfach nicht ausreichen.

Einem hier naheliegenden Mißverständnis werde durch folgende Bemerkung vorgebeugt: Ob man nun gemäß dem Hilfssatz einen oder mehrere oder selbst abzählbar unendlichviele Dezimalbrüche von C angeben kann, die in C_0 nicht vorkommen — immer wird auch die Menge, die durch Aufnahme dieser weiteren

[1] Vgl. CANTOR [11]; in dieser Form ist der Beweis wohl am übersichtlichsten und auch am bequemsten zur Verallgemeinerung geeignet (vgl. S. 62 f. und 68 f.). Von anderen Beweisen dieses Satzes, die übrigens im Kern sich des nämlichen Grundgedankens (aber ohne Zuhilfenahme der Dezimalbrüche) bedienen, seien der historisch erste Beweis (CANTOR [5], aus dem Jahre 1873 stammend, vereinfacht in [7 I]) und der Beweis von POINCARÉ [4] genannt.

Dezimalbrüche in die Menge C_0 entsteht, noch abzählbar sein (nach Satz 2 auf S. 30). Die Beweiskraft des Hilfssatzes liegt also nicht etwa in der Vergrößerung der Menge C_0 durch die nach dem Hilfssatz angebbaren neuen Dezimalbrüche. Vielmehr fließt die volle Bedeutung des Hilfssatzes lediglich aus der Voraussetzung, wonach C_0 eine *beliebige, wie immer gewählte* abzählbare Menge von Elementen aus C sein kann. Eine solche Menge C_0 vermag also niemals C zu erschöpfen; auch nach Auffindung von abzählbar unendlichvielen neuen Dezimalbrüchen und nach deren Einfügung in die Ausgangsmenge C_0 kann demnach das Ziel der Erschöpfung von C ebensowenig wie vorher gelungen sein. In den §§ 13 und 15 werden wir auf die gedanklichen Klippen dieses Verfahrens nochmals zurückkommen.

2. Beweis der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums. Um den Hilfssatz nun wirklich zu beweisen, denken wir uns eine ganz beliebige abzählbare Menge C_0 von unendlichen Dezimalbrüchen zwischen 0 und 1 gegeben und irgendwie abgezählt. Den ersten Dezimalbruch der Abzählung bezeichnen wir etwa mit $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, wo a_1, a_2, a_3 usw. lauter Ziffern der Folge 0, 1, 2, ..., 8, 9 bedeuten; der zweite Dezimalbruch sei $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, wo auch die Ziffern b_1, b_2, $b_3, \ldots$ dem System 0, 1, ..., 9 entnommen sind; ebenso werde der dritte Dezimalbruch mit $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ bezeichnet usw. Wir denken uns die Folge all dieser unendlichvielen Dezimalbrüche in nachstehender Weise angeschrieben:[1]

$$(\Phi) \qquad \begin{array}{ll} 1. & 0, a_1 \searrow a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots \\ 2. & 0, b_1\, b_2 \searrow b_3\, b_4\, b_5 \ldots \\ 3. & 0, c_1\, c_2\, c_3 \searrow c_4\, c_5 \ldots \\ 4. & 0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \searrow d_5 \ldots \\ 5. & 0, e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5 \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

Sowohl die Menge C_0 dieser Dezimalbrüche wie auch ihre hier angedeutete, nachstehend mit Φ bezeichnete abgezählte Anordnung waren ganz beliebig gedacht, sind aber von nun an festzuhalten. Jedes der Zeichen $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; \ldots$ bedeutet also jetzt eine bestimmte Ziffer zwischen 0 und 9, diese Grenzen eingeschlossen.

Es soll weiter eine unendliche Folge von Ziffern $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ (d. h. allgemein δ_k, wo $k = 1, 2, 3, \ldots$) durch folgende Festsetzung definiert werden: Jede der Ziffern δ_k soll im allgemeinen $= 1$ sein; nur dann, wenn für einen Wert von k die k^{te} Ziffer des k^{ten} Dezimalbruchs in der Abzählung Φ ihrerseits $= 1$ ist, soll für dieses k ausnahmsweise

[1] Die hier auftretenden Pfeile werden alsbald ihre Erklärung finden, sind aber vorläufig als bedeutungslos anzusehen.

$\delta_k = 2$ sein. Diese Regel wirkt sich also folgendermaßen aus: In dem umstehenden Schema der Abzählung Φ denken wir uns von der Ziffer a_1 aus, die im wesentlichen die linke obere Ecke des Schemas bildet, die „Diagonale" des nach rechts und unten unendlichen „Quadrats" in der Richtung nach rechts unten gezogen; diese (durch die Pfeile angedeutete) Diagonale trifft von a_1 aus nacheinander die Ziffern b_2, c_3, d_4 usw., mit anderen Worten sie geht durch die erste Ziffer des ersten Dezimalbruchs von Φ, durch die zweite Ziffer des zweiten, die dritte Ziffer des dritten usw., allgemein durch die k^{te} Ziffer des k^{ten} Dezimalbruchs, wobei k alle natürlichen Zahlen durchläuft. Diese in der Diagonalen stehenden Ziffern sind maßgebend für die Wahl der Werte $\delta_1, \delta_2, \ldots$; während nämlich im allgemeinen für jedes k stets $\delta_k = 1$ zu setzen ist, erleidet diese Regel eine Ausnahme lediglich für diejenigen Zahlen k, bei denen an der betreffenden Diagonalstelle von Φ, nämlich am Platz der k^{ten} Ziffer des k^{ten} Dezimalbruchs, schon die Ziffer 1 steht; für diese Werte k und nur für sie ist $k = 2$ zu setzen. Damit ist δ_k für jeden Wert von k eindeutig definiert, und zwar so, daß δ_k stets verschieden ist von der k^{ten} Ziffer des k^{ten} Dezimalbruchs von Φ.

Wir können schließlich aus den unendlichvielen Ziffern δ_k den folgenden ganz bestimmten unendlichen Dezimalbruch bilden:

$$0,\ \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \ldots,$$

den wir zur Abkürzung mit D bezeichnen wollen; wir zeigen, daß dieser Dezimalbruch D in der gegebenen Folge Φ von Dezimalbrüchen nirgends vorkommt. M. a. W. wir beweisen: nimmt k der Reihe nach den Wert jeder natürlichen Zahl an, so ist der Dezimalbruch D stets verschieden von dem k^{ten} Dezimalbruch der Abzählung Φ. Das folgt aus der Definition von D unmittelbar. D ist nämlich zunächst nicht der erste Dezimalbruch jener Folge; denn D unterscheidet sich von diesem schon in der ersten Dezimalziffer δ_1, die ja verschieden von der ersten Dezimalziffer a_1 jenes ersten Dezimalbruchs gewählt war. (Da jener erste Dezimalbruch von Φ ebenso wie D *unendliche* Dezimalbrüche — nicht etwa einer von ihnen endlich — sind, die sich in einer Ziffer, nämlich der ersten nach dem Komma, unterscheiden, so stellen sie nach S. 43 wirklich *verschiedene* Zahlen dar). Ebensowenig kann D dem zweiten Dezimalbruch jener Folge gleich sein, von dem D jedenfalls in der zweiten Dezimalziffer δ_2 abweicht, usw. Ist allgemein k eine ganz beliebige natürliche Zahl, so ist D vom k^{ten} Dezimalbruch der Folge Φ verschieden, weil nach der Definition von D zum mindesten die k^{te} Dezimalstelle δ_k des Dezimalbruchs D von der k^{ten} Dezimalstelle jenes k^{ten} Dezimalbruchs abweicht.

D kommt also wirklich in der Abzählung Φ aller Dezimalbrüche der gegebenen Menge C_0 nicht vor. Der Dezimalbruch D, der mit

0, ... beginnt, stellt aber selber eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar. Es gibt also in der Tat außer den Dezimalbrüchen der abzählbaren Menge C_0 noch weitere unendliche Dezimalbrüche zwischen 0 und 1, wie es der Hilfssatz behauptet. Demnach gilt wirklich gemäß den oben (S. 45) dem Hilfssatz angefügten Bemerkungen:

Satz 1. *Die unendliche Menge aller reellen Zahlen zwischen* 0 *und* 1 *ist nicht abzählbar.*

3. Bemerkungen zum vorstehenden Beweis. Bevor wir die Bedeutung dieses Satzes würdigen, seien einige Bemerkungen zu dem geführten Beweise angefügt.

Offenbar ist es nicht nur éine reelle Zahl D, sondern es sind unendlichviele gleichartige, die durch unser Verfahren als der Abzählung Φ *nicht* angehörig nachgewiesen werden. Das Verfahren läßt sich nämlich stichwortartig so schildern: die Ziffern δ_k sind in der Regel $= 1$, im Sonderfall $= 2$ zu wählen. Es leuchtet ein, daß die beiden Ziffern 1 und 2 in keiner Weise eine Ausnahmerolle gegenüber den übrigen Ziffern spielen, vielmehr nur gewählt werden, um eine bestimmte Festlegung der Zahl D zu ermöglichen. Ebensogut können wir ein beliebiges anderes Ziffernpaar wählen, in dem wiederum beliebig die eine Ziffer „als Regel", die andere „als Sonderfall" vorgeschrieben wird, und wir können diese verschiedenen Regeln auch miteinander kombinieren (z. B. für die ersten hundert Ziffern von D éine Regel wählen, für die nächsten hundert eine andere usw.). Man erhält so statt der einen Zahl D eine ganze Reihe von reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die in der Folge Φ nicht vorkommen, und zwar sogar unendlichviele solche Zahlen; das ist leicht einzusehen, aber unwesentlich für die Schlüssigkeit unseres Beweises, für den vielmehr schon die Existenz der einen Zahl D vollauf genügt (nach S. 45 f.). Lediglich die eine Vorsicht muß man bei der Ersetzung des Ziffernpaares 1, 2 durch ein anderes Paar walten lassen, daß man die Ziffer 0 dabei ausschließt oder wenigstens ihr nicht allzu weitgehende Rechte zuerkennt; denn wenn in dem Dezimalbruch D von einer gewissen Stelle an lauter Nullen aufträten, so hätten wir einen endlichen Dezimalbruch vor uns, der nach S. 44 möglicherweise einem der unendlichen Dezimalbrüche von Φ, trotz Abweichung in der Ziffernfolge, gleich sein könnte.

Weiter noch eine allgemeine Bemerkung: Bei der Bildung des Dezimalbruches D oder eines gleichwertigen mußte gerade auf diejenigen Ziffern des durch die Abzählung Φ dargestellten „Quadrats" geachtet werden, die in der von links oben (a_1) nach rechts unten ziehenden (unbegrenzten) Diagonalen gelegen sind, also auf die Ziffern a_1, b_2, c_3 usw. Die in dem Dezimalbruch D vorkommenden Ziffern δ_1, δ_2, δ_3 usw. waren nämlich wesentlich dadurch gekennzeichnet, daß sie von jenen in der Diagonalen auftretenden Ziffern bezüglich ver-

schieden sein sollten. Man bezeichnet daher dieses Beweisverfahren oder ein ihm im Gedankengang analoges als Diagonalverfahren. Die Beweismethode des Diagonalverfahrens kommt in der Mengenlehre öfters, und zwar (wie hier) an besonders bedeutsamer Stelle vor. Der Leser lasse es sich daher nicht verdrießen, den geführten Nachweis für die Nichtabzählbarkeit der Menge C so lange durchzudenken, bis er ihm völlig geläufig ist und als fast selbstverständlich erscheint. Er wird sich dadurch belohnt sehen, daß das so an einer elementaren Anwendung gewonnene Verständnis des Diagonalverfahrens ihm bei manchen weiteren Beweisen (so z. B. bei dem des letzten Satzes dieses Paragraphen) die Auffassung komplizierterer Gedankengänge wesentlich erleichtert. Gleichzeitig aber wird er auch deutlich erkennen, wie einfach im Grunde der Beweis unseres — wie wir gleich sehen werden — überaus weittragenden Satzes ist. Gerade diese besondere Einfachheit und Durchsichtigkeit der meisten CANTOR zu verdankenden grundlegenden Beweise der Mengenlehre macht einen eigenartigen Reiz dieser Wissenschaft aus und ist wohl auch nicht ohne Einfluß auf ihr Durchdringen geblieben; diese Einfachheit fällt nicht nur gegenüber den weitgehenden Konsequenzen derartiger Beweise ins Auge (vgl. die nächsten Nummern), sondern sie wirkt besonders wohltuend bei einem Vergleich mit den meist weit verwickelteren und tiefliegendes mathematisches Rüstzeug erfordernden grundlegenden Beweisen in anderen mathematischen Disziplinen, namentlich in der (der Mengenlehre in mancher Hinsicht nahestehenden) Zahlentheorie.

Vergleichen wir den vorstehenden Beweis der *Nichtäquivalenz* zwischen C und den abzählbaren Mengen mit den im vorigen Paragraphen geführten (und auch gewissen nachfolgenden) Beweisen für die *Äquivalenz* verschiedener Mengen, so finden wir, daß gedanklich immerhin der vorstehende Beweis merklich schwieriger ist; daran ändert auch nichts seine verhältnismäßige Kürze und Einfachheit, gemessen an den überaus weittragenden und tiefliegenden Folgerungen, die wir alsbald aus Satz 1 ziehen werden. Nun liegt ja im Vorstehenden ein sogenannter *Unmöglichkeitsbeweis* vor, der Beweis nämlich, daß es unmöglich ist, zwischen C und einer abzählbaren Menge eine Abbildung herzustellen; mit anderen Worten, daß alle (unendlichvielen) denkbaren Versuche zur Konstruktion einer derartigen Abbildung notwendig zu Mißerfolgen führen. Es ist begreiflich, daß ein solcher negativer Beweis besondere Schwierigkeiten mit sich bringt, wie dies auch für andere bekannte Unmöglichkeitsbeweise der Mathematik gilt (z. B. für die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels, d. h. der Verwandlung eines Kreisinhalts in ein inhaltsgleiches Quadrat mittels Lineal und Zirkel, oder — in Verschärfung dieser Unmöglichkeit — für die Transzendenz der Zahl π oder für die Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen von höherem als dem vierten Grad mittels der vier Spezies und des Wurzelziehens aufzulösen, usw.). Man wird indes gerade an der vorliegenden Stelle die gedankliche Schwierigkeit des vorstehenden Beweises gegenüber den früheren Äquivalenzbeweisen deshalb verwunderlich finden, weil ja bei der Vergleichung zweier *endlicher Mengen* die Feststellung, daß sie hinsichtlich der Anzahl ihrer Elemente verschieden (also nicht äquivalent) sind, nicht mehr Schwierigkeiten bereitet als die entgegengesetzte Feststellung, daß sie gleichviel Elemente enthalten, d. h. äquivalent sind. In der Tat braucht man nur einen ein-

zigen beliebigen Versuch zur gegenseitig eindeutigen Zuordnung der jeweils endlich-vielen Elemente beider Mengen zu unternehmen und wird dadurch die Äquivalenz oder die Nichtäquivalenz erwiesen haben, je nachdem die Zuordnung restlos durchführbar ist oder in éiner Menge partnerlose Elemente übrigbleiben.

Hier besteht also eine tiefgehende Verschiedenheit, die kurz geklärt werden soll. Der normale Fall liegt in Wirklichkeit bei den unendlichen Mengen, der Ausnahmefall bei den endlichen vor. Die Tiefe des vorstehenden Beweises und gleichzeitig seine weittragenden Konsequenzen sind in der Tat in seinem Charakter als Unmöglichkeitsbeweis begründet. Daß man aber bei endlichen Mengen zum Nachweis der Nichtäquivalenz nicht alle denkbaren Zuordnungen heranzuziehen braucht, sondern mit einer einzigen und zwar ganz beliebigen auskommt, das hat man einer besonders einfachen und glücklichen Eigenschaft der endlichen Mengen zu verdanken, die sich nicht etwa von selbst versteht, sondern in der Arithmetik sorgfältig bewiesen werden muß: der (auf S. 123 nochmals zu erörternden) Eigenschaft, daß einer jeden endlichen *Anzahl* stets auch nur eine einzige — ebenso bezeichnete — *Ordnungszahl* entspricht, mit anderen Worten, daß ein wie immer beschaffenes sukzessives Herausgreifen der einzelnen Elemente aus einer Menge von n Elementen *stets zum nämlichen Ordnungsschema führt*, nämlich zum Schema „erstens, zweitens, . . ., n-tens". Es ist aus diesem Grund gleichgültig, in welcher Reihenfolge man bei dem Zuordnungsversuch die einzelnen Elemente der zu vergleichenden Mengen heranzieht, ob man z. B. bei der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 die Zahlen der Größe nach herausgreift oder etwa erst die geraden und dann die ungeraden Zahlen nimmt; daher ist der erste beste Versuch schon für alle Möglichkeiten maßgebend. Dagegen gehören bei unendlichen Mengen zu einer und derselben Menge sehr verschiedene Ordnungsschemata; gerade hiermit hängt es aufs engste zusammen, daß wir z. B. die ganzen (positiven und negativen) Zahlen oder die rationalen Zahlen zwar nicht in ihrer gewöhnlichen Reihenfolge „abzählen" konnten, wohl aber bei einer zweckentsprechend gewählten Umordnung (S. 29 ff.). Daß indes bei der Menge C auch eine noch so geschickt gewählte Anordnung keinesfalls zum Ziel führen kann, das hat gerade der vorstehende Beweis gezeigt.

4. Geometrische Deutung und Verallgemeinerung des Ergebnisses. Nun vor allem zur anschaulich-geometrischen Bedeutung des Satzes! Er besagt (vgl. S. 43) zunächst, daß die Menge aller auf der Zahlengeraden zwischen den Punkten 10 und gelegenen Punkte nicht abzählbar ist. Dabei ist es nach den Sätzen 5 und 6 des vorigen Paragraphen gleichgültig, ob man einen der Endpunkte 0 und 1 oder auch beide zu dieser Menge rechnet oder nicht; denn in all diesen Fällen erhält man Mengen, die untereinander äquivalent, also sämtlich nicht abzählbar sind.

Die Größe der Einheitsstrecke der Zahlengeraden (d. h. der Strecke von 0 bis 1) war, im Längenmaß genommen, willkürlich (vgl. S. 10); unser Ergebnis muß daher für eine *beliebig lange* Strecke gültig bleiben. Aber auch ohne diese Überlegung erkennt man auf anschaulichem Weg leicht die Allgemeinheit des bewiesenen Resultats. Sind nämlich zwei verschieden große Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben und betrachtet man die beiden Mengen, die aus allen auf der ersten bzw. auf der zweiten Strecke gelegenen Punkten bestehen, so sind trotz der verschiedenen Länge beider Strecken die zwei Mengen äquivalent.

Man zeichne zum Beweis die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (etwa parallel) untereinander (vgl. Abb. 4) und verbinde je zwei Endpunkte verschiedener Strecken durch gerade Linien, die sich in einem Punkte P schneiden. Zieht man dann von P aus weitere Strahlen ganz beliebig, so wird jeder solche Strahl entweder *beide* gegebene Strecken oder *keine* von beiden schneiden. Im ersteren Fall, der für uns hier allein in Betracht kommt, wollen wir die beiden Schnittpunkte einander entsprechen lassen, also den Schnittpunkt des Strahls mit der einen Strecke seinem Schnittpunkt mit der anderen Strecke zuordnen und umgekehrt. Denkt man sich alle möglichen solchen Strahlen durch P gezogen, so erhält man offenbar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen Punkten der einen Strecke und allen Punkten der anderen; um z. B. unter den Verhältnissen der Abb. 4 zu einem gegebenen Punkt von $\overline{AB}$ den zugeordneten von $\overline{CD}$ zu finden, verbinde man den gegebenen Punkt geradlinig mit P und verlängere die Verbindungslinie; deren Schnittpunkt mit $\overline{CD}$ ist dann der gesuchte Punkt. Hierbei werden die Endpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bezüglich einander zugeordnet. Die beiden betrachteten Punktmengen sind also äquivalent.

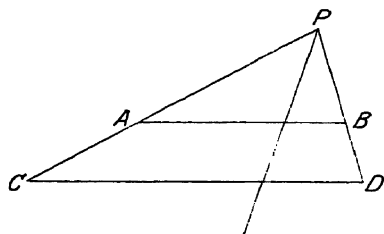



Abb. 4.

Dieser Beweis gibt wieder eine — im ersten Augenblick überraschende oder sogar unheimliche — Illustration zu der schon früher (S. 23f.) hervorgehobenen Tatsache, wonach der Satz „Das Ganze ist größer als ein Teil" bei den unendlichen Mengen nicht mehr wie sonst gilt. Denn trägt man die kürzere Strecke $\overline{AB}$ (etwa durch Ziehen der Parallelen zu BD durch A) auf der längeren CD ab, so erhält man bloß eine Teilstrecke von CD; und doch ist nach dem Bewiesenen die Menge der Punkte dieser Teilstrecke äquivalent der Menge der Punkte der ganzen Strecke $\overline{CD}$. Oder etwas anders ausgedrückt: statt die Zuordnung durch Strahlen von P aus durchzuführen, könnte man sie z. B. durch Parallelen zu BD herzustellen versuchen; dann bleiben offenbar auf der linken Seite von $\overline{CD}$ (und zwar auf einer Strecke von der Länge: CD minus AB) lauter Punkte von $\overline{CD}$ übrig, denen kein Punkt von $\overline{AB}$ zugeordnet ist. Allein das Mißglücken eines *bestimmten* Versuchs zur Abbildung zweier Mengen besagt, wie früher (S. 49f.) bemerkt, noch nichts über die Äquivalenz der Mengen. Im vorliegenden Beispiel ist es eben nicht das zunächst naheliegende, sondern ein *anderes* Verfahren der Zuordnung (nämlich das durch Abb. 4 angedeutete), das zum Ziel führt und damit die Äquivalenz der beiden so verschieden groß erscheinenden Mengen beweist.

Ist also eine beliebige gerade Strecke gegeben, so ist die Menge der auf ihr gelegenen Punkte äquivalent der Menge aller Punkte auf der Einheitsstrecke der Zahlengeraden. Sind z. B. a und b irgend zwei reelle Zahlen und daher auch irgend zwei Punkte der Zahlengeraden, so ist demnach die Menge aller Punkte zwischen a und b äquivalent der Menge aller Punkte zwischen 0 und 1; durch Übergang von den

Punkten zu den sie bezeichnenden Zahlen schließt man hieraus, daß *die Menge aller reellen Zahlen zwischen* 0 *und* 1 *äquivalent ist der Menge aller reellen Zahlen zwischen irgend zwei beliebig gegebenen reellen Zahlen*. Im besonderen gilt also:

Satz 2. *Die Menge aller Punkte, die auf einer beliebigen (wenn auch noch so kurzen) geraden Strecke gelegen sind, ist nicht abzählbar, vielmehr äquivalent der in Satz 1 betrachteten Menge. Dasselbe gilt von der Menge aller reellen Zahlen zwischen irgend zwei gegebenen, wenn auch noch so wenig voneinander abweichenden reellen Zahlen.*

Wie merkwürdig dieses Resultat ist, erkennt man, wenn man es mit dem Ergebnis von S. 39 vergleicht. Dort erwies sich die Menge aller durch algebraische Zahlen bezeichneten Punkte der beiderseits unbegrenzten Zahlengeraden als abzählbar. Jedes Stück der Zahlengeraden zeigte sich aber schon unendlich dicht erfüllt mit Punkten, die durch rationale Zahlen bezeichnet sind, um so mehr also mit Punkten, denen algebraische Zahlen entsprechen. Demgegenüber sehen wir jetzt, daß die Menge *aller* Punkte einer noch so winzigen Strecke nicht mehr abzählbar ist. Daraus geht hervor, wie „unendlich mal viel dichter" eine gerade Linie mit Punkten überhaupt erfüllt ist als mit Punkten, die durch algebraische Zahlen bezeichnet werden, obgleich auch schon die Punkte der letzteren Art überall auf der Geraden unendlich dicht gesät sind.

Dem Ergebnis, daß schon die Menge aller auf einer beliebig kleinen Strecke gelegenen Punkte nicht abzählbar ist, steht andererseits die folgende, gleichfalls überraschende Tatsache gegenüber:

Satz 3. *Die Menge aller Punkte einer beiderseits unbegrenzten geraden Linie ist äquivalent der Menge aller Punkte einer begrenzten, beliebig kleinen Strecke. Daher ist auch die Menge aller reellen Zahlen überhaupt äquivalent der Menge aller reellen Zahlen zwischen* 0 *und* 1 *(oder zwischen irgend zwei anderen reellen Zahlen).*

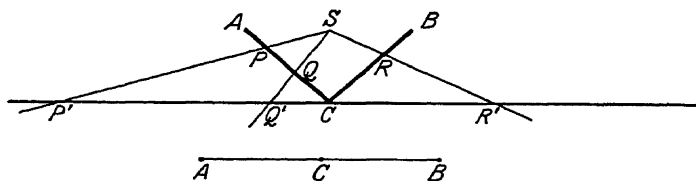



Abb. 5.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich wiederum auf geometrischem Weg besonders leicht und anschaulich einsehen. Wir denken uns (vgl. Abb. 5) einmal eine unbegrenzte Gerade $P'R'$ gezeichnet, dann eine begrenzte Strecke $\overline{AB}$, deren Mittelpunkt mit C bezeichnet werden möge; endlich werde die nämliche (beispielsweise als dünner Draht zu denkende) Strecke $\overline{AB}$ in ihrem Mittelpunkt C geknickt, so daß hier

etwa ein rechter Winkel entsteht, und die geknickte Strecke so an die unbegrenzte Gerade angelegt, daß der Punkt C mit einem beliebigen Punkt der Geraden zusammenfällt, während die beiden Hälften $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ nach links oben bzw. rechts oben mit der nämlichen Neigung gegen die Gerade emporstreben. Schließlich soll die Mitte der (in der Abbildung nicht gezeichneten) Verbindungslinie $\overline{AB}$ mit S bezeichnet werden; S kommt dann gerade über C zu liegen.

Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der geknickten Strecke $\overline{ACB}$ (mit Ausnahme ihrer beiden Endpunkte A und B) und allen Punkten der unendlichen Geraden erhält man nun einfach auf folgende Weise: ist Q ein Punkt der Strecke, so ziehe man die Verbindungslinie $\overline{SQ}$, deren Verlängerung die Gerade in einem Punkte Q' schneidet; ist P' ein Punkt der Geraden, so ziehe man die Verbindungslinie $\overline{SP'}$, die die Strecke in einem Punkte P schneidet; dann werde festgesetzt, daß die Punkte Q und Q', ebenso die Punkte P und P' einander entsprechen sollen und daß der auf der Geraden und der Strecke gleichzeitig gelegene Punkt C sich selbst entspreche. Hierdurch wird jedem Punkt der Strecke mit Ausnahme ihrer Endpunkte ein einziger Punkt der Geraden, jedem Punkt der Geraden ein einziger Punkt der Strecke umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die Menge aller Punkte der unbegrenzten Geraden ist also wirklich äquivalent der Menge aller zwischen A und B gelegenen Punkte, wie wir nachweisen wollten.

Für den mit den Vorstellungen der analytischen Geometrie und dem Funktionsbegriff vertrauten Leser werde darauf hingewiesen, daß der soeben durch Berufung auf Abb. 5 bewiesene Satz noch unmittelbarer einleuchtet, wenn man von einer zwischen zwei beliebigen Grenzen $x = a$ und $x = b$ eindeutigen und *monotonen* (d. h. beständig wachsenden oder beständig abnehmenden) Funktion $y = f(x)$ ausgeht, die zwischen den angegebenen Grenzen *alle* reellen Zahlenwerte annimmt. Eine solche Funktion ist bekanntlich z. B. $y = \operatorname{tang} x$, wenn $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird (vgl. Abb. 6); ein anderes Beispiel ist $y = \operatorname{cotg} x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$. Ordnet man für jeden Punkt der Kurve, die eine solche Funktion darstellt, die Abszisse x und die Ordinate y einander zu, so gehört wegen der Eindeutigkeit der Funktion zu jedem Wert x zwischen a und b eine einzige reelle Zahl y, umgekehrt wegen der Monotonie zu jeder reellen Zahl y ein einziger zwischen a und b gelegener Wert x. Die (demnach umkehrbar eindeutige Funktion $y = f(x)$ definiert also (vgl. S. 18) eine Abbildung zwischen der Menge *aller* reellen Zahlen und derjenigen aller Zahlen zwischen a und b; sie beweist demnach die Äquivalenz der beiden Mengen.

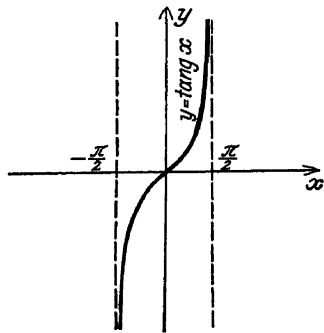



Abb. 6.

5. Existenz der transzendenten Zahlen. Endlich noch eine überaus wichtige *arithmetische* Folgerung aus dem Satz von der Nichtabzähl-

barkeit der Menge C, eine Folgerung, die 1874 den ersten großen Triumph CANTORS und der Mengenlehre bedeutet hat! Wie schon auf S. 12 erwähnt, bezeichnet man eine (reelle) Zahl, die nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, als eine *transzendente Zahl*. Der Wissenschaft ist bis heute erst für verhältnismäßig spezielle Klassen von Zahlen der Nachweis gelungen, daß sie transzendent sind, und dieser Nachweis ist keineswegs leicht. Demgegenüber folgt aus dem so einfachen Satze von der Nichtabzählbarkeit unserer Menge C in Verbindung mit früheren Ergebnissen ohne weiteres, daß *es unendlichviele transzendente Zahlen gibt*, ja noch mehr: daß es sozusagen eine „regelmäßige" Eigenschaft beliebiger reeller Zahlen ist, transzendent zu sein, während eine algebraische Zahl nur „ausnahmsweise" vorliegt.

Wie wir nämlich auf S. 38f. sahen, ist die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar; um so mehr gilt dies von der Menge aller algebraischen Zahlen zwischen 0 und 1 (oder zwischen irgend zwei beliebigen Zahlen). Andererseits haben wir nunmehr erkannt, daß die Menge *aller* reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (oder zwischen irgend zwei anderen Zahlen) nicht abzählbar ist. Nach der Definition der transzendenten Zahlen ist endlich die Gesamtheit aller reellen Zahlen nichts anderes als die Gesamtheit aller algebraischen *und* aller transzendenten Zahlen. Daher ist die Menge der transzendenten Zahlen zwischen 0 und 1, die aus C durch Fortlassung der abzählbar unendlichvielen algebraischen Zahlen hervorgeht, nach Satz 5 des vorigen Paragraphen (vgl. auch Aufgabe 5 auf S. 42) äquivalent zu C, also gleichfalls nicht abzählbar. Es gilt also in Rücksicht auf Satz 3:

Satz 4. *Die Menge aller transzendenten Zahlen zwischen irgend zwei gegebenen reellen Zahlen ist unendlich und nicht abzählbar, vielmehr der Menge C äquivalent. Das Nämliche gilt von der Menge aller transzendenten Zahlen überhaupt.*

Dieser inhaltsreiche und bestimmte Satz, der über die damals (1874) von den transzendenten Zahlen bekannten Tatsachen weit hinausgeht, betrifft eine Menge von Zahlen, von denen auch nur eine einzige wirklich zu bestimmen nicht eben leicht ist; erst 1851 war (durch LIOUVILLE) gezeigt worden, daß überhaupt transzendente Zahlen existieren. Demgegenüber stellt Satz 4 der unendlichen Menge der algebraischen Zahlen, die „nur" abzählbar unendlich ist, die nicht mehr abzählbare Menge der transzendenten Zahlen als äquivalent der Menge *aller* reellen Zahlen gegenüber. Diese Entdeckung (oder richtiger: Anwendung einer Entdeckung) hätte denn auch zum erstenmal die Bedeutung der damals im Beginn ihrer Entwicklung befindlichen Mengenlehre vernehmlich der mathematischen Mitwelt des forschenden CANTOR künden können, wenn es nicht der damaligen Zeit überhaupt an Aufnahmefähigkeit für diese ganze Gedankenrichtung gemangelt hätte.

Das Diagonalverfahren, wie es oben verwendet wurde, läßt sich übrigens — wenigstens theoretisch — auch zur numerischen Bildung transzendenter Zahlen benutzen. Verstehen wir nämlich in dem Hilfssatz von S. 45 unter C_0 die (nach S. 39 abzählbare) Menge aller algebraischen Zahlen, von denen jede (außer der etwa fortzulassenden Null) als unendlicher Dezimalbruch dargestellt sei, und bedeutet Φ irgendeine Abzählung dieser Menge, wie sie z. B. nach der Methode von S. 46 angeschrieben gedacht werden kann, so ist jede nach dem Diagonalverfahren konstruierte Zahl D (S. 47) eine reelle und nicht algebraische, also transzendente Zahl. Die praktische Durchführung dieses theoretisch einfachen Verfahrens zur Konstruktion transzendenter Zahlen würde allerdings, sobald man über die ersten Dezimalen von D hinauszugehen wünschte, an dem Zeitaufwand scheitern, der erforderlich ist, um eine Abzählung aller algebraischen Zahlen auch nur einigermaßen weit wirklich herzustellen. Indes ist ja die Bestimmung von nur *endlichvielen* Dezimalen der Zahl D offenbar überhaupt bedeutungslos, da immer erst die (unendlichvielen) späteren Ziffern darüber entscheiden, ob die Zahl algebraisch oder transzendent ist. Von Wert kann also nur ein allgemeines *Gesetz* sein, das alle Dezimalen von D einheitlich bestimmt; ein solches Gesetz aber steckt gerade in dem angeführten Konstruktionsverfahren für D, sobald die Abzählung Φ festgewählt ist.

6. Der Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Aus dem Satz von der Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen haben wir im Vorangehenden Folgerungen gezogen, die uns wichtige geometrische und arithmetische Erkenntnisse vermittelten. Hieraus erhellt schon, daß es sich dabei um ein innerhalb der Gesamtmathematik bedeutsames Ergebnis handelt, das — gleich besonders wichtigen Sätzen anderer mathematischer Teilgebiete — weit über die betreffende engere Disziplin (hier über die Mengenlehre) hinaus uns neue Tatsachen lehrt. Wir haben aber bisher, abgesehen von Andeutungen im vorigen Paragraphen, noch nicht von der Bedeutung unseres Satzes für die Mengenlehre selbst gesprochen.

In dieser Beziehung kann man unser Ergebnis geradezu als die *Grundlage der Mengenlehre* betrachten, von der aus die Einführung unendlichgroßer Zahlen erst einen Sinn bekommt; diese Bedeutung hat der Satz historisch in der Tat gehabt. Der Sachverhalt wird am deutlichsten werden, wenn wir zunächst von den *endlichen Mengen* ausgehen. Wie wir uns im dritten Absatz des § 3 (S. 16) klarmachten, kann man von der Betrachtung zweier oder mehrerer untereinander äquivalenter endlicher Mengen naturgemäß zum Begriff der *endlichen Anzahl oder Kardinalzahl* gelangen; äquivalente endliche Mengen haben unter sich etwas gemeinsam, was wir die Anzahl ihrer Elemente nennen

(vgl. auch die Beispiele 1 und 2 des § 2, S. 4f.). Auf solche Weise gelangt man, wie übrigens z. B. schon HUME bemerkt hat, zu den endlichen Kardinalzahlen 1, 2, 3 usw.; auch die Zahl 0 als Kardinalzahl der Nullmenge läßt sich so auffassen[1]. Umgekehrt sind zwei endliche Mengen auch *nur* dann äquivalent, wenn sie im gewöhnlichen Sinn gleichviel Elemente enthalten (vgl. S. 16 und die Fußnote dazu).

Es liegt danach nahe, den Begriff der Anzahl vom Endlichen aufs Unendliche derart zu übertragen, daß man je zwei oder mehreren unendlichen Mengen, die einander äquivalent sind, die nämliche „unendliche Kardinalzahl" beilegt und auf diese Weise die unendlichen Kardinalzahlen einführt. Nun bietet es zwar keine besondere Schwierigkeit, gewisse unendliche Mengen als untereinander äquivalent zu erkennen, also etwa die verschiedenen in § 4 betrachteten abzählbaren Mengen oder die auf S. 50ff. behandelten Punktmengen aufeinander abzubilden, wie wir dies taten. Solange aber die Möglichkeit oder sogar die Wahrscheinlichkeit offen bleibt, daß überhaupt *alle* unendlichen Mengen untereinander äquivalent sind, stellt die damit ermöglichte Einführung einer einzigen „unendlichgroßen Kardinalzahl" keinen wissenschaftlichen Fortschritt dar; denn ein Rechnen mit dieser einen unendlichen Zahl wird nichts wesentlich Neues ergeben, sondern auf die naive Vorstellung eines ganz unbestimmten „Unendlich" und dessen durchaus triviale Eigenschaften hinauslaufen. Von einer wirklichen, sinnvollen Einführung des Unendlichgroßen in die Mathematik kann erst dann die Rede sein, wenn es gelingt, mehrere voneinander scharf getrennte unendlichgroße Zahlen zu unterscheiden und Regeln für ihre Vergleichung und fürs Rechnen mit ihnen aufzustellen.

Eben dies ermöglicht aber der bewiesene Satz von der Nichtabzählbarkeit der Menge C. Denn nach ihm gibt es mindestens zwei nichtäquivalente unendliche Mengen, z. B. die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge C; das Diagonalverfahren gestattet übrigens, wie wir später sehen werden, sogar den Nachweis der Existenz *unendlichvieler* unendlicher Mengen, unter denen keine einer andern äquivalent ist. Man kann daher die unendlichen Mengen in verschiedene Klassen derart einteilen, daß die Mengen einer und derselben Klasse untereinander äquivalent sind, niemals aber eine Menge éiner Klasse äquivalent ist einer Menge einer andern Klasse. Weiter führt man dann, ganz wie bei den endlichen Mengen, für das Gemeinsame, was allen untereinander äquivalenten beliebigen (endlichen oder unendlichen) Mengen jeweils eigentümlich ist, eine Bezeichnung ein, und zwar spricht man auch hier von der Kardinalzahl oder auch von der Mächtigkeit unendlicher Mengen; wir werden diese beiden Ausdrücke gleichmäßig

[1] Vgl. die im besten Sinn des Wortes populäre Darstellung in HESSENBERGS Rede [11].

verwenden. Die Kardinalzahl einer Menge M kann also aufgefaßt werden als der Inbegriff derjenigen Eigenschaften von M, die M mit jeder äquivalenten Menge, aber mit keiner nicht äquivalenten Menge gemein hat. Zum Unterschied von den endlichen Kardinalzahlen soll die Kardinalzahl einer unendlichen Menge nötigenfalls als eine unendliche oder transfinite Kardinalzahl bezeichnet werden. *Die Ausdrucksweise „zwei unendliche Mengen besitzen die gleiche Kardinalzahl oder Mächtigkeit" soll also nichts anderes besagen als „die zwei Mengen sind äquivalent"; „die Mächtigkeiten zweier Mengen sind verschieden" ist nur eine andere Ausdrucksweise für „die beiden Mengen sind nicht äquivalent"*. Die zunächst unpräzise Frage nach der Vergleichbarkeit unendlicher Mengen oder nach den Begriffen „gleich" und „ungleich" im Reich des Unendlichgroßen ist so auf den scharfen und unzweideutigen Begriff der Äquivalenz, d. h. der umkehrbar eindeutigen Zuordnung (oder der Funktion) zurückgeführt — eine der bedeutsamsten Leistungen in CANTORS Werk.

So ist denn der Begriff der Mächtigkeit eine naturgemäße, aber weittragende Verallgemeinerung des Begriffs der (endlichen) Anzahl; die Mächtigkeit einer Menge gibt gewissermaßen an, „wie viele" Elemente die Menge enthält. Aber in scharfem Gegensatz zu der naiven Auffassung brauchen wir uns nunmehr nicht mit der tautologischen Aussage zu begnügen, eine gegebene unendliche Menge enthalte „unendlichviele" Elemente; sicherlich enthält z. B. die Menge aller natürlichen Zahlen ebenso wie die Menge aller reellen Zahlen unendlichviele Elemente, aber die Mächtigkeit der einen Menge ist verschieden von der Mächtigkeit der anderen. Andererseits liegen freilich bei den unendlichen Mengen nicht etwa wie bei den endlichen Mengen die Verhältnisse so einfach, daß die Mächtigkeit einer Menge schon dann verschieden sein müßte von der einer anderen, wenn z. B. die erstere Menge „mehr" Elemente enthält als die letztere; wie wir auf S. 28 erkannten, besitzt z. B. die Menge *aller* natürlichen Zahlen die nämliche Mächtigkeit wie die Teilmenge aller *geraden* natürlichen Zahlen (beide enthalten „abzählbar unendlichviele Elemente"). Dies liegt wesentlich daran, daß zwar nicht im Bereich der endlichen, wohl aber in dem der unendlichen Mengen eine Menge sehr wohl einer eigentlichen Teilmenge von sich selbst äquivalent sein kann — eine Eigentümlichkeit, die sich, wie wir gesehen haben (S. 24), geradezu zur *Definition* des Begriffes der unendlichen Menge und damit zur Scheidung zwischen Endlichem und Unendlichem benutzen läßt.

7. Zur Kritik obiger Begriffsbildung. Gegen die vorstehend angegebene Art der Einführung der unendlichen Kardinalzahlen läßt sich allerdings der Einwand erheben, daß die Kennzeichnung „das Gemeinsame aller (oder je zweier) untereinander äquivalenter unendlicher Mengen" keine scharfe Begriffsbildung ist, wie man sie von einer mathematischen Definition mit Recht verlangen muß. Das

gleiche gilt von CANTORS Definition ([121], S. 481): „Mächtigkeit oder Kardinalzahl von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird"; vgl. hierzu die Beispiele des § 2.

Eine tiefere Einsicht in das hier vorliegende Problem gewinnt man durch die Erkenntnis, daß eine durchaus entsprechende Sachlage zu vielen wichtigen Begriffsbildungen innerhalb (und gelegentlich auch außerhalb) der Mathematik geführt hat. So gelangt man, indem man immer die gemeinsame „typische Eigenschaft" aller Individuen einer ganzen Klasse aufsucht, z. B. von jeder Klasse aller untereinander *parallelen* Strahlen zum Begriff der ihnen gemeinsamen *Richtung* (oder, was wesentlich dasselbe besagt, des ihnen gemeinsamen „unendlichfernen Punktes"), von jeder Gesamtheit aller untereinander *ähnlichen* Figuren zum Begriff der ihnen gemeinsamen *Gestalt*, usw. Die typische Eigenschaft ordnet all die Objekte, denen sie zukommt, jeweils in eine Klasse ein, in die Klasse der Objekte von „gleichem Typus"; in unserem Fall besteht die Relation „von gleichem Typus zu sein" in der *Äquivalenz* zwischen Mengen, und wie in diesem speziellen Fall (vgl. S. 20) muß jene Relation stets reflexiv, symmetrisch und transitiv sein, wenn eine Begriffsbildung dieser Art möglich werden soll. Dann läßt sich nämlich immer einer beliebigen Klasse von Objekten desselben Typus ein Begriff zuordnen, der der *Typus* eines jeden Objekts der Klasse (hinsichtlich jener Relation) heißen soll; der Typus von Mengen hinsichtlich der Äquivalenz ist so die Kardinalzahl, ebenso wie die Richtung den Typus orientierter gerader Linien hinsichtlich des Parallelismus darstellt. Man drückt sich vielfach so aus: Der Richtungsbegriff entsteht aus dem Begriff der orientierten Geraden, indem man von der Lage der Geraden im Raum abstrahiert; ebenso der Kardinalzahlbegriff aus dem Begriff der Menge, indem man von der Natur (sowie einer etwaigen Anordnung) der Elemente absieht. Diese Methode der „Definition durch Abstraktion" — die z. B. CANTOR veranlaßt hat, die Kardinalzahl einer Menge M durch zweimaliges Überstreichen (als Andeutung der doppelten Abstraktion), also mit $\bar{\bar{M}}$, zu bezeichnen — ist ein besonders wichtiger Spezialfall jener in der Mathematik überaus häufigen Definitionsart, die WEYL ([7], Nr. 2) als aufbauende mathematische Definition, CARNAP [3] als Gebrauchsdefinition bezeichnet.

Man kann übrigens den Typus geradezu definieren als die zugehörige Klasse selbst, d. h. als die Menge aller Objekte, die in der betreffenden Relation zueinander stehen; eine Richtung also als eine Menge (Klasse) aller möglichen zueinander parallelen Strahlen, die Kardinalzahl (so FREGE [1] und [21], ferner RUSSELL [1], S. 115; vgl. auch etwa RUSSELL [5], Kap. 2, oder NICOD [3]) als eine Menge aller zueinander äquivalenten Mengen (siehe auch § 15, Nr. 5). Die Zahl 5 z. B. ist hiernach nicht ein besonderes Gedankending, das unabhängig wäre von irgend einer individuellen Menge von fünf Elementen (z. B. von der Menge der Erdteile); vielmehr ist die Zahl 5 der prägnante Ausdruck der Verwandtschaft dieser besonderen Menge mit allen ihr gleichzahligen, d. h. ihr äquivalenten, und somit treffend als der Inbegriff aller möglichen derartigen Mengen zu erklären. Ob mit einer solchen „Zurückführung" freilich viel getan ist, wird wenigstens derjenige bezweifeln, der den Unterschied zwischen Menge und Gesamtheit (Ganzes) in den Vordergrund rückt (vgl. schon S. 13).

Die Begriffsbildung durch Abstraktion, für die man besonders HESSENBERG [10], S. 71, und WEYL [7] (a. a. O.) vergleiche, geht in andeutender Formulierung schon auf LEIBNIZ zurück, während ihre Bedeutung für die Mathematik namentlich von PASCH ([1], S. 40) und FREGE ([1], §§ 63—68) hervorgehoben worden ist. — Übrigens könnte man, ebenso wie z. B. das Meter durch das Normalmeter in Paris erklärt wird, auch zur Definition jeder Rich-

tung je eine anschaulich aufgewiesene Gerade, zur Definition jeder Anzahl je eine ganz bestimmte Menge heranziehen; man hätte also z. B. die Anzahl „zwei“ gleich der Menge {Sonne, Mond} oder gleich {1, 2} zu setzen, wobei zur Vermeidung eines Zirkels als Elemente der letzteren Menge nicht die Zahlen selbst, sondern ihre *Zeichen* aufzufassen wären. Ein gewisser, immerhin grundsätzlich nicht wesentlicher Mangel dieser Methode, die sich in aller Strenge durchführen läßt (vgl. § 17, S. 319), liegt in der verhältnismäßigen Willkür, mit der jedesmal ein Repräsentant zu wählen ist[1].

Zuweilen ist, namentlich von philosophischer Seite (vgl. z. B. DUBISLAV [2], S. 31f.), gegen Begriffsbildungen dieser Art der Einwand erhoben worden, es seien keine „vollständigen“ Definitionen; in der Tat wird ja vielmehr erklärt, was die Begriffe Richtung, Kardinalzahl usw. leisten sollen, als was sie sind. Im allgemeinen erscheint dieser Einwurf dem Mathematiker nicht sehr gewichtig[2]; denn wer Anstoß nimmt an der Definition durch Abstraktion, wie sie in anderer („originärer“) Form übrigens auch sonst in der Logik angewandt wird (z. B. zur Definition einer Farbe), der kann sich für mathematische Zwecke ja an diejenige Form dieser Definition halten, die den Typus als die zugehörige Klasse selbst definiert (siehe oben). In unserem besonderen Fall, wo es auf die Definition des Begriffs „Kardinalzahl“ ankommt, führt allerdings dieser Weg, der gerade hierfür besondere Hervorhebung gefunden hat, auf gewisse Schwierigkeiten; die Menge *aller* zu einer bestimmten Menge äquivalenten Mengen gehört nämlich zu der Sorte von Mengenbildungen, die wir später (§ 13) als mit Widersprüchen behaftet verwerfen werden, und ein solcher Begriff kann wohl nur mittels der Typentheorie RUSSELLS auf eine einwandfreie Form gebracht werden (vgl. § 15).

Trotz alledem besteht, sofern man nur den Begriff einer unendlichen Menge überhaupt (wie etwa der Menge aller natürlichen Zahlen) bejaht, zu einer mißtrauischen oder gar skeptischen Haltung gegenüber der Einführung des allgemeinen Kardinalzahlbegriffs kein Anlaß, sicherlich nicht mehr als gegenüber dem gewöhnlichen endlichen Zahlbegriff. Denn die Mathematik will ja über Zahlen im allgemeinen und über die Kardinalzahlen unendlicher Mengen im besonderen nicht metaphysische Urteile abgeben, ihnen nicht uferlos Eigenschaften wesenhafter Art zusprechen; alles vielmehr, was der Mathematiker über Zahlen auszusagen hat, läßt sich letzten Endes zurückführen auf die beiden Relationen: zwei Zahlen sind gleich, zwei Zahlen sind verschieden. Genau genommen bedarf man also gar keiner Definition der Kardinalzahl, sondern nur der Definition dieser beiden Relationen. Diese aber sind eindeutig und einwandfrei festgelegt: je nach-

---

[1] Etwas allgemeiner kann man so unter den „Kardinalzahlen“ ein System $\mathfrak{S}$ von Zeichen derart verstehen, daß *jeder* Menge M eindeutig ein bestimmtes Zeichen aus $\mathfrak{S}$ (als „Kardinalzahl von M“) entspricht und daß verschiedenen Mengen dann und nur dann das nämliche Zeichen entspricht, wenn die Mengen äquivalent sind. Die in dieser Regel enthaltene Definition der *Gleichheit* zwischen Kardinalzahlen erweist sich, wie auf S. 65 und durch die Sätze 1 und 3 des § 7 dargetan wird, auch als brauchbar im Hinblick auf die spätere Einführung von Relationen und Operationen zwischen Kardinalzahlen.

[2] In diesem Zusammenhang ist die Entwicklung hervorhebenswert, die sich im Laufe der Zeiten in der Logik hinsichtlich der Lehre von der Definition vollzogen hat (RICKERT, CASSIRER u. a.) und die, nicht unähnlich den Tendenzen der Mathematik, die funktionalen oder relationalen Verknüpfungen der zu definierenden Begriffe in den Vordergrund gerückt hat auf Kosten der Tendenz, die Begriffe gewissermaßen der „Substanz“ zu entnehmen (wie etwa bei der Definition nach ARISTOTELES durch genus proximum und differentia specifica). Man vergleiche etwa CASSIRER [2] sowie SCHLICK [1], S. 23ff. und 32ff.

dem zwei Mengen äquivalent sind oder nicht, sagen wir, ihre Kardinalzahlen seien gleich oder verschieden (so schon bei CANTOR [6]). In der Tat könnte man (vgl. auch S. 313f.) die ganze Mengenlehre aufbauen und darstellen, ohne das Wort „Kardinalzahl" zu gebrauchen, indem man statt dessen immer von Äquivalenzen spricht, die durch Definition 1 von § 3 (S. 16f.) in völliger Strenge erklärt sind. Freilich würde dabei die Ausdrucksweise vielfach bis zur Unerträglichkeit schleppend werden, wie man den nächsten zwei Paragraphen leicht entnimmt, und gerade die Vermeidung solcher Umständlichkeit ist ein Hauptgrund zur Einführung des Kardinalzahlbegriffs (wie überhaupt zur Aufstellung der meisten Definitionen in der Mathematik). Von einer „Erschleichung" jenes Begriffs kann nach dem Angeführten nicht die Rede sein.

Wenn man sich von *dieser Zurückführbarkeit jeder Aussage über Kardinalzahlen auf eine solche über Mengen und deren Äquivalenz* Rechenschaft gibt, wird man, auch ohne daß hier eine Zergliederung und Kritik im einzelnen erforderlich wäre, manche Mißverständnisse durchschauen, auf die gewisse kritische Beurteilungen der Mengenlehre von philosophischer Seite sich gründen (vgl. z. B. BERGMANN [2]; ZIEHEN [1] sowie [2], S. 414—416; DIECK [2], S. 106ff.; BUCHHOLZ [1], besonders S. 25—38). Unberührt bleibt durch diese Feststellung freilich die Tatsache, daß der Standpunkt, der überhaupt jede unendliche Menge und demgemäß schon den Inbegriff aller natürlichen Zahlen *als geschlossenes Ganzes* ablehnt, in sich folgerichtig und unangreifbar ist (wie das ja auch sogar für den philosophischen Solipsismus gilt). Der Mathematiker gelangt von solchem Standpunkt, indem er gleichwohl das Unendliche grundsätzlich und in entsprechenden Schranken bejaht, zu einem gewissen „intuitionistischen" Aufbau der Mathematik (§ 14); hingegen wird er die rein negativ gemeinte Ablehnung der unendlichen Mengen, die auf die Verneinung der Analysis hinausläuft, kaum ganz ernst nehmen und vielmehr als durch den „Erfolg" praktisch widerlegt betrachten, ähnlich wie dies der sogenannte gesunde Menschenverstand gegenüber dem Solipsisten tut mit der Berufung auf einen Laternenpfahl, mit dem auch der Solipsist etwa unliebsame Bekanntschaft machen mag.

Schließlich sei bemerkt, daß man — was aber nicht eben einfach und für die Mengenlehre im allgemeinen nicht nötig ist — auch die Kardinalzahlen selbst ganz unmittelbar einführen kann: entweder als gewisse spezielle Mengen (vgl. v. NEUMANN [4], S. 731 und [6], Schluß von Kap. II), oder als die „Grundbegriffe" einer besonderen Axiomatik (vgl. FRAENKEL [4]).

Wir wollen im folgenden, wie vielfach üblich, unendliche Kardinalzahlen regelmäßig mit kleinen deutschen Lettern bezeichnen (Mengen dagegen, wie schon bisher, meist mit lateinischen Lettern). Doch sei schon hier erwähnt, daß nach dem Vorgang von CANTOR die unendlichen Kardinalzahlen auch — und grundsätzlich sogar in erster Linie — durch hebräische Lettern bezeichnet werden, nämlich durch ein $\aleph$ („Alef", d. i. der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets) mit kleinen, rechts unten angebrachten Nummern (Indizes): $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$ (gelesen: Alef-Null, Alef-Eins, Alef-Zwei) usw. Welche Bewandtnis es mit dieser Bezeichnung hat und weshalb wir sie vorerst nicht verwenden, darauf wird im § 12 (S. 193 und 205) zurückzukommen sein. Im besonderen bezeichnen wir die Mächtigkeit jeder abzählbaren Menge stets mit $\mathfrak{a}$, während die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen (und jeder zu ihr äquivalenten Menge) mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet wird. Da nach den Sätzen 1—3 die (schlechthin als „Kontinuum" bezeich-

nete) Menge aller Punkte einer „kontinuierlichen" Strecke oder einer „kontinuierlichen" unbegrenzten geraden Linie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt, nennt man $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

8. Die Kardinalzahl $\mathfrak{f}$ der Menge aller Funktionen. Wir haben bisher nur zwei verschiedene unendliche Kardinalzahlen, nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, kennengelernt. Zum Abschluß dieses Paragraphen soll noch eine unendliche Menge betrachtet werden, deren Mächtigkeit sowohl von $\mathfrak{a}$ wie von $\mathfrak{c}$ verschieden ist.

Unter einer (*eindeutigen*) *Funktion* $y = f(x)$ versteht man in der Mathematik ein Abhängigkeitsverhältnis folgender Art (vgl. schon S. 18): x sei eine Veränderliche (Variable), die alle Zahlenwerte eines gewissen Zahlenbereichs annehmen kann; wir wollen der Einfachheit halber im folgenden als Bereich denjenigen aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (beide Grenzen eingeschlossen) wählen, so daß also x alle Zahlenwerte zwischen 0 und 1 durchläuft. Zu jedem einzelnen solchen Wert von x soll ein jeweils ganz beliebiger, aber von nun an bestimmter (und im folgenden gleichfalls als reell angenommener) Zahlenwert y gegeben sein, etwa durch eine mathematische Formel, eine willkürliche (z. B. graphisch angedeutete) Vorschrift oder sonstwie; während die „*unabhängige*" Veränderliche x alle Werte des Bereiches durchläuft, wird daher auch die von x *abhängige* Veränderliche y innerhalb eines gewissen Bereiches reeller Zahlen veränderlich sein, doch brauchen dabei für verschiedene Werte von x nicht immer auch die zugehörigen Werte von y ihrerseits verschieden zu sein. Um eine solche Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Größen x und y zu kennzeichnen, nennt man y eine (reelle) Funktion von x. Das Abhängigkeits- oder Funktionsverhältnis tritt auch schon in der Schreibweise deutlich hervor, wenn wir $f(x)$ statt y schreiben; soll also z. B. für jede reelle Zahl x zwischen 0 und 1 als zugehöriger y-Wert die reelle Zahl $x^2 + 3x$ gelten, so deutet man dies an durch die Schreibweise $f(x) = x^2 + 3x$; für den speziellen Wert $x = 4$ ergibt sich demnach $f(4) = 16 + 12 = 28$.

Bekannte Beispiele derartiger Funktionen sind z. B. der Gang des Luftdrucks (Barometerstandes) an einem Orte oder die (eigentlich durch fortwährende Messungen zu bestimmende) Fieberkurve eines Kranken; die unabhängige Veränderliche x ist in beiden Fällen die Zeit, als Funktion $f(x)$ der Zeit wird im ersten Beispiel der Luftdruck, im zweiten die Körpertemperatur bestimmt. Im folgenden werden wir unter x und $f(x)$ nicht benannte Größen wie Zeit, Temperatur usw., sondern reine Zahlen verstehen.

Wir betrachten nun die *Menge F aller überhaupt denkbaren Funktionen $f(x)$ von x,* wenn x alle Zahlenwerte zwischen 0 und 1 durchläuft. Jedes Element unserer Menge ist eine gewisse Funktion $f(x)$. Zwei Funktionen sind natürlich verschieden, sobald die Vorschriften, durch

die den Werten x gewisse Werte $f(x)$ zugeordnet werden, nicht restlos übereinstimmen; gibt es also auch nur einen einzigen Zahlenwert x zwischen 0 und 1, zu dem das eine Mal ein anderer Funktionswert $f(x)$ gehört als das andere Mal, so liegen schon zwei verschiedene Funktionen vor. Es ist leicht (vgl. S. 66) Teilmengen von F anzugeben, die von der Mächtigkeit des Kontinuums sind; z. B. die Menge aller „konstanten" Funktionen. Unser Ziel ist demgegenüber zu zeigen: die Menge *aller* Funktionen $f(x)$ ist so umfassend, daß sie auch nicht die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Zu diesem Zwecke läßt sich wieder, ähnlich wie auf S. 46ff., die Methode des Diagonalverfahrens verwenden (vgl. CANTOR [11]).

Es sei nämlich eine *die Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *besitzende, sonst aber ganz beliebige* Menge F_0 von Funktionen $f(x)$ gegeben[1], so daß eine Abbildung zwischen dieser Funktionenmenge F_0 und der Menge C aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 existiert; eine beliebige solche Abbildung werde gewählt und im folgenden festgehalten. Wir werden dann ausdrücklich eine Funktion $\varphi(x)$ (also ein Element der Menge F *aller* Funktionen $f(x)$) nachweisen, die in der Menge F_0 nicht vorkommt. Hiernach kann keinesfalls schon F_0 *alle* Funktionen $f(x)$ umfassen. Gemäß der über F_0 gemachten Voraussetzung wird damit, ganz entsprechend wie auf S. 45, der gewünschte Nachweis dafür erbracht sein, daß die Mächtigkeit unserer Menge F jedenfalls von $\mathfrak{c}$ (und übrigens, wie man leicht einsieht, um so mehr auch von $\mathfrak{a}$) verschieden ist.

Um wirklich eine in F_0 nicht vorkommende Funktion $\varphi(x)$ zu bilden, empfiehlt es sich vor allem, die gewählte Abbildung zwischen der Zahlenmenge C und der Funktionenmenge F_0 recht anschaulich zu machen. Zu diesem Zwecke wollen wir die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auch mit z bezeichnen und diejenige Funktion $f(x)$ unserer Menge, die vermöge der gewählten Abbildung einer bestimmten Zahl z zugeordnet ist, auch als $f_z(x)$ schreiben. Hiernach ist z. B. $f_{\frac{1}{2}}(x)$ diejenige Funktion von x, die bei unserer Abbildung der Zahl $\frac{1}{2}$ entspricht.

Es werde nun eine Funktion $\psi(x)$ nach folgender Vorschrift gebildet: für jeden bestimmten Zahlenwert z zwischen 0 und 1 soll $\psi(z)$ denjenigen Wert besitzen, den die Funktion $f_z(x)$ für den speziellen Wert $x = z$ annimmt. Um diese etwas abstrakte Festsetzung deutlicher zu machen, betrachten wir ein Beispiel. Die Funktion $\psi(x)$ ist völlig bestimmt, wenn ihr Zahlenwert für jeden Wert von x zwischen 0 und 1 bekannt ist. Dieser Wert ist nach der obigen Regel für jeden Wert von x, beispielsweise für den Wert $x = \frac{1}{2}$, folgendermaßen zu bestimmen: die der reellen Zahl $\frac{1}{2}$ durch unsere vorausgesetzte Abbildung zugeordnete Funktion der Funktionenmenge F_0 sei etwa $y = x^2$, also $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^2$; für $x = \frac{1}{2}$ hat diese Funktion den Wert $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, also $f_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; dies soll nach Definition gerade der Wert der Funktion $\psi(x)$ für $x = \frac{1}{2}$ sein, also $\psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Genau entsprechend bestimmt sich der Wert von $\psi(x)$ für jeden anderen Zahlenwert von x. (Ganz kurz läßt sich die gegebene Definition für $\psi(x)$ offenbar so ausdrücken: für jeden

---

[1] Es gibt jedenfalls solche Mengen F_0, wie soeben erwähnt.

Wert x ist $\psi(x) = f_x(x)$. Das ist der zur reellen Zahl x gehörige „Diagonalwert", ganz ebenso wie auf S. 47 die k^{te} Ziffer des k^{ten} Dezimalbruchs den zur natürlichen Zahl k gehörigen „Diagonalwert" darstellte.)

Endlich sei eine Funktion $\varphi(x)$, wiederum für alle Werte von x zwischen 0 und 1, durch die einzige Bestimmung umgrenzt, daß $\varphi(x)$ für jeden Wert von x stets von dem zugehörigen Wert von $\psi(x)$ verschieden sein solle; im übrigen kann $\varphi(x)$ beliebig sein. Man kann also derartige Funktionen $\varphi(x)$ in mannigfachster Weise bilden. Um eine einfache und bestimmte Vorstellung zu gewinnen, setzen wir beispielsweise $\varphi(x) = \psi(x) + 1$.

Wir werden nun sehen: $\varphi(x)$ kommt unter den Funktionen von F_0 überhaupt nicht vor. Ist dies gezeigt, so ist unser Ziel erreicht; denn $\varphi(x)$ ist ja für jeden Zahlenwert zwischen 0 und 1 umgrenzt, also eine Funktion unserer Funktionenmenge F. Diese Menge *aller* Funktionen kann also mit den Funktionen von F_0 nicht erschöpft sein, wie wir nachweisen wollten.

Um zu zeigen, daß $\varphi(x)$ in der Tat von allen Funktionen der Menge F_0 verschieden ist, bezeichnen wir mit ξ eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1, also mit $f_\xi(x)$ eine beliebige Funktion von F_0, und weisen nach, daß $\varphi(x)$ nicht etwa dieselbe Funktion ist wie $f_\xi(x)$. Dazu genügt es, nach den Zahlenwerten der beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $f_\xi(x)$ für einen speziellen Wert, z. B. für den Wert $x = \xi$, zu fragen. Nach der Definition von $\psi(x)$ sollte nun $\psi(x)$ für $x = \xi$ den nämlichen Zahlenwert haben, wie $f_\xi(x)$ für $x = \xi$. Der Wert von $\varphi(x) = \psi(x) + 1$ ist aber für jeden Wert von x, also auch für $x = \xi$, um die Zahl 1 größer als der zugehörige Wert von $\psi(x)$. $\varphi(x)$ ist also für $x = \xi$ verschieden von $f_\xi(x)$, d. h. die Funktionen $\varphi(x)$ und $f_\xi(x)$ sind gewiß nicht identisch. Wir haben somit in $\varphi(x)$ eine Funktion gefunden, die in F_0 nicht vorkommt; eine dem Kontinuum äquivalente Funktionenmenge F_0 kann also niemals *alle* Funktionen von F umfassen, d. h.:

Satz 5. *Die Mächtigkeit der Menge aller eindeutigen reellen Funktionen $f(x)$ (x veränderlich zwischen 0 und 1) ist verschieden von der Mächtigkeit des Kontinuums (und erst recht von der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$).*

Man pflegt die Mächtigkeit dieser Funktionenmenge mit $\mathfrak{f}$ zu bezeichnen und kann die (gemäß diesem und dem vorigen Paragraphen) einfach zu kennzeichnenden Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ unter dem Sammelnamen der „elementaren Mächtigkeiten" zusammenfassen.

Es sei besonders hervorgehoben, daß wir bei dieser Betrachtung den Begriff der Funktion in dem ganz allgemeinen, auf S. 61 gekennzeichneten Sinn gefaßt haben. Für den mit dem Begriff der *stetigen Funktion* schon vertrauten Leser wird demgegenüber die später (S. 113) zu beweisende Tatsache von Interesse sein, daß die Menge aller *stetigen* Funktionen einer reellen Veränderlichen „bloß" die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt; eine stetige Funktion stellt also gewissermaßen nur einen speziellen Ausnahmefall gegenüber einer ganz allgemeinen Funktion einer reellen Veränderlichen dar. Wir haben in der Tat bei der Konstruktion von $\psi(x)$ (und also auch von $\varphi(x)$) ein äußerst „unstetiges" Verfahren angewandt; stehen doch die Zahlenwerte von $\psi(x)$ für zwei nahe beisammen gelegene Werte von x in keinerlei besonders enger Beziehung zueinander.

Der Leser, der den Gang des geführten Beweises aufmerksam verfolgt, wird erkennen, daß er (nämlich bei der Definition der Funktion $\psi(x)$) auf dem Diagonalverfahren beruht und völlig entsprechend verläuft wie der auf S. 46ff. geführte Beweis für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

Aufgaben.

1. Entsprechend wie durch Dezimalbrüche (Grundzahl 10) lassen sich die reellen Zahlen auch durch Dualbrüche (Grundzahl 2) darstellen (vgl. S. 110). Kann man bei dieser Darstellung den Beweis des Satzes 1 noch ebenso, wie oben geschehen, durchführen und wie kann man andernfalls auch von dieser Darstellung aus zum Ziel gelangen?

2. Je eine Abbildung zwischen den Mengen

a) der reellen Zahlen zwischen a und b einerseits, derjenigen zwischen c und d andererseits (a, b, c, d beliebig)

b) der reellen Zahlen zwischen 0 und a einerseits, aller reellen Zahlen, die größer als die (positive) Zahl a sind, andererseits

soll durch eine rechnerische Vorschrift (z. B. durch rationale Funktionen) angegeben werden.

3. Man zeige, daß die Menge der irrationalen (d. h. reellen, nicht rationalen) Zahlen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt!

4. Man zeige, daß die Menge aller Punkte der Kreislinie (der Ellipse, der Hyperbel) jeweils die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt! (Bei Zugrundelegung eines geeigneten *Kurvenbegriffs* leicht weiter auszudehnen!)

5. Wie gestaltet sich der Beweis des Satzes 5, wenn die unabhängige Veränderliche x der Funktionen $f(x)$ z. B. die Gesamtheit *aller* reellen Zahlen zu durchlaufen hat?

6. Man überzeuge sich, daß die Nichtäquivalenz der Mengen C und F (S. 62f.) sich ohne wesentliche Änderung des Beweises auch dann ergibt, wenn C eine *beliebige Teilmenge* der Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 bedeutet.

Zweites Kapitel.

Das Rechnen mit Kardinalzahlen.

§ 6. Die Größenanordnung der Kardinalzahlen.

1. Definition der Größenanordnung. Den endlichen Kardinalzahlen oder Anzahlen 0, 1, 2, 3, ... reihen sich in der Mengenlehre die unendlichen Kardinalzahlen an, von denen wir in den zwei vorangehenden Paragraphen drei verschiedene kennengelernt haben, nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$. Die Entscheidung, welche von zwei *endlichen* Kardinalzahlen die kleinere und welche die größere ist, ist dem Leser wohlvertraut; man

kann sie, wie leicht einzusehen, folgendermaßen formulieren: Sind M und N zwei endliche Mengen und ist M äquivalent einer *eigentlichen* (also namentlich von N selbst verschiedenen) Teilmenge von N, so ist die Kardinalzahl von M kleiner als die Kardinalzahl von N.

Unser nächstes Ziel soll sein, auch die *unendlichen* Kardinalzahlen ihrer Größe nach anzuordnen. Wir überzeugen uns hier sogleich, daß es unmöglich ist, die eben angeführte Regel auch zur Definition der Größenordnung unendlicher Kardinalzahlen zu verwenden. Denn ist z. B. M die Menge der natürlichen Zahlen, N die Menge aller rationalen Zahlen, so ist M eine eigentliche Teilmenge von N; da M sich selber äquivalent ist, ist M äquivalent einer eigentlichen Teilmenge von N; dennoch wird man die Kardinalzahl von M nicht kleiner nennen als die von N, da ja beide Mengen abzählbar, ihre Kardinalzahlen also gleich sind. Diese Abweichung von den bei endlichen Mengen gewohnten Verhältnissen liegt wiederum daran, daß eben eine unendliche Menge sehr wohl einer eigentlichen Teilmenge von sich äquivalent sein kann (S. 23).

Zu einer brauchbaren Anordnung der unendlichen Kardinalzahlen gelangen wir dagegen, wenn wir die oben für die endlichen Kardinalzahlen festgelegte Regel ausbauen zu der folgenden

Definition. Ist die Menge M äquivalent einer Teilmenge der Menge N, während N keiner Teilmenge von M äquivalent ist, so nennt man die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von M kleiner als die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ von N, also $\mathfrak{n}$ größer als $\mathfrak{m}$. Mit den auch sonst üblichen Zeichen schreibt man hierfür $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ oder gleichbedeutend $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$.

Diese Definition, bei der es einer Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Teilmengen nicht mehr bedarf, ist offenbar eine vernünftige und zweckmäßige Festsetzung. Denn sind die in ihr enthaltenen Voraussetzungen für $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ erfüllt, so kann nicht $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, d. h. nicht $M \sim N$ sein; nach der zweiten Voraussetzung der Definition gibt es nämlich im Falle $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ keine Teilmenge von M, der N äquivalent wäre, während im Falle $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ sicherlich N einer Teilmenge von M äquivalent ist, z. B. der Menge M selbst. Ebenso überzeugt sich der Leser mittels einfacher Überlegung, daß nach der obigen Definition die Beziehungen $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ miteinander nicht verträglich sind, d. h. daß nicht etwa von den Kardinalzahlen zweier Mengen die eine gleichzeitig kleiner *und* größer sein kann als die andere; die Größenordnung ist, wie man sagt, eine *asymmetrische* Beziehung (vgl. S. 20). Ferner erkennt man leicht, daß unter drei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$, von denen $\mathfrak{m}$ kleiner als $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ kleiner als $\mathfrak{p}$ (oder gleich $\mathfrak{p}$) ist, $\mathfrak{m}$ auch kleiner ist als $\mathfrak{p}$; in Zeichen: aus $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$, d. h. die Größenordnung ist wie die Äquivalenz (S. 20) eine transitive Beziehung. Endlich leuchtet ein, daß bei der Vergleichung der Kardinalzahlen zweier Mengen jede dieser Mengen durch eine äquivalente Menge ersetzt werden darf, daß also aus $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ stets $\mathfrak{m}' < \mathfrak{n}'$ folgt. Die hiermit ausgedrückten vier Eigenschaften der Größenanordnung der Kardinalzahlen sind charakteristisch für *jede* in der Mathematik auftretende *Ordnungsbeziehung;* vgl. S. 125 und 185f. Sie sind namentlich auch erfüllt für die Beziehung „eine eigentliche Teilmenge sein" (S. 20); auf diese Tatsache gründet sich wesentlich die obige Definition.

Dagegen ist vorläufig noch die Frage offen, ob der Größenanordnung der Kardinalzahlen eine weitere, ebenso allgemeine und grundsätzliche Eigenschaft zukommt: ob nämlich von zwei verschiedenen Kardinalzahlen stets eine kleiner ist als die andere oder ob sie vielleicht unvergleichbar sein können[1]. Hierauf wird noch ausführlicher einzugehen sein (S. 76 und 205).

2. Einfachste Folgerungen. Wir benutzen die obige Definition, der auch die gewöhnliche Anordnung der *endlichen* Kardinalzahlen entspricht, vor allem zur Feststellung der Größenanordnung der Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$. Es sei also zunächst A die Menge der natürlichen Zahlen, C die Menge der reellen Zahlen, so daß $\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit von A, $\mathfrak{c}$ diejenige von C ist. Da A eine Teilmenge von C darstellt, ist A sicherlich äquivalent einer Teilmenge von C (nämlich sich selbst). Andererseits ist nach Satz 1 auf S. 29 jede Teilmenge von A entweder endlich oder doch abzählbar, so daß C gewiß keiner Teilmenge von A äquivalent sein kann. (Dies hätte übrigens auch unmittelbar aus dem Beweis der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums [S. 46ff.] erschlossen werden können.) Daher ist $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Ebenso ist $\mathfrak{c} < \mathfrak{f}$. Denn verstehen wir jetzt unter C die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1, unter F die zu Ende des vorigen Paragraphen betrachtete Menge aller reellen Funktionen $f(x)$ (x veränderlich zwischen 0 und 1), so ist zunächst C äquivalent einer Teilmenge F' von F. Wir können nämlich F' wählen als die Menge der „konstanten" Funktionen, d. h. derjenigen ganz speziellen Funktionen $f(x)$, die jeweils für alle Werte x einen und den nämlichen, überdies etwa zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlenwert besitzen, und ordnen dann jeder bestimmten Zahl c der Zahlenmenge C die Funktion $f(x) = c$ zu, d. h. diejenige Funktion, die für alle Werte von x den nämlichen festen Wert c besitzt. Diese Abbildung zwischen C und F' zeigt, daß $C \sim F'$. Um andererseits einzusehen, daß F keiner Teilmenge von C äquivalent ist, erinnern wir uns des am Schluß des vorigen Paragraphen geführten Beweises. Wir gingen dort (S. 62) aus von einer zu C äquivalenten Teilmenge F_0 von F und zeigten, daß eine solche Teilmenge F_0 niemals mit F zusammenfallen kann, weil sich (auf Grund einer Abbildung zwischen C und F_0) stets Elemente von F nachweisen lassen, die in F_0 nicht vorkommen. Solche Elemente müssen aber um so mehr vorhanden sein, wenn F_0 als zu einer *Teilmenge* von C (statt zu C selbst) äquivalent vorausgesetzt wird (vgl. Aufgabe 6 auf S. 64). Es kann also auch eine *zu einer Teilmenge von C äquivalente* Teilmenge von F nicht mit F identisch sein, d. h. F selbst ist keiner Teilmenge von C äquivalent. Hieraus und aus $C \sim F'$ folgt schließlich nach unserer Definition, daß die Mächtigkeit von C kleiner ist als die von F, wie gezeigt werden sollte.

---

[1] In den Fällen, wo für eine Ordnungsbeziehung die Unvergleichbarkeit von vornherein ausgeschlossen werden kann, läßt sich unschwer die im vorigen Absatz zuletzt genannte Eigenschaft formal aus den übrigen herleiten.

Der Leser überzeugt sich an Hand der Definition leicht, daß *die Kardinalzahl jeder endlichen Menge, d. h. jede endliche Anzahl, kleiner ist als* $\mathfrak{a}$. Ferner gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Unter den unendlichen Kardinalzahlen gibt es eine* ***kleinste****, nämlich die Kardinalzahl* $\mathfrak{a}$ *der abzählbaren Mengen.*

Denn nach Satz 4 auf S. 41 besitzt jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge; jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist andererseits nach Satz 1 auf S. 29 entweder endlich oder abzählbar. Eine gegebene unendliche Menge M, die nicht selbst abzählbar ist, besitzt demnach eine der Menge A der natürlichen Zahlen äquivalente Teilmenge, ohne selbst einer Teilmenge von A äquivalent zu sein. Daher ist nach der Definition der Größenanordnung die Kardinalzahl von M größer als $\mathfrak{a}$, wie gezeigt werden sollte.

Aus den beiden letzten Resultaten erhält man (wegen der Transitivität der Ordnungsbeziehung, siehe S. 65) das Ergebnis:

Satz 2. *Jede endliche Kardinalzahl ist kleiner als jede unendliche Kardinalzahl.*

Die sich weiter erhebende Frage, ob $\mathfrak{c}$ die nächstgrößere Kardinalzahl nach $\mathfrak{a}$ ist oder ob es eine zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ gelegene (unendliche) Kardinalzahl gibt, ist trotz erheblicher Bemühungen der Mathematiker noch ungelöst. Diese Frage stellt im wesentlichen das sogenannte *Kontinuumproblem* dar (vgl. S. 205). Sie fällt offenbar zusammen mit der Frage, ob jede nichtabzählbare unendliche Teilmenge des Kontinuums (d. h. der Menge der reellen Zahlen oder aller Punkte einer Geraden) dem Kontinuum selbst äquivalent ist, oder ob es unendliche Teilmengen gibt, die eine zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ liegende Kardinalzahl besitzen. Cantor war von Anfang an (vgl. [6]) entschieden der Meinung, daß $\mathfrak{c}$ die zweitkleinste Kardinalzahl sei. Es hat nicht an Versuchen hervorragender Forscher gefehlt, diese Vermutung oder ihr Gegenteil zu beweisen; so sind zur Zeit des dritten internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg (1904) gleichzeitig Beweisversuche für beide (einander widersprechende) Annahmen gemacht worden, die sich später als nicht stichhaltig erwiesen. Auch ein Vorstoß, den neuerdings Hilbert [9] zum Beweis der Vermutung Cantors gemacht hat, kann noch nicht als geglückt gelten. Ebensowenig ist bekannt, ob zwischen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ eine weitere Kardinalzahl existiert.

3. Satz von Cantor. Wohl hat dagegen schon Cantor die weitere Frage entschieden, ob es noch eine größere Mächtigkeit als $\mathfrak{f}$ gibt. Es gilt nämlich der höchst allgemeine und weitgehende Satz (zuweilen als *Satz von* Cantor bezeichnet):

Satz 3. *Zu jeder beliebigen Menge* M *läßt sich eine Menge von größerer Mächtigkeit angeben, nämlich z. B. die Menge* $\mathfrak{U}M$ *aller Teilmengen*

von M. Es gibt also keine größte Mächtigkeit; die mit $\mathfrak{a}$ beginnende Reihe der unendlichen Mächtigkeiten ist nach obenhin unbegrenzt.

Ist M eine beliebige endliche oder unendliche Menge, so wollen wir die Menge aller verschiedenen Teilmengen (Untermengen) von M nach ZERMELO mit $\mathfrak{U}M$ (Abkürzung für: Menge aller Untermengen von M) oder auch kurz mit U bezeichnen. Jedes Element von $\mathfrak{U}M$ ist eine Teilmenge von M und umgekehrt ist jede Teilmenge von M (M selbst sowie die Nullmenge eingeschlossen) ein Element von $\mathfrak{U}M$. Es kann und soll nun gezeigt werden, daß die Mächtigkeit von U größer ist als die von M, und zwar wird wieder das Diagonalverfahren (S. **46** f.) den Nerv des Beweises bilden[1].

Wir zeigen vor allem, daß die Mächtigkeiten der Mengen M und U überhaupt voneinander *verschieden* sind; damit wird der entscheidende (und verhältnismäßig schwierige) Teil des Beweises erledigt sein. Es sei U_0 eine *zu M äquivalente* Teilmenge von U. Wir werden auf Grund dieser Annahme ein nicht in U_0 vorkommendes Element von U konstruieren; damit wird dargetan sein, daß eine zu M äquivalente Menge von Teilmengen von M nie mit U zusammenfallen, also nie *alle* Teilmengen von M umfassen kann. Es sei übrigens im voraus bemerkt, daß die Betrachtung ganz entsprechend und mit dem gleichen Ergebnis durchgeführt werden kann, wenn man U_0 als *zu einer Teilmenge von M* (statt zu M selbst) *äquivalent* voraussetzt. Wir werden später noch von dieser Bemerkung Gebrauch machen (die ohnehin plausibel erscheint, da nach der folgenden Betrachtung U weit umfassender ist als M, um so mehr also weit umfassender als eine Teilmenge von M); nur um der einfacheren Darstellung willen halten wir uns nachstehend an die Annahme $U_0 \sim M$.

Wir denken uns zunächst eine beliebige Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen M und U_0 gewählt und von nun an festgehalten; sie ordnet jedem Element m von M ein Element u von U_0 (d. h. eine gewisse Teilmenge u von M) umkehrbar eindeutig zu. Auf Grund dieser Abbildung werden wir eine Teilmenge u' von M angeben, die in U_0 nicht vorkommt. Hierzu bedenken wir vor allem, daß für irgend zwei nach unserer Abbildung einander entsprechende Elemente, z. B. m_1 und u_1, zwei Fälle möglich sind: die Teilmenge u_1 von M enthält *entweder* m_1 als Element *oder* sie enthält m_1 nicht. Wir können daher die Elemente von M in zwei Klassen einteilen: jedes Element der ersten Klasse ist in dem ihm vermöge unserer Abbildung entsprechenden Element von U_0 (das eine Teilmenge von M ist) selbst als Element enthalten; jedes Element der zweiten Klasse ist in dem entsprechenden Element von U_0 nicht enthalten. (Als Beispiel sei vermerkt, daß, falls z. B. die Nullmenge und M selbst in U_0 auftreten, in der ersten Klasse das Element von M vorkommt, das der Menge M selbst zugeordnet ist, in der zweiten Klasse aber das Element von M, das der Nullmenge entspricht.)

Wir betrachten nun *sämtliche Elemente der zweiten Klasse* und bezeichnen die durch ihre Gesamtheit gebildete Menge mit u'; u' ist eine — möglicherweise auf die Nullmenge zusammenschrumpfende — Menge gewisser Elemente von M, also eine Teilmenge von M oder ein Element von U. Es soll gezeigt werden, daß das Element u' von U in der Menge U_0 keinesfalls vorkommt.

---

[1] Vgl. HESSENBERG [1], S. 41f., und ZERMELO [3], S. 276; der Grundgedanke des Beweisverfahrens findet sich bei CANTOR [11]. Übrigens hatte CANTOR schon 1883 in [7 V] die Existenz unendlichvieler verschiedener unendlicher Kardinalzahlen bewiesen, aber mit ganz anderen, verwickelteren Hilfsmitteln (aus der Theorie der „Wohlordnung"; siehe S. 193).

In der Tat: kommt u' in U_0 vor, so gehört das dem Element u' von U_0 zugeordnete Element m' von M entweder zur ersten oder zur zweiten der im vorletzten Absatz gekennzeichneten Klassen. Gehört m' zur ersten Klasse, so besagt dies: m' ist ein Element von u'; u' enthält aber nach Voraussetzung nur Elemente der zweiten Klasse und keines der ersten, kann also m' nicht enthalten. Daher könnte m' nur zur zweiten Klasse gehören, so daß das Element m' in der ihm zugeordneten Teilmenge u' nicht enthalten wäre. Nach der Definition enthält aber u' *alle* Elemente der zweiten Klasse; es müßte also auch m' in u' vorkommen. Dieser Widerspruch zeigt, daß m' auch nicht der zweiten Klasse angehören kann, d. h. daß es überhaupt kein Element m' in M gibt, dem das Element u' von U vermöge unserer Abbildung entsprechen kann. Die Teilmenge u' von M kommt also wirklich in U_0 nicht vor, wie wir zeigen wollten.

Der Leser lasse sich durch die auf m' bezügliche, zunächst paradox anmutende Betrachtung nicht einschüchtern, sondern mache sie sich gründlich zu eigen; er wird sich das Verfahren etwa dahin zurechtlegen, daß bei dem vorausgesetzten Vorkommen von u' in U_0 dieser Menge u' (1) weder die Eigenschaft, m' zu enthalten, (2) noch die Eigenschaft, m' *nicht* zu enthalten, zukommt. Nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten folgt aus (1), daß m' *nicht* Element von u' ist, aus (2), daß m' es wohl ist; der damit erzielte Widerspruch widerlegt die gemachte Voraussetzung. Ein gleicher Gedankengang wird uns später (S. 211) nochmals begegnen, dort aber in völlig anderem Licht erscheinen.

Nachdem so nachgewiesen ist, daß die Mengen M und U nicht äquivalent, also nicht von gleicher Mächtigkeit sein können, ist es ein leichtes, zu zeigen, daß die Mächtigkeit von M *kleiner* ist als diejenige von U. Zum Nachweis dessen ist zunächst eine Teilmenge von U anzugeben, der M äquivalent ist; eine solche erhalten wir einfach durch Zusammenfassung aller derjenigen Elemente von U — d. h. aller derjenigen Teilmengen von M —, die nur je *ein einziges* Element von M enthalten; ist $\{a\}$ irgendeine derartige Teilmenge von M und ordnen wir ihr das (begrifflich scharf von der Menge $\{a\}$ zu trennende) Element a von M zu und umgekehrt, so ist damit eine Abbildung zwischen M und einer Teilmenge von U gegeben. Andererseits geht aus der Bemerkung von der Mitte der vorigen Seite hervor, daß U keiner Teilmenge von M äquivalent sein kann. Damit ist der Beweis des Satzes 3 vollendet.

Aus dem Satz von CANTOR schließen wir: Ist M eine beliebige unendliche Menge von einer Kardinalzahl $\mathfrak{k}$, so erhalten wir in $\mathfrak{U}M = U$ eine Menge von einer Kardinalzahl $\mathfrak{m} > \mathfrak{k}$, in $\mathfrak{U}U$ wiederum eine Menge von einer Kardinalzahl $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ und so endlos weiter. Die hierin hervortretende Tatsache, daß es unendlichviele verschiedene unendliche Kardinalzahlen gibt, ist namentlich aus folgender Erwägung heraus außerordentlich bedeutsam: Für die naive Vorstellung gibt es nur éin „Unendlichgroßes", innerhalb dessen weitere Größenunterschiede nicht mehr scharf abgegrenzt werden können. Demgegenüber hat sich im vorigen Paragraphen zunächst erwiesen, daß es *verschiedene* unendliche Kardinalzahlen gibt. Unser letztes Ergebnis zeigt aber sogar, daß es *unendlichviele voneinander scharf unterscheidbare* unendliche Kardinalzahlen gibt, daß also in dem Reich derjenigen „unendlichgroßen Zahlen", die wir in den unendlichen Kardinalzahlen kennengelernt haben, eine mindestens ebenso große Mannigfaltigkeit herrscht als im Bereich der gewöhnlichen endlichen Kardinalzahlen; in Wirklichkeit

herrscht sogar eine noch unvergleichlich viel größere Mannigfaltigkeit (vgl. S. **108** und **193**).

Wie besonders hervorgehoben zu werden verdient, stellt unser Satz nicht etwa ein bloßes „Existenztheorem“ dar; er besagt nicht nur, daß zu einer gegebenen Kardinalzahl eine größere *existiert*, sondern er gibt auch ein einfaches Verfahren an, eine solche *wirklich zu bilden* (vgl. indes S. **326**).

Es werde noch betont, daß der bewiesene Satz natürlich auch für eine *endliche* Menge M und ihre Kardinalzahl gilt; ist doch M nicht etwa als unendlich vorausgesetzt worden. Indes besagt unser Satz für endliche Mengen nur eine in der Kombinatorik elementar bewiesene Tatsache (vgl. S. 108). Daß und in welcher Weise er insbesondere für die kleinsten Mengen zutrifft, nämlich für solche mit keinem oder einem einzigen Element, zeigen die Beispiele $M = 0$, also $U = \{0\}$ und $M = \{m\}$, $U = \{0, \{m\}\}$, die beim Übergang zu den Kardinalzahlen von M und U besagen[1]: $0 < 1$ und $1 < 2$. Der Leser wird sich den Beweisgang unseres Satzes besonders deutlich an Hand einer endlichen Menge M als Beispiel klarmachen.

4. Der Äquivalenzsatz. Eine grundsätzliche Frage in bezug auf die Größenordnung der Kardinalzahlen ist bisher noch unerledigt geblieben. Sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ irgend zwei Kardinalzahlen, so fragt es sich, ob ebenso wie bei den endlichen Anzahlen stets einer der drei (sich nach S. 65 ausschließenden) Fälle $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ vorliegt („Trichotomie“) oder ob es noch weitere Möglichkeiten gibt, d. h. ob es vielleicht vorkommen kann, daß zwei verschiedene Kardinalzahlen *unvergleichbar* sind, so daß keine von ihnen kleiner ist als die andere.

Um der Beantwortung dieser Frage näherzukommen, wollen wir, ausgehend von unserer Definition der Größenordnung, alle möglichen Vergleichsbeziehungen zwischen zwei gegebenen Mengen M und N nach einem elementaren Verfahren der allgemeinen Logik durchdenken; nach einem Verfahren, dessen Verwendung für den vorliegenden und manchen ähnlichen Zweck in der Mengenlehre bedeutungsvoll ist und wohl erst auf einen Brief CANTORS aus den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts zurückgeht[2]. Es kann zunächst Teilmengen von M geben, die zu N äquivalent sind, und *gleichzeitig* Teilmengen von N, die zu M äquivalent sind (*erster Fall*); ferner kann es Teilmengen von M geben, die zu N äquivalent sind, während keine zu M äquivalente Teilmenge von N existiert (*zweiter Fall*); weiter

---

[1] Hier bedeutet natürlich 0 nicht wie vorher die Nullmenge, sondern — da vor dem $<$-Zeichen stehend — die Kardinalzahl der Nullmenge, also die *Zahl* Null.

[2] Siehe SCHOENFLIES [11], S. 101/2; das Verfahren findet sich mit einer grundsätzlich unwichtigen Abänderung auch 1898 bei BOREL [1], S. 102f.

kann es umgekehrt sein, daß die Existenz einer zu N äquivalenten Teilmenge von M ausgeschlossen ist, während es Teilmengen von N gibt, die zu M äquivalent sind (*dritter Fall*); endlich ist es denkbar, daß weder eine zu N äquivalente Teilmenge von M noch eine zu M äquivalente Teilmenge von N existiert (*vierter Fall*). Diese vier Fälle bilden offenbar eine sogenannte logische Disjunktion, d. h. sie erschöpfen, einander gegenseitig ausschließend, alle überhaupt denkbaren Möglichkeiten (ohne daß diese nun auch wirklich alle vorkommen müßten).

Der bequemen Veranschaulichung diene das folgende Schema, in dem $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Kardinalzahlen der Mengen M und N bezeichnen; die darin vermerkten Erklärungen des ersten und des vierten Falls werden alsbald begründet.

	N einer Teilmenge von M äquivalent	N keiner Teilmenge von M äquivalent
M einer Teilmenge von N äquivalent	erster Fall ($M \sim N$, d. h. $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$)	dritter Fall ($\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$)
M keiner Teilmenge von N äquivalent	zweiter Fall ($\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$)	vierter Fall ($\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ unvergleichbar)

Von den aufgezählten Fällen haben wir uns nur noch mit dem ersten und dem vierten näher zu beschäftigen. Denn nach der Definition der Größenanordnung von Kardinalzahlen (S. 65) besagt ja der zweite Fall einfach, daß N eine kleinere Kardinalzahl besitzt als M, während im dritten Fall die Kardinalzahl von M kleiner ist als die von N. Über den ersten Fall gibt der von CANTOR schon frühzeitig vermutete Äquivalenzsatz Auskunft; er besagt:

Satz 4. *Ist M einer Teilmenge von N und gleichzeitig N einer Teilmenge von M äquivalent, so sind die Mengen M und N selbst einander äquivalent, ihre Kardinalzahlen also gleich.*

Der Äquivalenzsatz hat für die Vergleichung von Mengen sehr wesentliche Bedeutung. In gar manchen Fällen kann nämlich für zwei Mengen leicht gezeigt werden, daß jede einer Teilmenge der anderen äquivalent ist, während ihre Äquivalenz nur schwierig direkt, d. h. durch Herstellung einer Abbildung, nachzuweisen ist. Ein bezeichnendes und wichtiges Beispiel werden wir später (S. 113f.) behandeln.

Um zu einem Beweis des Äquivalenzsatzes zu gelangen, gehen wir von den Begriffen der Summe und des Durchschnitts von Mengen aus; ersterer wird im nächsten Paragraphen noch eine eingehendere Behandlung erfahren.

Sind zunächst N und P irgend zwei Mengen, so versteht man unter ihrer Summe oder Vereinigungsmenge die Menge aller Elemente, die *mindestens in einer* der beiden Mengen enthalten sind; unter ihrem Durchschnitt die Menge aller Elemente, die *in beiden Mengen gleich-*

zeitig vorkommen. Man bezeichnet die Vereinigungsmenge mit $\mathfrak{S}\{N, P\}$ oder auch, da es sich gewissermaßen um die Summe der Elemente von N und derjenigen von P handelt, mit $N + P$, den Durchschnitt dagegen mit $\mathfrak{D}\{N, P\}$ oder $[N, P]$[1]. Bedeutet z. B. N die Menge aller Punkte des liegenden, P die Menge der Punkte des aufrechtstehenden Rechtecks in Abb. 7, so umfaßt die Summe alle Punkte der ganzen kreuzartigen Figur, der Durchschnitt aber nur die Punkte des in der Mitte gelegenen Quadrats.

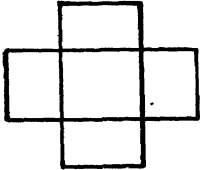



Abb. 7.

Sind nicht nur zwei Mengen, sondern ist eine beliebige (endliche oder unendliche) *Menge* $M = \{N, P, R, \ldots\}$ gegeben, deren Elemente $N, P, R, \ldots$ selbst Mengen sind, so versteht man entsprechend unter der *Summe* oder *Vereinigungsmenge* $\mathfrak{S}M = \mathfrak{S}\{N, P, R, \ldots\} = N + P + R + \ldots$ diejenige Menge, welche alle Elemente umfaßt, die ***mindestens in einer*** der Mengen $N, P, R, \ldots$ vorkommen; der Durchschnitt $\mathfrak{D}M = \mathfrak{D}\{N, P, R, \ldots\}$ dagegen ist die Menge aller derjenigen Elemente, die ***gleichzeitig in allen*** Mengen $N, P, R, \ldots$ enthalten sind. Die Vereinigungsmenge entspricht dem logischen „oder" (latein. vel), der Durchschnitt dem logischen „und" („sowohl — als auch").

Ist z. B. $M_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $M_2 = \{2, 3, 4, \ldots\}$, $M_3 = \{3, 4, 5, \ldots\}$ usw. und bedeutet $M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$ die abzählbare Menge all dieser (selbst sämtlich abzählbaren) Mengen, so ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ offenbar gleich $\{1, 2, 3, \ldots\}$ (also gleich M_1), dagegen der Durchschnitt $\mathfrak{D}M$ gleich der Nullmenge; denn es gibt keine, wenn auch noch so große natürliche Zahl, die gleichzeitig in *allen* Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots$ vorkommt, obgleich jede einzelne dieser Mengen sogar unendlichviele Zahlen enthält. Um ein anderes Beispiel für den Durchschnitt einer abzählbaren Menge von Mengen zu gewinnen, wähle man für M_1 die Menge aller (etwa auf diesem Papierblatt denkbaren) geschlossenen ebenen Polygone (Vielecke), für M_2 die Menge all dieser Polygone mit Ausnahme der gleichseitigen Dreiecke unter ihnen,

---

[1] Vielfach wird, ebenso wie die Summenbildung durch das Pluszeichen, so die Durchschnittsbildung durch den Malpunkt bezeichnet, zuweilen sogar (namentlich in der französischen Literatur) statt „Durchschnitt" der Ausdruck „Produkt" gebraucht. Hierfür sprechen gewichtige Gründe (vgl. Aufg. 415 auf S. 77 sowie auch die Bezeichnungsweise der Logistik, siehe § 15, Nr. 5, und man wird in der Regel so verfahren in den *Anwendungsgebieten* der Mengenlehre, wo der Durchschnitt eine höchst wichtige Rolle spielt, dagegen die Verbindungsmenge (S. 89) durchaus zurücktritt. Für die in diesem Buch im Vordergrund stehende *theoretische* (*abstrakte*) Mengenlehre dagegen ist die Verbindungsmenge weit bedeutungsvoller als der Durchschnitt und da bietet es dem Verständnis eine wesentliche Erleichterung, die Bezeichnungen „Produkt" und „mal" der Verbindungsmenge vorzubehalten, mittels deren (vgl. S. 91) die Multiplikation von Kardinalzahlen definiert wird.

für M_3 die Menge aller Polygone außer den gleichseitigen Dreiecken und den Quadraten, für M_4 die Menge aller Polygone außer den regelmäßigen 3-, 4- und 5-Ecken, usw.; der Durchschnitt $\mathfrak{D} M = \mathfrak{D}\{M_1, M_2, \ldots\}$ enthält in diesem Fall alle Polygone mit Ausnahme der regelmäßigen. Beim vorliegenden Beispiel sind übrigens die einzelnen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ keineswegs abzählbar.

Die beiden vorstehenden Beispiele der Durchschnittsbildung sind zur Veranschaulichung des Folgenden so gewählt, daß jedesmal eine abzählbare Menge von Mengen $M_1, M_2, \ldots$ auftritt und daß von diesen Mengen jede eine Teilmenge der vorangehenden ist. Die Beispiele zeigen, daß der Durchschnitt solcher Mengen sich entweder auf die Nullmenge reduzieren kann oder auch nicht.

Es genüge hier ohne nähere Ausführung, die dem Leser überlassen bleibe (vgl. S. 85f.), der unmittelbar einleuchtende Hinweis darauf, daß es bei der Bildung von Summe und Durchschnitt weder auf die Reihenfolge, in der dabei die in M enthaltenen Mengen herangezogen werden, noch auf eine Zerlegung der Aufgabe in einzelne Teilschritte (vermittels Zusammenfassung gewisser Mengen untereinander durch Klammern) ankommen kann.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir gemäß dem zu beweisenden Satze 4 von zwei Mengen M und N aus, von denen M einer eigentlichen Teilmenge N_1 von N, N einer eigentlichen Teilmenge M_1 von M äquivalent ist[1]. Der Äquivalenzsatz besagt, daß M und N selbst einander äquivalent sind.

Wir wollen den Satz vor allem auf eine noch einfachere Form bringen. Ist Φ eine Abbildung zwischen N und M_1, so wird die eigentliche Teilmenge N_1 von N durch Φ von selbst auf eine eigentliche Teilmenge M_2 von M_1 abgebildet; es ist also $N_1 \sim M_2$. Da M_1 eine eigentliche Teilmenge von M ist, so ist um so mehr M_2 eine eigentliche Teilmenge von M. Andererseits folgt aus $M \sim N_1$ und $N_1 \sim M_2$ nach S. 20, daß die Menge M ihrer eigentlichen Teilmenge M_2 äquivalent ist. Der Äquivalenzsatz wird bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß $M \sim M_1$; denn wegen $M_1 \sim N$ folgt dann auch $M \sim N$. Es kommt also nur darauf an, die folgende, an sich sehr einleuchtende Tatsache nachzuweisen: *Ist die Menge M äquivalent ihrer eigentlichen Teilmenge M_2, so ist sie auch äquivalent jeder Menge M_1 „zwischen M und M_2", d. h. jeder eigentlichen Teilmenge M_1 von M, die ihrerseits M_2 als eigentliche Teilmenge enthält.*

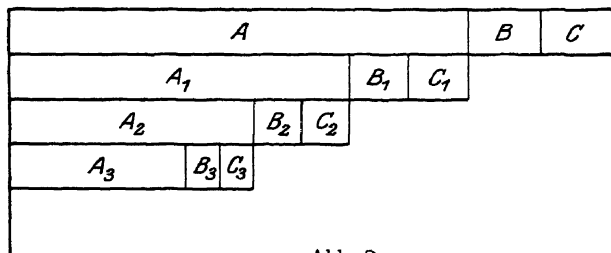
---

[1] Ist N_1 gleich N oder M_1 gleich M, so besagt dies schon, daß $M \sim N$, daß also der Äquivalenzsatz in diesen Fällen zutrifft. Man kann sich daher auf die Betrachtung *eigentlicher* Teilmengen N_1 und M_1 beschränken, womit der Fall *endlicher* Mengen M und N offenbar ausgeschlossen ist; für endliche Mengen ist der Satz in der Tat trivial, sobald man weiß, daß eine endliche Menge keiner eigentlichen Teilmenge von sich äquivalent sein kann (S. 22).

Zwecks einfacherer Schreibweise bezeichnen wir von nun an die Menge M_2 mit A, ferner die Menge aller in M_2 nicht vorkommenden Elemente von M_1 mit B, endlich die Menge aller in M_1 nicht vorkommenden Elemente von M mit C. Unter Benutzung des Begriffs der Summe können wir dann statt M_1 auch $A + B$, statt M auch $A + B + C$ schreiben. Unser Ziel ist, aus der nach Voraussetzung geltenden Äquivalenz $A + B + C \sim A$ die weitere Beziehung $A + B + C \sim A + B$ zu folgern. Wir benutzen zu diesem Zweck folgenden Gedankengang, der sich durch seine Anschaulichkeit auszeichnet, mag er auch hinsichtlich der logischen Schlußfolge nicht den einfachsten Beweis darstellen.

Es sei Ψ eine Abbildung der Menge $A + B + C$ auf die ihr äquivalente Menge A. Wenden wir diese Abbildung auf die drei Teilmengen A, B, C der Menge $A + B + C$ einzeln an, so wird A auf eine äquivalente Menge A_1, B auf eine äquivalente B_1, C auf eine äquivalente C_1 abgebildet; A_1, B_1 und C_1 sind Teilmengen von A, die kein (auch nur zweien von ihnen) gemeinsames Element enthalten, und stellen zusammengenommen die Menge A dar, d. h. es gilt: $A_1 + B_1 + C_1 = A$. Weiter wenden wir (*zweiter Schritt*) eine Abbildung Ψ_1, die die Menge A der äquivalenten Menge A_1 zuordnet[1], statt insgesamt auf A im einzelnen auf die Teilmengen A_1, B_1, C_1 von A an; dabei werde A_1 auf die äquivalente Menge A_2, B_1 auf die äquivalente B_2, C_1 auf die äquivalente C_2 abgebildet; dann sind A_2, B_2 und C_2 gewisse Teilmengen von A_1, die paarweise keine gemeinsamen Elemente aufweisen und zusammen die Menge A_1 darstellen, so daß $A_2 + B_2 + C_2 = A_1$. Wird ebenso (*dritter Schritt*) eine zwischen A_1 und A_2 bestehende Abbildung Ψ_2 nunmehr einzeln auf die Teilmengen A_2, B_2, C_2 von A_1 angewandt, so möge A_2 auf die äquivalente Menge A_3, B_2 auf die äquivalente B_3, C_2 auf die äquivalente C_3 abgebildet werden; A_3, B_3 und C_3 sind Teilmengen von A_2 ohne gemeinsame Elemente und es ist $A_3 + B_3 + C_3 = A_2$. Da $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \ldots$, so werden diese Mengen bei der Fortführung des Prozesses, der von ihnen ständig Teile abspaltet, doch niemals erschöpft (ja nicht einmal kleiner ihrer Kardinalzahl nach; vgl. die Mengen M_1, M_2, M_3, ... im ersten Beispiel auf S. 72); wir können und wollen uns daher dieses Verfahren *unbegrenzt* fortgesetzt denken und veranschaulichen uns seine ersten Schritte durch Abb. 8. Ferner verzeichnen wir noch die aus der Definition der Mengen C_1, C_2 usw. folgenden Äquivalenzen: $C \sim C_1 \sim C_2 \sim C_3 \ldots$.

Abb. 8.

Wir führen endlich eine letzte Menge ein. Es kann sein, daß in der Menge A sich Elemente befinden, die gleichzeitig *allen* Mengen A, A_1, A_2, ... angehören (von denen ja jede eine eigentliche Teilmenge der vorangehenden ist); gleichviel ob solche Elemente vorhanden sind oder nicht (vgl. die Beispiele auf S. 72, wollen wir den Durchschnitt all dieser Mengen mit D bezeichnen; D ist also die Nullmenge, falls keine gemeinsamen Elemente existieren. Dann läßt sich offenbar (vgl. Abb. 8)[2] die ursprünglich gegebene Menge $A + B + C$ auffassen als die Summe

[1] Die Zuordnungsvorschrift Ψ_1, die die Abbildung zwischen A und A_1 vermittelt, kann übrigens offenbar als ein Teil der Zuordnungsvorschrift Ψ zwischen $A + B + C$ und A gewählt werden; ebenso die Abbildung Ψ_2 als ein Teil von Ψ_1 usw.

[2] Will man sich in Abb. 8 jeden der beiden Fälle ($D = 0$ oder nicht) veranschaulichen, so hat man sich im ersten Fall D als ein jeweils auf die linke Be-

der Menge D und der unendlichvielen Mengen $C, B, C_1, B_1, C_2, B_2, \ldots$, unter denen keine ($D$ eingeschlossen) mit einer anderen ein Element gemeinsam hat. Ebenso können wir die Menge $A + B$ betrachten als die Summe der Menge D und der unendlichvielen Mengen $B, C_1, B_1, C_2, B_2, C_3, \ldots$ oder — was bis auf die (für die Bildung der Summe gleichgültige) Reihenfolge das nämliche ist — als die Summe der unendlichvielen Mengen $D, C_1, B, C_2, B_1, C_3, B_2$ usw. Unser Ziel, nämlich der Nachweis der Äquivalenz zwischen $A + B + C$ und $A + B$, ist erreicht, wenn wir eine Abbildung zwischen diesen beiden Mengen herstellen können.

Um eine solche Abbildung zu ermöglichen, genügt es offenbar, zunächst die Mengen $D, C, B, C_1, B_1, \ldots$ und $D, C_1, B, C_2, B_1, \ldots$, als deren Summen wir $A + B + C$ und $A + B$ auffassen gelernt haben, einander paarweise in umkehrbar eindeutiger Weise zuzuordnen und dann eine Abbildung zwischen je zwei solchen einander zugeordneten Mengen herzustellen. Der Inbegriff all dieser unendlichvielen Abbildungsvorschriften wird eine Abbildung zwischen den beiden Mengen $A + B + C$ und $A + B$ darstellen, wesentlich deshalb, weil jedes Element von $A + B + C$ einer und *nur einer einzigen* der Mengen $D, C, B, C_1, B_1, \ldots$ angehört; deshalb können wir nämlich immer die für die betreffende eindeutig bestimmte Menge zuständige Abbildung zweifelsfrei wählen. Jene paarweise Zuordnung von Mengen wollen wir nun entsprechend folgendem Schema vornehmen:

$$\begin{array}{rccccccccc}
A + B + C: & D & C & B & C_1 & B_1 & C_2 & B_2 & C_3 & B_3 \ldots \\
& \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
A + B: & D & C_1 & B & C_2 & B_1 & C_3 & B_2 & C_4 & B_3 \ldots
\end{array}$$

Es soll also jede der Mengen $D, B, B_1, B_2, \ldots$ sich selbst, von den Mengen C, C_1, C_2 usw. dagegen der Bestandteil C von $A + B + C$ dem Bestandteil C_1 von $A + B$, der Bestandteil C_1 von $A + B + C$ dem Bestandteil C_2 von $A + B$ usw. zugeordnet werden. Die Möglichkeit der Abbildung zwischen je zwei in dieser Weise einander zugeordneten Mengen ist nun für die Mengen $D, B, B_1, \ldots$ trivial, da hier nur jedes einzelne Element sich selbst zugeordnet zu werden braucht; für die Mengen $C, C_1, \ldots$ folgt die Möglichkeit der paarweisen Abbildung aus den oben (S. 74) hergeleiteten Äquivalenzen $C \sim C_1 \sim C_2 \ldots$. Eine Abbildung zwischen den Mengen $A + B + C$ und $A + B$, d. h. zwischen M und M_1, ist also hergestellt, der Äquivalenzsatz somit bewiesen.

Der vorgeführte Gedankengang folgt dem ersten, von F. Bernstein in Cantors mathematischem Seminar in Halle gegebenen Beweis des Äquivalenzsatzes (zuerst veröffentlicht 1898 in Borel [1], S. 103ff.). Der Beweis macht wesentlich Gebrauch von der Folge der natürlichen Zahlen, wie sie in der abgezählten Menge $\{C, B, C_1, B_1, C_2, B_2, \ldots\}$ verhüllt auftritt. Das Wesentliche des Beweises liegt offenbar darin, daß von den gegebenen unendlichen Mengen M und N, deren Kardinalzahl ganz beliebig ist, sich jedenfalls je *abzählbar unendlichviele* Mengen derart abspalten lassen, daß sowohl diese wie auch die übrigbleibenden Reste (oben D) paarweise äquivalent sind. Ein anderer besonders

---

grenzungsstrecke der Rechtecke $A, A_1, \ldots$ zusammengeschrumpftes Rechteck zu denken (analog dem ersten Beispiel auf S. 72). Im zweiten Fall ist D als ein gleichgroßes Teilrechteck der Rechtecke $A, A_1, \ldots$ zu denken, jeweils an deren linker Begrenzung beginnend; die Rechtecke $A_1, A_2, \ldots$ nehmen dann in einem gewissen (asymptotischen) Sinn gegen das Teilrechteck D ab, ähnlich wie die Mengen von Polygonen $M_1, M_2, \ldots$ auf S. 72f. gegen $\mathfrak{D}M$.

einfacher Beweis rührt von J. König [4] her[1]. Ein etwa gleichzeitig mit Bernstein von E. Schröder gegebener Beweis hat sich als irrig erwiesen (vgl. Korselt [3]). Von Korselt (vgl. [3]) und anderen stammen Beweise des Äquivalenzsatzes, die ein Zurückgreifen auf die natürlichen Zahlen und ihre Eigenschaften zu vermeiden suchen, dafür aber zum Teil wesentlich abstrakteren Charakter besitzen; siehe die Literaturangaben bei Schoenflies [8], S. 34—39, und bei J. König [5], S. 219.

Wir wollen den Äquivalenzsatz noch in einer anderen Form aussprechen, die für die Vergleichung von Kardinalzahlen vielfach nützlich ist. Sind M und N zwei Mengen und ist M einer Teilmenge von N äquivalent, so bestehen (vgl. das Schema auf S. 71) die beiden einander ausschließenden Möglichkeiten: N ist entweder einer gewisssen Teilmenge von M äquivalent oder keiner Teilmenge von M äquivalent. Im ersten Fall ist nach dem Äquivalenzsatz die Kardinalzahl von M gleich der von N, im zweiten Fall nach der Definition der Größenanordnung jene kleiner als diese. Es gilt also:

Satz 5. *Sind M und N Mengen mit den Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ und ist M einer Teilmenge von N äquivalent, so ist $\mathfrak{m}$ gleich oder kleiner als $\mathfrak{n}$ (in Zeichen: $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$), und umgekehrt.*

Man kann hiernach die Größenanordnung der Kardinalzahlen auch in folgender Form ausdrücken, die nach den Bemerkungen über die Größenanordnung der endlichen Zahlen (S. 64f.) besonders naturgemäß erscheinen wird: Für zwei *nichtäquivalente* Mengen M und N heißt die Kardinalzahl von M kleiner als die von N, falls M einer Teilmenge von N äquivalent ist.

5. Das Problem der Vergleichbarkeit. Nachdem so die drei ersten der auf S. 70f. angeführten Fälle erledigt sind, bleibt nur mehr der vierte Fall zu betrachten, der dem Leser schon bei kurzer Überlegung als recht paradox erscheinen wird. Denn daß von zwei gegebenen Mengen *keine* eine Teilmenge aufweisen sollte, die zur anderen Menge äquivalent ist, würde die *Unvergleichbarkeit* der beiden Mengen und damit auch ihrer Kardinalzahlen bedeuten und unseren sonstigen Vorstellungen von Zahlen als vergleichbaren „Größen" scharf widersprechen. Es hat eines erst verhältnismäßig spät bewiesenen Satzes, des auf S. 195ff. zu besprechenden Wohlordnungssatzes, bedurft, um den strengen Nachweis zu führen, daß dieser vierte Fall überhaupt nicht vorkommen kann (vgl. S. 205). Freilich hatte schon Cantor diese Tatsache behauptet und er hatte auch erkannt, daß sie nur durch tiefliegende Betrachtungen bewiesen werden könne; doch ist ihm

[1] Vgl. für Fortbildungen des Gedankengangs dieses Beweises Banach [1] und D. König [1] sowie die an letzterer Stelle angegebene Literatur, ferner für den ganzen Gedankenkreis (Eigenschaften der eindeutigen Abbildungen) Sierpiński [4] und Lindenbaum-Tarski [1], § 2. Siehe auch Lindenbaums Verallgemeinerungen des Äquivalenzsatzes in der zuletzt genannten Arbeit, S. 302f.

ein vollständiger Nachweis nicht gelungen. Nehmen wir dieses Ergebnis hier vorweg, so gelangen wir zu dem abschließenden und einfachen Resultat, von dem wir natürlich vorläufig keinen Gebrauch machen:

Sind M und N irgend zwei Mengen, so sind entweder M und N äquivalent oder M besitzt eine kleinere Kardinalzahl als N oder eine größere Kardinalzahl als N. Von zwei verschiedenen Kardinalzahlen ist also stets eine kleiner als die andere.

Aufgaben. 1. Man beweise, anknüpfend an die Definition der Größenanordnung, die auf S. 65 ausgesprochenen Behauptungen: „$\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ sind miteinander unverträglich" und „aus $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{p}$ folgt stets $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$"!

2. Zum zweiten Absatz des Beweises von Satz 3 soll gezeigt werden, daß es jedenfalls Elemente der zweiten Klasse gibt (also u' von 0 verschieden ist), falls man unter U_0 die Menge U selbst versteht (d. h. falls man den Beweis auf indirektem Wege führt).

3. Inwiefern gestattet Satz 5 eine begriffliche Vereinfachung des Beweises des Satzes 3 (sowie auch der Ungleichungen $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} < \mathfrak{f}$)?

4. Man beweise das die Summen- und Durchschnittsbildung mit einander verknüpfende (und übrigens noch weit allgemeiner formulierbare) „distributive" Gesetz (vgl. Fußnote 1 von S. 78):

$$[A,\ B_1 + B_2 + B_3 + \ldots] = [A,\ B_1] + [A,\ B_2] + [A,\ B_3] + \ldots$$

5. Ebenso beweise man das (offenbar mit dem gleichen Recht als „distributiv" zu bezeichnende) Gesetz:

$$A + [B,\ C] = [A + B,\ A + C],$$

dessen vollkommene Analogie mit dem in der vorigen Aufgabe genannten Gesetz (für zwei Summanden) die gleichberechtigte Stellung der beiden Operationen hervortreten läßt[1].

§ 7. Addition und Multiplikation der Kardinalzahlen.

1. Grundsätzliche Vorbemerkungen. Wir haben in den letzten Paragraphen „unendlichgroße Zahlen", nämlich unendliche Kardinalzahlen, wirklich kennengelernt und sie ihrer Größe nach miteinander verglichen. Wir wollen nun untersuchen, ob und wie man mit den unendlichen Kardinalzahlen auch *rechnen* kann; es wird sich zeigen, daß die aus der gewöhnlichen Arithmetik bekannten Operationen der Addition, der Multiplikation und der Potenzierung sich in einer naturgemäßen Verallgemeinerung auf die unendlichen Kardinalzahlen übertragen lassen und auch hier völlig be-

[1] Zu dieser Erscheinung, die für die Operationen der Addition und Multiplikation von Zahlen (oder Mengen, siehe § 7) bekanntlich nicht gilt, vgl. man Fr. Klein [1].

stimmte Ergebnisse liefern. Dabei bleiben sogar die in der gewöhnlichen Arithmetik für diese Rechnungsarten gültigen Regeln[1] auch für die unendlichen Kardinalzahlen bestehen. Die Umkehrung der genannten Operationen, also die Rechnungsarten der Subtraktion, der Division, des Wurzelziehens und des Logarithmierens, sind dagegen im Bereich der unendlichen Kardinalzahlen nicht möglich, insofern als sie hier, wie wir sehen werden, im allgemeinen entweder überhaupt nicht ausführbar sind oder wenigstens nicht zu eindeutigen Ergebnissen führen.

Diese Tatsache, daß eine vernünftige Subtraktion oder Division für unendliche Kardinalzahlen nicht definiert werden kann, ist ebensowenig verwunderlich wie beispielsweise der Umstand, daß für gewisse später (in den §§ 9 und 12) noch einzuführende Gattungen „unendlicher Zahlen" auch manche Gesetze der Addition und der Multiplikation (z. B. schon der Satz $a + b = b + a$) nicht gültig bleiben. In der Tat: wenn das Reich der in der Mathematik verwendeten Zahlen in so grundsätzlicher Weise und in so weitem Umfang ausgedehnt wird, wie dies durch die Einführung der unendlichen Zahlen CANTORS geschieht, so ist keineswegs zu erwarten, daß die neuen „Zahlen" sich genau den nämlichen Gesetzen fügen wie die alten; vielmehr ist in der Mathematik (wie auch anderswo) jede Verallgemeinerung eines Begriffs mit der Einbuße eines Teiles der Eigenschaften des ursprünglichen engeren Begriffs verbunden. Freilich wird — entsprechend dem sogenannten Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze (H. HANKEL) — bei der Definition der Rechenoperationen für die unendlichen Kardinalzahlen zunächst darauf zu achten sein, daß man „naturgemäße" Verallgemeinerungen der entsprechenden Operationen zwischen gewöhnlichen Zahlen erhalte; „naturgemäß" u. a. auch in dem Sinn, daß die beim Operieren mit endlichen Zahlen gültigen Gesetze *nach Möglichkeit* auch für die neuen Operationen erhalten bleiben. Sind für diese aber einmal entsprechende Definitionen zugrunde gelegt, so ist es nicht mehr Aufgabe des Mathematikers, die in dem erweiterten Operationsgebiet gültigen Rechengesetze *vorzuschreiben* (etwa als die der gewöhnlichen Arithmetik), sondern umgekehrt auf Grund der getroffenen Definitionen zu *untersuchen*, inwieweit die alten Gesetze erhalten bleiben und was im übrigen an deren Stelle zu treten hat[2].

---

[1] Solche Regeln sind namentlich:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{(„assoziative Gesetze")},$$
$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(„kommutative Gesetze")},$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{(„distributive Gesetze")};$$

übrigens folgt offenbar auf Grund des kommutativen Gesetzes die zweite Form des distributiven Gesetzes von selbst aus der ersten.

[2] Diesen Gedanken hatte CANTOR im Auge, als er der abschließenden Darstellung seiner Entdeckungen u. a. das Motto voranstellte: „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles

So ist es nur eine von vornherein nicht zu erwartende angenehme Überraschung, daß für die im folgenden definierten Operationen der Addition und Multiplikation unendlicher Kardinalzahlen sich die gewöhnlichen Regeln der Addition und Multiplikation als unverändert gültig erweisen.

Es ist in besonderem Maß die Verkennung des vorstehend angeführten Sachverhalts, was von Anfang an die Durchsetzung der Ideen CANTORS, namentlich die Anerkennung unendlichgroßer Zahlen, erschwert hat. Als charakteristisch sowohl für den Standpunkt CANTORS wie für den vieler unter seinen Gegnern mag etwa die folgende Bemerkung Platz finden, die einem Briefe CANTORS an G. ENESTRÖM aus dem Jahre 1885 entnommen ist (CANTOR [9], S. 226): „Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual-unendlicher Zahlen sind dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr *πρῶτον ψεῦδος*, daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen sämtliche Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdringen, während die aktual-unendlichen Zahlen doch andererseits, wenn sie überhaupt auf irgendeine Weise denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus abhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist."[1]

Soweit nicht anders vermerkt, geht der Inhalt dieses und des folgenden Paragraphen im wesentlichen auf CANTOR (vgl. besonders [12 I]) zurück.

2. Addition von Mengen. Als Vorbereitung zur Definition der Addition und Multiplikation von *Kardinalzahlen* erklären wir die Addition und Multiplikation von *Mengen* (erstere wurde schon auf S. 71 f. kurz eingeführt). Wir beginnen mit folgender

Definition 1. Unter der Summe oder Vereinigungsmenge zweier Mengen M und N versteht man die Menge S, welche alle Elemente enthält, die in M oder in N (d. h. mindestens in éiner der beiden

---

ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus." ([12 I], S. 481.) Vgl. auch schon die These III aus der Habilitationsschrift [1] des Vierundzwanzigjährigen: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere", sowie eine briefliche Äußerung von 1884: „Was das übrige betrifft [nämlich außer der „Kunst der Stilistik" und der „Ökonomie der Darstellung" in CANTORS Arbeiten], so ist dies nicht mein Verdienst, ich bin in bezug auf den Inhalt meiner Arbeiten nur Berichterstatter und Beamter" (vgl. SCHOENFLIES [12], S. 15f.).

[1] Die Kontroverse, ob die mathematischen Begriffe Schöpfungen unseres Denkens sind oder — so für CANTOR — unabhängig von der sie denkenden Vernunft (etwa als Ideen im Sinne PLATOS) existieren, kurz: ob sie erfunden oder entdeckt werden, ist speziell für die Mengenlehre bis heute aktuell geblieben. Man vergleiche hierzu etwa HESSENBERG [6] sowie nachstehend S. 329f.

Mengen) vorkommen. Man schreibt wie in der gewöhnlichen Arithmetik: $S = M + N$ oder auch $S = \mathfrak{S}\{M, N\}$.

Zu dieser Definition ist zu bemerken: Es kann vorkommen, daß ein und dasselbe Element in beiden Mengen M und N gleichzeitig enthalten ist. Auch in diesem Fall wird das betreffende Element in der Vereinigungsmenge natürlich nur éinmal auftreten, nicht etwa zweimal, was für eine Menge sinnlos wäre (S. 14).

Die angeführte Definition der Vereinigungsmenge würde genügen, wenn wir uns im Bereich des Endlichen befänden; denn mittels ihrer läßt sich der Reihe nach die Vereinigungsmenge von drei, vier, ..., allgemein von endlichvielen Mengen bilden. Da wir aber jetzt im Reich des Unendlichen operieren wollen, können wir uns hiermit nicht begnügen, sondern müssen auch unendlichviele Mengen zu addieren lernen. Wir denken uns zu diesem Zweck die zu addierenden Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots$ als Elemente einer Menge M gegeben. Dabei soll die Schreibweise M_1, M_2 usw. nur der bequemen Bezeichnung dienen, nicht aber etwa fordern, daß M abzählbar sei; die Menge M, deren Elemente lauter Mengen sind, kann vielmehr eine beliebige Kardinalzahl besitzen. Wir setzen dann fest:

Definition 2. Es sei eine Menge von Mengen gegeben: $M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$, wobei sowohl die Kardinalzahl von M wie die Kardinalzahlen der einzelnen Mengen M_1, M_2 usw. beliebig sein können. Dann versteht man unter der Summe oder Vereinigungsmenge der Mengen $M_1, M_2, \ldots$ die Menge S aller Elemente, die *mindestens einer* der Mengen $M_1, M_2, \ldots$ angehören. Man schreibt:

$$S = \mathfrak{S}M = \mathfrak{S}\{M_1, M_2, M_3, \ldots\} = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$$

und bezeichnet die Mengen M_1, M_2 usw. auch als die Summanden.

Wiederum ist ein Element, das in mehreren der Summanden M_1, M_2 usw. gleichzeitig vorkommt, in die Vereinigungsmenge natürlich nur éinmal aufzunehmen.

Beispiele: Wir betrachten auf der Zahlengeraden die Strecken von 0 bis 1, von 1 bis 2, von 2 bis 3 usw., ferner die Strecken von -1 bis 0, von -2 bis -1, von -3 bis -2 usw. Die Mengen der Punkte einer jeden dieser Strecken (unter Einschluß des jeweils linken, d. h. durch die kleinere Zahl bezeichneten Endpunkts, oder auch jeweils beider Endpunkte) sollen mit M_0, M_1, M_2 usw., ferner mit M_{-1}, M_{-2}, M_{-3} usw. bezeichnet werden. Diese unendlichvielen Punktmengen seien die Elemente von M. Dann wird die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ durch die Menge *aller* Punkte der (beiderseits unbegrenzten) Zahlengeraden dargestellt. — Die nämliche Vereinigungsmenge erhält man, wenn man unter M_0 die Menge der Punkte zwischen 0 und 2, unter M_1 die der Punkte zwischen 1 und 3 usw. versteht.

Um ein anderes anschauliches Beispiel zu bilden, denke man an den auf S. 9 erwähnten Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte (vgl. die dortige Abb. 1) und bezeichne der Reihe nach mit $S_1, S_2, \ldots$ die Strecken, die Achilles durchläuft, um den jeweiligen Vorsprung der Schildkröte einzuholen; die Strecke S_n hat demnach als linken Endpunkt den Punkt P_n der Abb. 1 (n beliebige natürliche Zahl). Bezeichnet man ferner die Menge aller auf der Strecke S_n gelegenen Punkte (einschließlich der Endpunkte) mit M_n, so stellt die Vereinigungsmenge $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = M$ offenbar die Menge *aller* auf der Strecke von Abb. 1 gelegenen Punkte dar einschließlich ihres rechten, aber ausschließlich ihres linken Endpunkts. Da nicht nur diese Vereinigungsmenge M, sondern auch jede der Mengen M_n (mit oder ohne Endpunkte) nach Satz 2 auf S. 52 die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, so liegt hier ein einfaches Beispiel dafür vor, daß eine durch eine begrenzte Strecke dargestellte Punktmenge M sich in abzählbar unendlichviele Teilmengen „additiv zerlegen" läßt, von denen jede zu M selbst äquivalent ist.

3. Eine Grundeigenschaft der Addition. Der Definition der Addition von *Kardinalzahlen* ist jetzt noch eine Bemerkung vorauszuschicken: Es seien M und N zwei verschiedene, aber äquivalente Mengen von Mengen, etwa

$$M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\} \text{ und } N = \{N_1, N_2, N_3, \ldots\};$$

wiederum soll durch die Bezeichnung nicht etwa Abzählbarkeit zum Ausdruck gebracht, sondern nur angedeutet werden, welche Elemente der äquivalenten, also durch eine Abbildung miteinander verknüpfbaren Mengen M und N nach Wahl einer bestimmten Abbildung einander zugeordnet sind, nämlich bezüglich die Mengen M_1 und N_1, M_2 und N_2 usw. Wir wollen ferner annehmen, daß je zwei hiernach einander entsprechende Elemente von M und N *äquivalente* Mengen seien, daß also die Beziehungen gelten: $M_1 \sim N_1$, $M_2 \sim N_2$, $M_3 \sim N_3$ usw. Es entsteht die Frage, ob unter diesen Bedingungen auch die Vereinigungsmengen $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$ einander äquivalent sind.

Dies ist sicher nicht allgemein der Fall, wie ein Beispiel sofort zeigt. Ist z. B. $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{4, 5\}$, $N_1 = \{6, 7, 8\}$, $N_2 = \{8, 9\}$, so sind M_1 und N_1 als Mengen von je drei Elementen einander äquivalent und das nämliche gilt von den Mengen M_2 und N_2, die je zwei Elemente enthalten. Ebenso ist $\{M_1, M_2\} \sim \{N_1, N_2\}$. Dennoch sind die Vereinigungsmengen

$$M_1 + M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad N_1 + N_2 = \{6, 7, 8, 9\}$$

einander *nicht* äquivalent; erstere umfaßt fünf Elemente, letztere aber nur vier.

Dies hat im vorliegenden Fall, wie der Leser sofort erkennt, seinen Grund darin, daß die Mengen N_1 und N_2 ein *gemeinsames* Element (8) aufweisen, die Mengen M_1 und M_2 aber nicht. Die im vorletzten Absatz aufgeworfene Frage, ob die Vereinigungsmengen $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$ äquivalent sind, läßt sich also nicht allgemein bejahen. Wohl aber ist sie, wie wir gleich sehen werden, dann zu bejahen, wenn noch die folgende Bedingung erfüllt ist: die in M auftretenden Mengen M_1, M_2, ... sind paarweise elementefremd[1] oder kurz fremd, d. h. kein Element kommt in zweien dieser Mengen *gleichzeitig* vor (oder in der Ausdrucksweise von S. 72: der Durchschnitt je zweier der Mengen M_1, M_2, ... ist die Nullmenge), und dasselbe gilt für alle in N auftretenden Mengen N_1, N_2, ... Ist nämlich unter dieser Bedingung Φ_1 eine bestimmte Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen M_1 und N_1, Φ_2 eine Abbildung zwischen M_2 und N_2, Φ_3 eine Abbildung zwischen M_3 und N_3 usw., so können wir eine Abbildung Φ zwischen den Vereinigungsmengen $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$ folgendermaßen herstellen: Φ ordnet jedes zu M_1 gehörige Element von $\mathfrak{S}M$ dem ihm auf Grund der Abbildung Φ_1 entsprechenden Element von N_1 zu, das ja gleichzeitig auch in $\mathfrak{S}N$ vorkommt, und umgekehrt; ebenso ordnet Φ die zu M_2 gehörigen Elemente von $\mathfrak{S}M$ den ihnen vermöge Φ_2 entsprechenden Elementen von N_2 (und $\mathfrak{S}N$) zu; entsprechend wird die Abbildung Φ für *alle* Elemente von $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$ definiert. Da jedes Element von $\mathfrak{S}M$ *nur einer einzigen* der Mengen M_1, M_2 usw. angehört (infolge der vorausgesetzten Eigenschaft dieser Mengen, paarweise elementefremd zu sein), und da das Entsprechende für jedes Element von $\mathfrak{S}N$ gilt, so wird man nie über die gerade zu wählende unter den Abbildungen Φ_1, Φ_2, ... in Unsicherheit sein können, wie man dies im Beispiel des vorigen Absatzes bei dem Element 8 wäre. Durch die angegebene Vorschrift gewinnt man, ausgehend von den einzelnen Abbildungen Φ_1, Φ_2 usw., in völlig bestimmter Weise eine umkehrbar eindeutige Zuordnung Φ zwischen den Elementen der Mengen $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$; Φ ist gewissermaßen der Inbegriff der Abbildungen Φ_1, Φ_2, ... *Die beiden Vereinigungsmengen sind also wirklich äquivalent.* Wir können dieses Ergebnis kurz so ausdrücken:

Satz 1. *Sind M und N zwei äquivalente Mengen, deren einander entsprechende Elemente beziehentlich äquivalente Mengen sind, so sind, falls sowohl M wie N je lauter paarweise elementefremde Mengen enthält, auch die zugehörigen Vereinigungsmengen $\mathfrak{S}M$ und $\mathfrak{S}N$ äquivalent.*

4. Addition von Kardinalzahlen. Hiermit ist die Möglichkeit geschaffen, die Addition von *Kardinalzahlen* zu erklären. Um nämlich

[1] Vgl. den Ausdruck „teilerfremd" für ganze Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

zunächst *zwei* Kardinalzahlen, etwa $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$, zu addieren, denken wir uns eine beliebige Menge M_1 von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}_1$ und eine beliebige zu M_1 elementefremde Menge M_2 von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}_2$. Als die Summe der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ wird dann folgerichtig die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge $M_1 + M_2$ zu erklären sein, wie es der Fall *endlicher* Mengen M_1 und M_2 nahelegt. Diese Festsetzung hat freilich nur dann überhaupt einen vernünftigen Sinn, wenn hiernach das Ergebnis der Addition davon unabhängig ist, *welche* Mengen M_1 und M_2 als Vertreterinnen der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ im besonderen Fall gerade gewählt wurden. Satz 1 zeigt, daß diese Unabhängigkeit wirklich vorhanden ist. Denn werden an die Stelle von M_1 und M_2 zwei andere, gleichfalls elementefremde Mengen N_1 und N_2 von den nämlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ gesetzt, so daß $M_1 \sim N_1$, $M_2 \sim N_2$, so ist nach Satz 1 die Vereinigungsmenge $N_1 + N_2$ äquivalent der Menge $M_1 + M_2$; die Kardinalzahlen dieser beiden Mengen sind also gleich. Die Addition der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ ergibt somit bei der zweiten Ausführung das gleiche Ergebnis wie das erstemal.

Ohne diese Erklärung der Addition *zweier* Kardinalzahlen besonders zu formulieren, wollen wir die Addition von Kardinalzahlen gleich für den allgemeinsten (in Def. 2 auf S. 80 für *Mengen* ins Auge gefaßten) Fall definieren, in dem die zu addierenden Kardinalzahlen in beliebiger endlicher oder unendlicher Zahl vorliegen.

Hierbei ist zunächst noch eine Schwierigkeit formaler Art aus dem Weg zu räumen. Die Addition *gleicher Mengen* zueinander ist offenbar bedeutungslos, da $M + M = M$ und allgemein die Hinzufügung eines schon einmal vorhandenen Summanden die Vereinigungsmenge nicht berührt. Anders ist es bei *Kardinalzahlen*, wie schon die Addition endlicher Kardinalzahlen (z. B. $2 + 2$) nahelegt; hier haben wir der Möglichkeit Raum zu lassen, daß die nämliche Kardinalzahl öfters — auch unendlich oft — als Summand auftritt, allgemein so oft, wie durch eine gewisse (endliche oder unendliche) Kardinalzahl ausgedrückt wird. Es geht daher nicht an, die zu addierenden Kardinalzahlen sich als die Elemente einer Menge gegeben zu denken, wie es für die Addition von Mengen in Definition 2 geschah; denn je zwei Elemente einer Menge sind ja stets voneinander verschieden (S. 14), werden also nicht (oder höchstens in logisch gezwungener Weise) die nämliche Kardinalzahl darstellen.

Diese Klippe kann man unter Zuhilfenahme des auf S. 17f. eingeführten Funktionsbegriffs — also des Begriffs der eindeutigen, wenn auch nicht umkehrbar eindeutigen Zuordnung — leicht vermeiden. Geht man nämlich von einer beliebigen endlichen oder unendlichen (wiederum nicht etwa als abzählbar vorausgesetzten) Menge $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ aus, so kann man Funktionen $f(m)$ ins Auge fassen, deren Argument m sämtliche Elemente von M zu durchlaufen hat, während die Funktionswerte stets Kardinalzahlen sein sollen. Da die Funktionen nicht *umkehrbar* eindeutig zu sein brauchen, so ist die Möglichkeit gegeben, daß von einer bestimmten solchen Funktion $f(m)$ derselbe Funktionswert wiederholt angenommen wird, mit anderen Worten: daß verschiedenen Argumentwerten $m_1, m_2, \ldots$ dieselbe Kardinalzahl $\mathfrak{k} = f(m_1) = f(m_2) = \ldots$ entspricht. Genauer: solange $\mathfrak{m}'$ eine Kardinalzahl bedeutet, die gleich oder kleiner ist als die Kardinalzahl

von M, die also (Satz 5 auf S. 76) einer Teilmenge M' von M als Kardinalzahl zugehört, läßt sich die Funktion $f(m)$ so einrichten, daß sie eine und dieselbe Kardinalzahl $\mathfrak{k}$ gerade $\mathfrak{m}'$-mal darstellt, während m die Elemente von M durchläuft; man braucht zu diesem Zwecke nur z. B. $f(m) = \mathfrak{k}$ zu setzen für alle m, die der Teilmenge M' angehören, sonst aber verschieden von $\mathfrak{k}$. Die erforderliche Bewegungsfreiheit hinsichtlich der Summanden einer Summe von Kardinalzahlen wird also gewährleistet sein, wenn man von einer Menge M ausgeht und die als Summanden gewünschten Kardinalzahlen sich den einzelnen Elementen von M eindeutig zugeordnet denkt (etwa durch eine in M definierte Funktion).

Ist z. B. M die Menge der reellen Zahlen m zwischen 0 und 2, diese beiden Grenzen eingeschlossen, und wird $f(m)$ definiert durch die Vorschrift:

$f(m) = 5$ für ganzzahlige m, $f(m) = 10$ für rational gebrochene m, $f(m) = \mathfrak{a}$ für irrationale m,

so erhält man in den Funktionswerten $f(m)$ die Kardinalzahl 5 dreimal, die Kardinalzahl 10 abzählbar unendlich oft, die Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ (der abzählbaren Mengen) kontinuierlich oft, d. h. so oft, wie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums angibt (vgl. Aufgabe 3 auf S. 64). Ist andererseits etwa M die Menge der natürlichen Zahlen m und wird die Funktion $f(m) = \mathfrak{c}$ (also konstant) gesetzt, so erhält man die Mächtigkeit des Kontinuums abzählbar unendlich oft.

Hiernach können wir festsetzen:

Definition 3. Es seien beliebig (endlich oder unendlich) viele Kardinalzahlen, die auch sämtlich oder teilweise gleich sein können, etwa in der Weise gegeben, daß jedem Element $(m_1, m_2, \ldots)$ einer gewissen — keineswegs als abzählbar vorausgesetzten — Menge M eindeutig je eine bestimmte Kardinalzahl $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots)$ zugeordnet ist. Um die Summe all dieser Kardinalzahlen zu bilden, ist folgendermaßen zu verfahren: Man wähle zu jedem Element $m_1, m_2, \ldots$ von M (also zu jeder der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ usw.) je eine — im übrigen beliebige — Menge $M_1, M_2, \ldots$ von eben jener Kardinalzahl als „Vertreterin" der Kardinalzahl, so daß M_1 die Kardinalzahl $\mathfrak{m}_1$ besitzt usw.; die Wahl dieser Vertreterinnen sei lediglich durch die Bedingung eingeschränkt, daß die gewählten Mengen paarweise elementefremd sein sollen. Man bilde schließlich die Vereinigungsmenge $S = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$; ihre Kardinalzahl sei $\mathfrak{s}$. Dann wird $\mathfrak{s}$ als die S u m m e a l l e r g e g e b e n e n K a r d i n a l z a h l e n bezeichnet; man schreibt:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \cdots .$$

Ganz kurz, wenn auch weniger scharf läßt sich diese nur der Formulierung nach umständliche, in der Sache höchst einfache Definition so fassen: *Unter der Summe gegebener K a r d i n a l z a h l e n versteht man die Kardinalzahl der Summe „zugehöriger" M e n g e n (nämlich solcher von den gegebenen Kardinalzahlen).*

Man erkennt auf Grund des Satzes 1 genau wie bei der Addition *zweier* Kardinalzahlen daß auch das Ergebnis der allgemeinen Addition unabhängig davon ist, *welche* Mengen M_1, M_2 usw. als Vertreterinnen der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ usw. im besonderen Fall gewählt werden.

Beispiel: Als Summanden seien sämtliche endlichen von 0 verschiedenen Kardinalzahlen gegeben (oder umständlicher gemäß Definition 3: M sei eine abzählbare Menge, etwa $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei dann einfach $f(m) = m$ gesetzt werde). Wählen wir $M_1 = \{a_1\}$, $M_2 = \{a_2, a_3\}$, $M_3 = \{a_4, a_5, a_6\}$ usw., wobei die im übrigen ganz beliebigen Elemente a_1, a_2, a_3 usw. sämtlich untereinander verschieden sein mögen, so besitzt M_1 die Kardinalzahl 1, M_2 die Kardinalzahl 2, M_3 die Kardinalzahl 3 usw. Es ergibt sich als Summe der Mengen M_1, M_2 usw.:

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\},$$

d. h. S ist eine *abzählbare* Menge. Daher ist:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = \mathfrak{a}.$$

Der Leser beachte, daß auf diese Weise eine Addition unendlichvieler natürlicher Zahlen möglich ist, die nichts mit der sogenannten Summierung „unendlicher Reihen" zu tun hat und natürlich in der gewöhnlichen Arithmetik sinnlos wäre.

5. Formale Rechenregeln und Beispiele. Bevor wir jetzt weitere Beispiele für die Addition von Kardinalzahlen anführen, sei noch darauf hingewiesen, daß die zwei Grundregeln der gewöhnlichen Addition, nämlich

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c\,[1],$$

entsprechend auch für die Addition endlich- oder unendlichvieler Mengen oder Kardinalzahlen gelten; man bezeichnet diese Regeln als *kommutatives* und *assoziatives Gesetz der Addition*. Das Bestehen der ersten Regel — also der beliebigen Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Summanden in einer Summe von endlich- oder unendlichvielen Mengen oder Kardinalzahlen — liegt daran, daß es bei der Bildung der Vereinigungsmenge gemäß Definition 2 auf die Reihenfolge ja überhaupt nicht ankommt.

Auch das assoziative Gesetz, das die Gleichgültigkeit irgendwelcher Zusammenfassungen der Summanden bei der Addition ausdrückt, ist aus der Definition der Addition ohne Schwierigkeit herzuleiten. Ist nämlich die Menge von Mengen

$$M = \{N_1, N_2, \ldots; P_1, P_2, \ldots; Q_1, Q_2, \ldots; \ldots\}$$

gegeben, wobei wiederum die Indizes wie überhaupt die ganze Bezeichnungsweise nur der Bequemlichkeit dienen, so setzen wir:

$$\{N_1, N_2, \ldots\} = N, \quad \{P_1, P_2, \ldots\} = P, \quad \{Q_1, Q_2, \ldots\} = Q \quad \text{usw.},$$

[1] In der Arithmetik, wo es genügt die Addition zweier Summanden zu erklären, kann man die Summe $a + b + c$ durch eine der rechtsstehenden Klammerformen *definieren*; in unserem Fall aber, wo unendlichviele Summanden möglich sind und daher die Definitionen 2 und 3 diesen allgemeinen Fall sogleich mitumfassen müssen, enthält die obige Formel zwei verschiedene Behauptungen.

so daß $N, P, Q, \ldots$ Teilmengen von M darstellen, die paarweise elementefremd sind und zusammengenommen alle Elemente von M umfassen. Dann ist:

$$\mathfrak{S}M = \mathfrak{S}N + \mathfrak{S}P + \mathfrak{S}Q + \cdots;$$

denn jedes Element der linksstehenden Vereinigungsmenge kommt auch in der rechtsstehenden vor und umgekehrt, wie eine leichte Überlegung zeigt. Die soeben angeschriebene Gleichung drückt aber offenbar das assoziative Gesetz der Addition für *Mengen* in allgemeinster Form aus; nach Definition 3 folgt daraus unmittelbar das nämliche Gesetz für *Kardinalzahlen.*

Wir wenden nunmehr die Definition der Addition von Kardinalzahlen auf einige Beispiele an. Für die uns bisher bekannten Kardinalzahlen ist das Ergebnis der Addition leicht zu ermitteln.

Vor allem fällt die so eingeführte Addition der Kardinalzahlen, wenn man *endliche* Kardinalzahlen ins Auge faßt und deren zwei oder endlichviele addiert, mit der gewöhnlichen Addition natürlicher Zahlen zusammen; der Leser wird im Anschluß an das Beispiel von Seite 81 unten sich leicht Beispiele hierfür bilden und dann die allgemeine Gültigkeit dieser Übereinstimmung erkennen.

Nach Satz 2 auf S. 30 wird die etwaige Eigenschaft einer unendlichen Menge, abzählbar zu sein, nicht dadurch geändert, daß zu ihren Elementen noch endlichviele weitere Elemente hinzugefügt werden. Dies besagt:

$$n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + n = \mathfrak{a},$$

falls n irgendeine *endliche* Kardinalzahl bedeutet.

Da für $M = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ sich ergibt: $M + N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, und da alle drei Mengen M, N, $M + N$ abzählbar sind, so folgt (vgl. Satz 2 auf S. 30):

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Ebenso ist daher auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \cdots + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ endlich oft als Summand gesetzt gedacht ist.

Nach Satz 2 auf S. 52 besitzt sowohl die Menge aller Punkte zwischen den Punkten 0 und 1 der Zahlengeraden wie auch die Menge aller Punkte zwischen den Punkten 1 und 2 die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ und das nämliche gilt auch von der Menge aller Punkte zwischen 0 und 2. Es besteht also die Beziehung

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

und daher für endlichviele Summanden: $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Wir betrachten weiter die Menge M, die aus allen reellen Zahlen zwischen 0 und 1 und noch dazu allen natürlichen Zahlen besteht;

die Kardinalzahl von M ist hiernach offenbar $\mathfrak{c} + \mathfrak{a}$, andererseits nach Satz 6 auf S. 42 $= \mathfrak{c}$, d. h. es gilt

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}\,.$$

Zür Übung beweisen wir diese Beziehung noch auf anderem Wege, indem wir nämlich M mit der Menge N vergleichen, die *alle* reellen Zahlen umfaßt und also nach Satz 3 auf S. 52 die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ besitzt. M ist eine Teilmenge von N, also gewiß äquivalent einer Teilmenge von N; da andererseits N äquivalent ist der Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1, ist auch umgekehrt N äquivalent einer Teilmenge von M. Nach dem Äquivalenzsatz (S. 71) sind daher M und N äquivalent, d. h. auch M besitzt die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$.

Man kann die Beziehung $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ z. B. auch dahin deuten, daß die Menge aller transzendenten Zahlen, vereinigt mit der Menge aller algebraischen Zahlen, als Summe die Menge aller reellen Zahlen ergibt (vgl. S. 54).

Als Beleg dafür, wie auch ohne „inhaltliche" Überlegungen schon an dieser Stelle durch rein „formale" Rechnung neue Regeln gefolgert werden können, diene die folgende Herleitung der (auch aus Satz 6 auf S. 42 zu folgernden) Beziehung

$$\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c} \quad (n \text{ beliebige endliche Kardinalzahl}),$$

die sich auf das assoziative Gesetz und die schon bewiesenen Regeln $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$ stützt:

$$\mathfrak{c} + n = (\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) + n = \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} + n) = \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}\,.$$

Übrigens gilt Entsprechendes für *jede* unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$. Denn aus Satz 6 auf S. 42 folgt:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + n = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,.$$

6. Multiplikation von Mengen. Wir gehen jetzt zur Multiplikation von Mengen und Kardinalzahlen über und beginnen mit folgender Definition, die durch eine alsbald anzustellende Erwägung nahegelegt wird:

Definition 4. Zwei beliebige Mengen M und N seien gegeben. Um das Produkt von M und N herzustellen, bilden wir alle verschiedenen Elementepaare (m, n), deren einer Bestandteil m alle Elemente von M durchläuft, während für den anderen Bestandteil n alle Elemente von N eingesetzt werden sollen. Die Menge P, deren Elemente alle verschiedenen derartigen Elementepaare sind, wird das Produkt oder die Verbindungsmenge der Mengen M und N genannt; man schreibt $P = M \cdot N$.

Über die Natur der hier eingeführten Paare ist folgendes zu bemerken: Zwei Paare (m_1, n_1) und (m_2, n_2) gelten nur dann als gleich, wenn sie erstens in den einzelnen Bestandteilen übereinstimmen (also $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ ist) und zweitens die gleichen Bestandteile beidemal der nämlichen Menge (M bzw. N) entnommen sind, also nicht etwa m_1 ein Element von M und m_2 ein Element von N darstellt. Diese zweite Bedingung ist überflüssig, wenn die Mengen M und N elementefremd sind, erfordert dagegen genaue Beachtung, falls M und N gemeinsame Elemente enthalten. Ist z. B. $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2\}$, so ist das Paar $(1, 2)$, in dem 1 ein Element von M und 2 ein Element von N ist, verschieden von dem Paar $(2, 1)$, in dem 2 aus M, 1 aus N entnommen ist. Man *kann* in solchen Fällen, um Verwechselungen ein für allemal auszuschließen, die Zugehörigkeit eines Elements zu einer bestimmten Menge durch die *Reihenfolge* der Elemente innerhalb des Paars andeuten, also z. B. verabreden, daß in jedem Paar (m, n) stets das erste Element m aus M, das zweite Element n aus N stammt. Dann hat man natürlich auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb eines Paars scharf zu achten, also die Paare (m_1, n_1) und (n_1, m_1) als voneinander verschieden zu betrachten. Diese Verabredung ist aber nicht *notwendig*. Man kann statt dessen z. B. unterhalb jedes Elements in jedem Elementepaar (gewissermaßen als Index) die Menge notieren oder sich notiert denken, der das Element entnommen ist; oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, jedes Element des Paares seinerseits durch ein Paar ersetzen, dessen einer Bestandteil das betreffende Element ist, während das andere die Menge darstellt, der das Element entnommen gedacht ist. Bei solchem Vorgehen braucht man auf die Reihenfolge der Elemente im Paar in keiner Weise mehr zu achten, sondern hat zwei Elementenpaare dann und nur dann als gleich zu betrachten, wenn sie die nämlichen Elemente aus den nämlichen Mengen in irgendwelcher Reihenfolge enthalten; die Paare sind einfach Mengen mit zwei Elementen. Für gewöhnlich ist allerdings die Schreibweise unter Beachtung der Reihenfolge, also die Benutzung *geordneter Paare*, bequemer und daher auch üblich. Da es dann für die Paare, und ebenso für die durch Definition 5 einzuführenden Komplexe, auf die Anordnung der Elemente wesentlich ankommt, während in einer *Menge* die Anordnung der Elemente gar keine Rolle spielt, werden zur Unterscheidung die Paare und Komplexe durch runde Klammern und nicht wie die Mengen durch geschweifte gekennzeichnet. — Sind die Mengen M und N *elementefremd*, so fallen diese Erwägungen und jede Beachtung der Reihenfolge im Elementepaar ohnehin fort; in diesem Falle kann man sich die runden Klammern stets durch geschweifte wie bisher ersetzt denken. Man kann sich in praxi *immer* auf elementefremde Faktoren beschränken (vgl. S. 315) und verfährt zweckmäßigerweise so, um sich den angedeuteten — wenn auch nur formalen — Schwierigkeiten ein für allemal zu entziehen.

Weshalb man das Produkt zweier Mengen auf die oben angeführte Weise definiert, wird an einem Beispiel sofort anschaulich. Es sei etwa $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $N = \{n_1, n_2\}$; dann wird

$$P = M \cdot N = \{(m_1, n_1), (m_1, n_2), (m_2, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_1), (m_3, n_2)\}.$$

Man erkennt, daß allgemein für den Fall *endlicher* Mengen M und N die Anzahl der Elemente der Verbindungsmenge gerade das Produkt ist, das sich durch Multiplikation der Anzahl der Elemente von M mit der Anzahl der Elemente von N ergibt. Da wir (wie bei der Addition) das Produkt von Mengen als Vorstufe zur Erklärung des Produktes von Kardinalzahlen einführen, so stellt unsere Definition eine

naturgemäße Verallgemeinerung der für endliche Mengen passenden Definition auf beliebige unendliche Mengen dar.

Man könnte das Produkt zweier Mengen (oder besser dann zunächst zweier Kardinalzahlen) auch ebenso wie in der Arithmetik der endlichen Zahlen einführen, nämlich mittels wiederholter Addition gleicher (bzw. äquivalenter) Summanden; man hätte dann Satz 5 (S. 94) als Ausgangspunkt, den Inhalt der obigen Definition 4 als beweisbare Folgerung daraus. Der Nachteil eines derartigen Verfahrens liegt darin, daß es sich lange nicht so bequem wie das hier verwandte auf *beliebig* viele Faktoren ausdehnen läßt.

Entsprechend wie bei der Addition gehen wir jetzt von der Multiplikation *zweier* Mengen zur Multiplikation *beliebig vieler* (endlich- oder unendlichvieler) Mengen über. Es werde also erklärt:

Definition 5. Es sei eine beliebige Menge M von Mengen gegeben: $M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$; M braucht nicht etwa abzählbar zu sein. Man bilde alle Elementekomplexe

$$p = (m_1, m_2, m_3, \ldots),$$

wobei unabhängig voneinander m_1 alle Elemente von M_1, m_2 alle Elemente von M_2, m_3 alle Elemente von M_3 durchläuft usw., so daß aus jeder der in M enthaltenen Mengen je ein einziges Element in p vorkommt; dann nennt man die Menge P, deren Elemente *alle möglichen verschiedenen* Komplexe p sind, das Produkt oder die Verbindungsmenge der Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots$, welche auch als Faktoren des Produkts bezeichnet werden. Man schreibt:

$$P = \mathfrak{P} M = \mathfrak{P}\{M_1, M_2, M_3, \ldots\} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \ldots .$$

Ganz entsprechend wie bei der Multiplikation *zweier* Mengen ist zu Definition 5 zu bemerken, daß es zwar an sich auf die Reihenfolge der einzelnen Elemente im Komplex nicht ankommt, daß aber *zwei Komplexe nur dann als gleich zu betrachten sind, wenn sie die nämlichen Elemente aus den nämlichen Mengen enthalten.* Sind also die Mengen M_1, M_2 usw. nicht paarweise elementefremd[1], so kann der Fall vorkommen, daß zwei Komplexe die nämlichen Elemente enthalten, ohne doch als gleich angesehen werden zu können. In diesem Fall kann man zur Vermeidung von Verwechslungen sich zu jedem Element die zugehörige Menge als Index oder sonstwie vermerkt denken oder auch, was bequemer und üblicher ist, in der Schreibweise eine bestimmte Reihenfolge der Elemente im Komplex innehalten. Wie immer nach dieser Richtung verfahren wird, so ist doch klar, daß die Reihenfolge der Faktoren in dem Produkt $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots$ keineswegs wesentlich ist, sondern daß die Verbindungsmenge begrifflich unab-

[1] Man kann übrigens, indem man die Definition 5 entsprechend wie Definition 3 — also etwas umständlicher als oben — beginnen läßt, ersichtlich sogar die Möglichkeit einschließen, daß die Faktoren sämtlich oder teilweise einander *gleich* sind, muß dann freilich die Reihenfolge der Elemente im Komplex beachten. Im Hinblick auf Definition 6, deren wesentliche Vorstufe Definition 5 ist, besteht indes hierzu in der Regel kein Bedürfnis.

hängig ist von der Reihenfolge, in der die Faktoren auftreten. *Sind die Faktoren M_1, M_2 usw. paarweise elementefremd,* so sind all diese Vorsichtsmaßregeln überflüssig; *die Komplexe sind dann gewöhnliche Mengen, nämlich die Mengen, die aus jedem Faktor je ein einziges Element enthalten.*

Beispiel: Die Menge M sei abzählbar, also $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots\}$. Die Elemente von M seien folgende:

$$M_1 = \{m_1, n_1\}, \quad M_2 = \{m_2, n_2\}, \quad M_3 = \{m_3\}, \quad M_4 = \{m_4\}, \quad M_5 = \{m_5\} \text{ usw.},$$

wobei die Elemente $m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, m_4, m_5, \ldots$ beliebig sein können; M_1 und M_2 enthalten also je zwei Elemente, während alle weiteren Mengen nur je ein einziges Element besitzen. Dann lassen sich aus den Elementen dieser unendlichvielen Mengen nur die folgenden vier verschiedenen Komplexe bilden:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \ldots),$$
$$(m_1, n_2, m_3, m_4, m_5, \ldots),$$
$$(n_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \ldots),$$
$$(n_1, n_2, m_3, m_4, m_5, \ldots);$$

die Menge dieser vier Elemente ist also die Verbindungsmenge $\mathfrak{P}M$. — Wird unter einem der Elemente von M, z. B. unter M_3, die Nullmenge verstanden (die überhaupt kein Element enthält), so gibt es keinen einzigen Komplex, der aus *jeder* der Mengen M_1, M_2, M_3 usw. je ein Element enthält. Die Menge aller Komplexe schrumpft dann selbst auf die Nullmenge zusammen; das tritt ersichtlich immer ein, wenn unter den Faktoren des Produkts die Nullmenge vorkommt.

Umgekehrt kann sich offenbar auch *nur* dann die Verbindungsmenge auf die Nullmenge reduzieren, wenn unter den Faktoren die Nullmenge auftritt. Denn anderenfalls enthält ja jeder der Faktoren mindestens ein Element, es gibt also auch mindestens einen Komplex, in dem je ein Element aus jedem Faktor auftritt. Wir können also das einem bekannten Satz der Arithmetik (vgl. Satz 6 auf S. 94) analoge Ergebnis feststellen:

Satz 2. *Ein Produkt von Mengen ist stets dann und nur dann gleich der Nullmenge, wenn unter den Faktoren die Nullmenge vorkommt.*

Um von der Multiplikation von Mengen zu der von Kardinalzahlen übergehen zu können, haben wir wieder die entsprechende Hilfsbetrachtung wie bei der Addition (S. 81f.) anzustellen. Es seien nämlich zwei verschiedene, aber äquivalente Mengen von Mengen gegeben, deren Elemente diesmal nicht (wie damals) paarweise elementefremd zu sein brauchen:

$$M = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}, \quad N = \{N_1, N_2, N_3, \ldots\};$$

wiederum soll (wie dort) die gewählte Bezeichnungsweise nicht etwa die Abzählbarkeit von M und N fordern, wohl aber eine be-

stimmte Abbildung zwischen den beiden äquivalenten Mengen M und N andeuten, nach der M_1 und N_1, M_2 und N_2 usw. jeweils einander entsprechen. Ferner sollen je zwei hiernach einander zugeordnete Mengen selber äquivalent sein, also $M_1 \sim N_1$, $M_2 \sim N_2$ usw. Dann erkennt man in ganz ähnlicher Weise wie bei der Addition (Beweis des Satzes 1, S. 82), daß auch die Verbindungsmengen $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}N$ äquivalent sind, d. h. daß es eine Abbildung zwischen ihnen gibt. Also:

Satz 3. *Sind M und N zwei äquivalente Mengen, deren einander entsprechende Elemente beziehentlich äquivalente Mengen sind, so sind auch die zugehörigen Verbindungsmengen* $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}N$ *äquivalent.*

7. Die Multiplikation von Kardinalzahlen und ihre Regeln. Auf Grund des Satzes 3 läßt sich nunmehr die Multiplikation von *Kardinalzahlen* folgendermaßen erklären:

Definition 6. Es seien beliebig (endlich oder unendlich) viele Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, . . ., die auch sämtlich oder teilweise gleich sein können, etwa in der Weise[1] gegeben, daß jedem Element einer gewissen Menge M eindeutig je eine bestimmte Kardinalzahl zugeordnet ist. Um das Produkt all dieser Kardinalzahlen zu bilden, ist folgendermaßen zu verfahren: Man wähle zu jedem Element von M (also zu jeder der gegebenen Kardinalzahlen) je eine Menge von eben jener Kardinalzahl als „Vertreterin" der Kardinalzahl — zweckmäßigerweise so, daß die Vertreterinnen paarweise fremd oder zum mindesten verschieden sind — und bilde die Verbindungsmenge sämtlicher als Vertreterinnen gewählten Mengen; die Kardinalzahl dieser Verbindungsmenge sei $\mathfrak{p}$. Dann wird $\mathfrak{p}$ als das Produkt aller gegebenen Kardinalzahlen bezeichnet; man schreibt:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \cdots .$$

Oder kürzer: *Unter dem Produkt gegebener Kardinalzahlen versteht man die Kardinalzahl des Produktes „zugehöriger" Mengen (nämlich solcher von den gegebenen Kardinalzahlen).*

Werden bei Anwendung dieser Definition die als Vertreterinnen gewählten Mengen durch irgendwelche andere, bezüglich äquivalente Mengen ersetzt, so ist die neue Verbindungsmenge der ursprünglichen äquivalent, wie Satz 3 zeigt. Man gelangt also, unabhängig von der besonderen Wahl der Vertreterinnen, stets zur nämlichen Kardinalzahl $\mathfrak{p}$ als Ergebnis der Multiplikation. Dies muß offenbar der Fall sein, damit unsere Definition wirklich einen eindeutigen Sinn habe.

Der Anführung von Beispielen (S. 96) werde vor allem die wichtige Bemerkung vorangeschickt, daß die Grundregeln der Multiplikation und

[1] Für den Grund, weshalb man sich die Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, . . . in dieser etwas umständlichen Art gegeben denkt, vergleiche man die der Definition 3 vorangeschickten Bemerkungen (S. 83f.).

der Verknüpfung der Addition mit der Multiplikation, wie sie in der gewöhnlichen Arithmetik gelten, auch für das Rechnen mit beliebigen Kardinalzahlen bestehen bleiben. Es sind dies die Rechenregeln (vgl. die Fußnote auf S. 78)

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Diese Regeln gelten in unserem jetzigen Gebiet nicht nur für zwei bzw. drei oder endlichviele, sondern auch für unendlichviele Kardinalzahlen. Wie man sich nämlich durch Anwendung der Definition der Verbindungsmenge und (bei der zweiten Regel) durch Wahl geeigneter Abbildungen ohne Schwierigkeit überzeugt, gelten zunächst für drei beliebige Mengen A, B, C stets die Beziehungen:

$$A \cdot B = B \cdot A. \qquad A \cdot B \cdot C \sim A \cdot (B \cdot C) \sim (A \cdot B) \cdot C,^{1}$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Geht man von den Mengen selbst zu ihren Kardinalzahlen über (und nimmt man in den beiden letzten Beziehungen B und C bzw. A und B als elementefremd an), so ergeben sich daraus die obigen Rechenregeln für Kardinalzahlen; von der ersten ist übrigens schon in der Formulierung der Definition 6 vereinfachender Gebrauch gemacht. Auf entsprechendem Weg läßt sich weiter die Gültigkeit jener Regeln nicht nur für zwei oder drei Kardinalzahlen, sondern für beliebig viele Kardinalzahlen feststellen. Wir können diese Ergebnisse mit den auf S. 85f. für die Addition erhaltenen in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 4. *Die Addition wie auch die Multiplikation von Kardinalzahlen sind kommutative und assoziative sowie in Verbindung miteinander distributive Operationen.*

---

[1] In dieser Beziehung sind die drei miteinander verglichenen Verbindungsmengen nicht miteinander identisch, sondern nur einander äquivalent. In der Tat ist z. B. das Element $(a, (b, c))$ der Menge $A \cdot (B \cdot C)$ im allgemeinen verschieden von dem Element $((a, b), c)$ der Menge $(A \cdot B) \cdot C$ und beide sind verschieden von dem Element (a, b, c) der Menge $A \cdot B \cdot C$. Ordnen wir aber diese drei Elemente und ebenso je drei im gleichen Sinne zusammengehörige andere Elemente der drei Mengen einander zu, so entstehen dadurch Abbildungen zwischen den Mengen $A \cdot B \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ und $(A \cdot B) \cdot C$, die die Äquivalenz der drei Mengen erweisen. — Genau Entsprechendes würde übrigens von den Mengen $A \cdot B$ und $B \cdot A$ gelten, falls man im Sinn der Bemerkungen von S. 88 und 89f. bei der Bildung der Verbindungsmenge die Reihenfolge der einzelnen Elemente im Komplex als wesentlich betrachten wollte; dann wären $A \cdot B$ und $B \cdot A$ nicht mehr gleich, sondern nur noch äquivalent (was sich fürs Folgende als gleichgültig erweist). Im Wesen der Sache liegt es aber vielmehr, die Komplexe als Mengen schlechthin und demgemäß die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ als gleich anzusehen. Man mache sich den (nur formalen) Unterschied beider Auffassungen etwa an Hand des Beispiels $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ klar!

Das assoziative Gesetz für Mengen wollen wir für den Fall unendlichvieler Faktoren noch besonders in einer speziellen Form aussprechen, wobei wir wiederum die Bezeichnungsweise von S. 85 unten benutzen. Ist wie dort

$$M = \{N_1, N_2, \ldots; P_1, P_2, \ldots; Q_1, Q_2, \ldots; \ldots\},$$
$$N = \{N_1, N_2, \ldots\}, P = \{P_1, P_2, \ldots\}, Q = \{Q_1, Q_2, \ldots\},$$

so daß die paarweise elementefremden Mengen $N, P, Q, \ldots$ mit M durch die Beziehung

$$M = N + P + Q + \cdots$$

verknüpft sind, so besagt das assoziative Gesetz der Multiplikation:

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{P}N \cdot \mathfrak{P}P \cdot \mathfrak{P}Q \cdots \sim \mathfrak{P}M = \mathfrak{P}(N + P + Q + \cdots).$$

Diese Form des assoziativen Gesetzes erweist sich als besonders geeignet für den Beweis der ersten der auf S. 109 anzuführenden Potenzregeln.

Ganz wie bei den endlichen Zahlen bestehen für eine beliebige Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ die Beziehungen[1]:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot 1, \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot 2, \quad \mathfrak{m} \cdot 2 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot 3 \quad \text{usw.}$$

oder allgemein, wenn n eine beliebige endliche Kardinalzahl bedeutet:

$$\underbrace{\mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{m}}_{n \text{ Summanden}} = \mathfrak{m} \cdot n .$$

Dabei sind unter 1, 2, 3 usw. die so bezeichneten endlichen Kardinalzahlen zu verstehen, deren Multiplikation mit anderen endlichen oder unendlichen Kardinalzahlen ja durch Definition 6 völlig erklärt ist.

Die Richtigkeit dieser Beziehungen erkennt man dadurch, daß man jeweils die linke Seite nach der Definition der Addition, die rechte Seite nach der Definition der Multiplikation berechnet; die dabei schließlich linkerseits auftretende Vereinigungsmenge erweist sich dann als äquivalent der rechterseits entstehenden Verbindungsmenge, d. h. die angeschriebenen Beziehungen treffen wirklich zu. Um uns z. B. von der Gleichheit zwischen $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \cdot 2$ zu überzeugen, bilden wir eine Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$: $M = \{a, b, c, \ldots\}$, ferner eine zweite ebensolche (also zu M äquivalente) und zu M elementefremde: $M' = \{a', b', c', \ldots\}$, endlich eine Menge von 2 Elementen: $N = \{n, n'\}$. Dann entspricht der Kardinalzahl $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}$ die Vereinigungsmenge

$$M + M' = \{a, b, c, \ldots a', b', c', \ldots\},$$

[1] Im folgenden wird an die Auffassung angeknüpft, daß in einem Produkt $m \cdot n$ der an erster Stelle stehende Faktor m den Multiplikanden, der zweite Faktor n den Multiplikator darstellen soll; hiernach würde die Multiplikation von m mit n bedeuten, die Zahl m n-mal als Summanden zu nehmen. Natürlich ist die umgekehrte Auffassung (m Multiplikator, n Multiplikand) ebensogut möglich, sprachlich sogar wohl treffender; praktisch ist — sowohl in der Arithmetik wie bei den Kardinalzahlen — die Unterscheidung bedeutungslos, da die Multiplikation kommutativ ist. Erst bei der Multiplikation der Ordnungszahlen (§ 9) ergibt sich ein Unterschied; da wir dort dem (schließlichen) Standpunkt CANTORS folgen, wird ihm schon hier Rechnung getragen.

dagegen der Kardinalzahl $\mathfrak{m}\cdot 2$ die Verbindungsmenge

$$M\cdot N=\{(a, n), (b, n), (c, n), \ldots (a, n'), (b, n'), (c, n'), \ldots\};$$

ordnen wir die Elemente a und (a, n), b und (b, n) usw., ferner a' und (a, n'), b' und (b, n') usw. beziehentlich einander zu, so ist die Äquivalenz zwischen $M+M'$ und $M\cdot N$ augenfällig gemacht. Entsprechend ist der Beweis allgemein für $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$, wo auch $\mathfrak{n}$ eine beliebige endliche oder unendliche Kardinalzahl bezeichnet, leicht zu führen.

In der Tat, sind die Mengen M und N als Vertreterinnen der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gewählt, so ist nach Definition 6 $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ die Kardinalzahl der Verbindungsmenge $M\cdot N$, die als Elemente alle Paare (m, n) aus Elementen von M und N enthält. Bedeutet n_0 ein beliebiges, aber von nun an festes Element von N, so bilden diejenigen Paare (m, n), in denen $n=n_0$ ist, eine Teilmenge N_0 von $M\cdot N$, die zu M äquivalent ist; zum Nachweis dessen braucht man nur jeweils die Elemente (m, n_0) von N_0 und m von M einander zuzuordnen. Verfährt man so für *jedes* Element n_0 von N, so erhält man lauter verschiedene (und sogar paarweise elementefremde) Mengen[1] N_0, deren Vereinigungsmenge nach Definition 3 (S. 84)[2] die Kardinalzahl

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{m}+\mathfrak{m}+\cdots \text{ ($\mathfrak{n}$ gleiche Summanden)}$$

besitzt. Diese Vereinigungsmenge ist aber gleichzeitig die Verbindungsmenge $M\cdot N$, also von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$.

Wir können das Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Satz 5. *Das Produkt zweier endlicher oder unendlicher Kardinalzahlen* $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ *läßt sich auch durch wiederholte Addition gewinnen, nämlich durch* $\mathfrak{n}$*-malige Addition des Summanden* $\mathfrak{m}$ (*oder durch* $\mathfrak{m}$*-malige Addition des Summanden* $\mathfrak{n}$), *und umgekehrt.*

Setzt man speziell einen der Faktoren gleich 1, so ergibt sich:

$$\mathfrak{m}\cdot 1=\mathfrak{m}=1+1+1+\cdots \text{ ($\mathfrak{m}$ Summanden)},$$

d. h. eine unendliche Kardinalzahl läßt sich, ganz wie eine natürliche Zahl, als eine Summe von lauter Einsen darstellen, und zwar als Summe von „so vielen“ Einsen, als die darzustellende Kardinalzahl selbst angibt. Das ist (gemäß Definition 3) nur ein anderer Ausdruck dafür, daß eine beliebige Menge M sich als Vereinigungsmenge aller Mengen der Form $\{m\}$ auffassen läßt, wo m die Elemente von M durchläuft.

Wir wollen ferner wie schon früher die Zahl 0 als Kardinalzahl der Nullmenge auffassen; dann erhalten wir aus Satz 2 von S. 90 durch Übergang von den Mengen zu ihren Kardinalzahlen:

Satz 6. *Ein Produkt von Kardinalzahlen ist dann und nur dann Null, wenn unter den Faktoren die Null vorkommt.*

---

[1] Im Sinne dieses Vorgehens kann man offenbar auch die „Vertreterinnen“, wie sie für die Definitionen 3 und 6 benötigt werden, mit einem Mindestaufwand von Ausgangsmaterial geeignet herstellen.

[2] Die dortigen Bezeichnungen M sowie M_1 usw. und $\mathfrak{m}_1$ usw. sind also im vorliegenden Fall durch N sowie N_0 und $\mathfrak{m}$ zu ersetzen.

Dieser Satz ist aus der Lehre von den gewöhnlichen Zahlen bekannt und bildet dort gleich den auf S. 78, Fußnote, angeführten Gesetzen eine der wesentlichsten Grundlagen der Arithmetik.

Die beiden soeben bewiesenen Sätze, die wichtige Eigenschaften des Rechnens mit endlichen Zahlen auf beliebige Kardinalzahlen übertragen, zeigen aufs neue, daß die für die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen aufgestellten Definitionen naturgemäß und zweckmäßig gewählt sind.

8. Ungleichungen für Kardinalzahlen. Inverse Operationen. Im Gegensatz zu den bisher angeführten, in Form von *Gleichungen* ausdrückbaren Rechenregeln, die für die Addition und Multiplikation (und ebenso für die im nächsten Paragraphen zu erklärende Potenzierung) der unendlichen Kardinalzahlen ebenso gelten wie für das Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen, lassen sich die in der gewöhnlichen Arithmetik gültigen *Ungleichungen* im allgemeinen nicht auf das Rechnen mit unendlichen Kardinalzahlen übertragen. Sind nämlich a, b, c irgend drei natürliche Zahlen, von denen etwa a kleiner ist als b, so ist bekanntlich auch $a + c$ kleiner als $b + c$ und ebenso $a \cdot c$ kleiner als $b \cdot c$. Demgegenüber gelten z. B. für die uns bekannten unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ die Beziehungen (vgl. S. 86f.):

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c},$$

obgleich $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ ist; wir werden ebenso sehen, daß auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ und nicht $< \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ ist. Man vergleiche ferner noch die in den Aufgaben **3**, **4**, **7** auf S. 102f. enthaltenen Aussagen!

Auf die von J. König [1] und Zermelo ([3], S. 277ff.) stammende, nicht ganz einfach zu beweisende allgemeinste Ungleichung, die für unendliche Kardinalzahlen bekannt ist (siehe Aufgabe **4** auf Seite 78), soll hier nicht eingegangen werden (vgl. auch den Beweis bei Hausdorff [4], S. 34f.; andere spezielle Vergleichungen bei F. Bernstein [3], § 3, und Lindenbaum-Tarski [1], § 1). Neben einem höchst wichtigen Spezialfall jener allgemeinen Ungleichung, von dem im nächsten Paragraphen (S. 107) die Rede sein wird, sei hier nur ein fast selbstverständlicher Satz erwähnt:

Satz 7. *Ist $M = \{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots\}$ eine Menge von Kardinalzahlen, die zu jeder in ihr vorkommenden Kardinalzahl eine noch größere enthält, so ist die Summe $\mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \ldots$ größer als jede der Kardinalzahlen von M.*

In der Tat ist, wenn $\mathfrak{q}$ irgendeine Kardinalzahl von M bedeutet, die Summe größer als $\mathfrak{q}$. Denn nach Voraussetzung kommt in M, also auch unter den Gliedern der Summe, eine Kardinalzahl $\mathfrak{r} > \mathfrak{q}$ vor; die Summe ist aber nach Satz 5 von S. 76 jedenfalls gleich oder größer als jeder Summand; also $\mathfrak{s} \geqq \mathfrak{r} > \mathfrak{q}$.

Während wir die „direkten“ Operationen der Addition und Multiplikation vom Bereich der gewöhnlichen natürlichen Zahlen auf denjenigen der endlichen und unendlichen Kardinalzahlen ausdehnen konnten, ist es nun nicht mehr möglich, die gleiche Verallgemeinerung auch für die „inversen“ (umgekehrten) Operationen der Subtraktion[1] und Division zu bewirken. Sicher ist das undurchführbar, wenn der Minuend (bzw. der von 0 verschiedene Dividend) kleiner ist als der Subtrahend (bzw. Divisor); jedoch nicht *nur* in diesen Fällen. Denn wäre z. B. die Aufgabe gestellt, die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}$ zu berechnen, so müßten wir uns der auf S. 86 angeführten Beziehungen erinnern: $\mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; aus ihnen folgt, daß für $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}$ entweder eine beliebige endliche Zahl n oder die unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ genommen werden kann. Allgemein ergibt sich aus der letzten Beziehung von Nr. 5 (S. 87), daß man für jede beliebige unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ die Differenz $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}$ z. B. gleich 0 oder beliebigem n oder auch gleich $\mathfrak{a}$ setzen kann. Angesichts der entstehenden Unbestimmtheit muß von der allgemeinen Ausführung der Subtraktion abgesehen werden. Ebenso zeigen z. B. die Beziehungen $n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ (S. 97 und 98), daß die Division nicht eindeutig ausführbar ist; denn der Quotient $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}}$ könnte hiernach gleich einer beliebigen endlichen Zahl n, gleich $\mathfrak{a}$ oder gleich $\mathfrak{c}$ gesetzt werden. Diese Unmöglichkeit der Umkehrungsoperationen steht in engstem Zusammenhang mit der Unübertragbarkeit der Ungleichungen der Arithmetik auf die unendlichen Kardinalzahlen; beides liegt offenbar daran, daß die unendlichen Mengen (im Gegensatz zu den endlichen) eigentlichen Teilmengen von sich selbst äquivalent sind.

9. Beispiele zur Multiplikation. In der gewöhnlichen Arithmetik ergibt sich aus den Grunddefinitionen des Rechnens als nächste Folgerung das Einmaleins. Ganz entsprechend werden wir jetzt durch Anwendung unserer Definitionen der Addition und Multiplikation auf die bisher aufgetretenen einfachsten Kardinalzahlen einige z. T. merkwürdige und inhaltsreiche Beziehungen erhalten, die gewissermaßen die ersten Tatsachen des (dann allerdings einförmiger werdenden) Einmaleins der unendlichen Kardinalzahlen darstellen.

Daß zunächst die übliche Multiplikation endlicher Zahlen im Einklang steht mit unserer Definition 6, ist klar nach der Bemerkung von S. 88 unten; auf dieses Ziel sind wir ja gerade bei der *Definition* der Multiplikation von Mengen und Kardinalzahlen losgesteuert.

Nach S. 86 ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot 2 = \mathfrak{a}$; daher ist auch

$$\mathfrak{a} \cdot 3 = \mathfrak{a} \cdot (2 + 1) = \mathfrak{a} \cdot 2 + \mathfrak{a} \cdot 1 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a} \cdot 4 = \mathfrak{a} \cdot 3 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \quad \text{usw.},$$

[1] In einem ganz speziellen Sinn spricht man von der „Differenz“ von *Mengen*; wir verschieben das, da vorher nicht benötigt, bis auf S. 200.

also allgemein, wie auch aus Satz 2 auf S. 30 folgt,

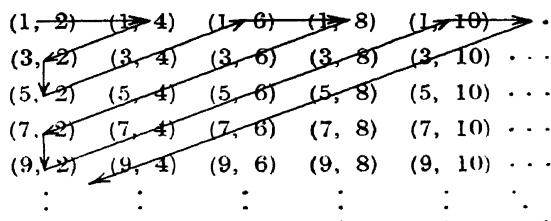
(1) $$\mathfrak{a} \cdot n = n \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \text{ für jede endliche Zahl } n\,.$$

Es ist aber auch

(2) $$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,,$$

wie man aus Satz 3 auf S. 35 schließen kann. Diese Tatsache, die mit der Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen (S. 31) zusammenfällt, wurde auch schon vor ihrer Einkleidung in dieses mengentheoretische Gewand benutzt in der Form: Eine Doppelfolge (a_{ik}), wo die Indizes i und k unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen, läßt sich zu einer einfachen Folge a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ umordnen. Wir wollen dafür zur Abwechslung noch das folgende sich anschaulich einprägende Beweisverfahren anführen: Die zwei gemäß der Definition der Multiplikation zu wählenden abzählbaren Mengen seien etwa

$$M = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \quad \text{und} \quad N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Wir ordnen die in der Verbindungsmenge vorkommenden Zahlenpaare in der folgenden Form eines links oben beginnenden, nach rechts und unten unbegrenzten „Rechtecks" an:

Alle in diesem zweifach unendlichen Schema vorkommenden Zahlenpaare sollen der Reihe nach so durchlaufen werden, wie es unsere mit Pfeilen versehene Zickzacklinie in leicht verständlicher Weise andeutet; auf (1, 2) folgen also (1, 4), (3, 2), (5, 2), (3, 4) usw. In der Abzählung, die alle von der Zickzacklinie getroffenen Zahlenpaare der Reihe nach aneinander anreiht, kommen ersichtlich *alle* Zahlenpaare des Schemas vor; die Verbindungsmenge $M \cdot N$ ist also wirklich abzählbar, wie wir beweisen wollten.

Weiter ist

(3) $$\mathfrak{c} \cdot n = n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \text{ für jede endliche Zahl } n\,,$$

(4) $$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\,.$$

Die erste dieser Beziehungen folgt einfach daraus, daß nach Satz 2 auf S. 52 ebenso wie die Menge aller Punkte einer bestimmten Strecke auch die Menge aller Punkte einer doppelt, dreimal, viermal, ..., n-mal so großen Strecke die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Gehen wir ferner aus

von der durch die Punkte 0 und 1 (letzteren eingeschlossen) begrenzten Strecke der Zahlengeraden und bezeichnen wir die Punkte dieser Strecke mit $(0, c)$, wo c alle unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 (d. h. also alle reellen Zahlen zwischen diesen Grenzen) durchläuft, so können wir analog die Punkte der Strecke von 1 bis 2 (letzteren Punkt eingeschlossen) mit $(1, c)$ bezeichnen, ebenso die Punkte der Strecke von 2 bis 3 mit $(2, c)$ usw., wobei immer c alle unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 durchläuft; in gleicher Weise mögen die Punkte zwischen -1 und 0 mit $(-1, c)$, die zwischen -2 und -1 gelegenen mit $(-2, c)$ bezeichnet werden usw. Die Menge aller Punkte der beiderseits unbegrenzten Zahlengeraden stellt in dieser Bezeichnungsweise offenbar die Verbindungsmenge $A \cdot C$ der Menge A aller ganzen Zahlen und der Menge C aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 dar, von denen erstere abzählbar ist, letztere die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Da die Menge *aller* Punkte einer geraden Linie ebenfalls von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ist (Satz 3 auf S. 52), so ist hiermit die Beziehung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ bewiesen. — Der Beweis läßt sich ähnlich auch auf Grund der Beispiele von S. 80f. bei Auffassung der Multiplikation als wiederholter ($\mathfrak{a}$-maliger) Addition von $\mathfrak{c}$ führen.

10. Die Mächtigkeit mehrdimensionaler Kontinuen. Endlich soll noch gezeigt werden, daß auch folgende Beziehung gilt:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \tag{5}$$

und zwar wollen wir diesen Satz[1] in geometrischer Einkleidung beweisen, um eine weitere Folgerung daraus bequem ziehen zu können.

Es sei ein Quadrat von der Seitenlänge 1 (etwa 1 cm) gegeben; wir wollen die Menge aller innerhalb dieses Quadrats gelegenen Punkte betrachten und zu dieser Menge auch noch die Punkte zweier Quadratseiten (etwa der oberen und der rechten) rechnen, nicht aber die auf den zwei anderen Seiten (der unteren und der linken) gelegenen Punkte. Ist P ein beliebiger Punkt unserer Menge, so ziehen wir (vgl. Abb. 9) von P aus eine Linie senkrecht zur linken Quadratseite und eine zweite Linie senkrecht zur unteren Quadratseite; denken wir uns diese beiden Seiten als *Maßstäbe* (d. h. mit einer von 0 bis 1 reichenden Längenmaßeinteilung versehen), deren Skalen an der (ihnen gemeinsamen) linken unteren Quadratecke beginnen, so treffen die beiden senkrechten Linien unsere Quadratseiten in Punkten, deren Maßzahlen x (auf der unteren Quadratseite) und y (auf der linken) seien. Dann ist jede der Zahlen x und y zwar größer als 0, aber höchstens gleich 1; gemäß der Überlegung von S. 43f. können wir daher ein-

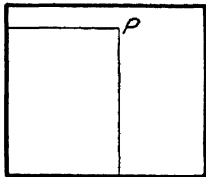



Abb. 9.

[1] Zuerst bewiesen in CANTOR [6] mittels einer anderen Methode.

deutig x als einen unendlichen Dezimalbruch $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ schreiben und ebenso y als einen unendlichen Dezimalbruch $0, y_1 y_2 y_3 \ldots$, wo $x_1, x_2, x_3, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots$ lauter Ziffern aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 9$ bedeuten. Zu jedem gegebenen Punkt P unserer Menge gehört demnach ein Paar von völlig bestimmten unendlichen Dezimalbrüchen x und y; umgekehrt gehört zu je zwei zwischen 0 und 1 gelegenen unendlichen Dezimalbrüchen ein einziger Punkt unseres Quadratgebietes, den man leicht finden kann als Schnittpunkt der Senkrechten, die in den Punkten x und y der unteren und linken Quadratseite errichtet werden. Wir können auf Grund dieser umkehrbar eindeutigen Zuordnung statt P auch (x, y) schreiben und erhalten so eine Darstellung aller Punkte des Quadrats durch sogenannte Cartesische Koordinaten.

Außer unserem Quadrat betrachten wir jetzt noch auf der Zahlengeraden die Strecke von 0 bis 1, deren Punkte wiederum durch die unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 bezeichnet werden können. Wir werden eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten dieser Einheitsstrecke und sämtlichen Punkten unseres Quadratgebietes herstellen. Ist nämlich P ein beliebiger, aber von nun an bestimmter Punkt des Quadratgebietes, so seien wie oben

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots \quad \text{und} \quad y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$$

seine Koordinaten, d. h. die zwei ihn bestimmenden unendlichen Dezimalbrüche; dann bilden wir aus diesen beiden Zahlen den durch sie eindeutig bestimmten Dezimalbruch

$$z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots;$$

da z wiederum zwischen 0 und 1 liegt, können und wollen wir dem Punkt P den durch z bezeichneten Punkt unserer Einheitsstrecke auf der Zahlengeraden zuordnen. Umgekehrt ist demgemäß einem beliebigen Punkt auf dieser Strecke, der durch den Dezimalbruch

$$z = 0, z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 \ldots$$

bezeichnet wird, derjenige Punkt P unseres Quadratgebietes zuzuordnen, der durch folgende Werte x und y festgelegt ist:

$$x = 0, z_1 z_3 z_5 \ldots \quad \text{und} \quad y = 0, z_2 z_4 z_6 \ldots;$$

da auch diese Werte x und y Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 sind, ist der Punkt P eindeutig bestimmt. Wir haben so eine Abbildung zwischen der Menge aller Punkte des Quadratgebietes und der aller Punkte einer Strecke hergestellt; da die Menge aller Punkte der Strecke die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ besitzt, gilt das nämliche von der Menge sämtlicher Punkte des Quadrats. Die Elemente dieser letzteren Menge konnten wir aber durch die Zahlenpaare (x, y) bezeichnen, wo sowohl x wie y je eine Zahlenmenge von der Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ durchläuft; die

Kardinalzahl der Menge aller Punkte P ist daher nach Definition 6 gleich $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ und damit ist die Beziehung $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ als richtig erwiesen.

Der Beweis dieser — wie wir gleich sehen werden, höchst merkwürdigen — Beziehung ist überraschend einfach gelungen; er stützt sich nämlich lediglich auf die Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, d. h. auf die Zerlegbarkeit der Menge der natürlichen Zahlen in die beiden abzählbaren Mengen der ungeraden und der geraden Zahlen, was wir bei der vorstehenden Spaltung und Zusammensetzung von Dezimalbrüchen ausgenutzt haben. Diesen innigen Zusammenhang der Beziehungen $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ werden wir nochmals, und zwar auf rechnerischem Weg, in helles Licht setzen (S. 112).

Allerdings sind die Zahlen x und y, die im vorstehenden Beweis durch Spaltung der Dezimalbruchentwicklung von z gewonnen wurden, nicht notwendig *unendliche* Dezimalbrüche, wie es zur Herstellung einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung erforderlich wäre, sondern einer der beiden Dezimalbrüche kann ein endlicher (abbrechender) sein, also schließlich lauter Nullen aufweisen; ist z. B.

$$z = 0{,}1210101010\ldots,$$

so ist $y = 0{,}200\ldots = 0{,}2$. Diesen formalen Mangel des obigen Beweises beseitigt z. B. eine Abänderung folgender Art: Man betrachte nicht, wie im Text angegeben, lauter einzelne *Ziffern* $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots$, d. h. sozusagen die „Atome" des Dezimalbruchs, sondern, falls eine dieser Ziffern (z. B. x_1) Null ist, statt dessen diejenige *Ziffernfolge* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, die entsteht, wenn man von x_1 bis zur nächsten von Null verschiedenen Ziffer x_k fortschreitet; ist weiter die nächste Ziffer x_{k+1} von Null verschieden, so wird sie für sich als Ziffernfolge betrachtet, anderenfalls wieder die Folge, die bis zur nächsten von Null verschiedenen Ziffer reicht, ins Auge gefaßt usw. Man könnte die so entstehenden Ziffernfolgen als die „Moleküle" des Dezimalbruchs bezeichnen; jeder unendliche Dezimalbruch weist dann auch unendlichviele Moleküle auf. So erhält man z. B. für den Dezimalbruch $0{,}12103400507\ldots$ die folgende (durch Vertikalstriche angedeutete) Einteilung in Moleküle: $0{,}1|2|1|03|4|005|07|\ldots$ Wird nun das obige Verfahren zur Gewinnung einer Zahl z aus einem Zahlenpaar (x, y) und umgekehrt, statt wie vorhin mittels der „Atome", vielmehr mittels der „Moleküle" durchgeführt, so behält das Verfahren, wie man leicht einsieht, seinen umkehrbar eindeutigen Charakter bei, liefert dann aber niemals abbrechende Dezimalbrüche; z. B. ergibt sich aus dem vorher angeführten Wert $z = 0{,}1|2|1|01|01|01\ldots$

$$x = 0{,}110101\ldots, \quad y = 0{,}20101\ldots$$

Durch diesen von J. König stammenden Kunstgriff wird also der vorstehende Beweis lückenlos.

Übrigens läßt sich auch ohne Abänderung des obigen Zuordnungsverfahrens die verbliebene Lücke leicht ausfüllen; vgl. Aufgabe 12 auf S. 103.

Geometrisch betrachtet enthält der Satz $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ zunächst die soeben nachgewiesene Tatsache, daß sich die Menge aller Punkte in dem von uns betrachteten Quadrat auf die Menge der Punkte der Einheitsstrecke abbilden läßt. Ein noch merkwürdiger aussehendes Ergebnis erhält man durch folgende Überlegung: Durch zwei *beliebige* (positive oder negative) reelle Zahlen x und y als Koordinaten läßt sich ja

jeder Punkt der *unbegrenzten* Ebene in genau der nämlichen Weise umkehrbar eindeutig festlegen, wie dies für die Punkte in unserem Quadrat unter Beschränkung der Zahlen x und y auf die Werte zwischen 0 und 1 geschah (vgl. Beispiel 5 des § 9, S. 131). Da auch die Menge *aller* reellen Zahlen die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ besitzt, ist demnach $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ gleichzeitig die Kardinalzahl der Menge aller Punkte einer unbegrenzten Ebene. Berücksichtigt man endlich noch, daß die Menge aller auf einer *beliebigen Strecke* gelegenen Punkte gleichfalls von der Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ ist (Satz 2 auf S. 52), so kann man die Beziehung $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ in der folgenden überraschenden Form aussprechen:

Satz 8. *Sämtliche Punkte eines Quadrats oder einer allseits unbegrenzten Ebene lassen sich in umkehrbar eindeutiger Weise den Punkten einer unbegrenzten geraden Linie oder auch den Punkten einer noch so kurzen Strecke zuordnen.*

Als CANTOR 1877 dieses Ergebnis sowie das allgemeinere, auf S. 112 anzuführende im 84. Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik veröffentlichte, in dem er die Aufnahme der Abhandlung nur mühsam auf Verwendung von WEIERSTRASS (nach CANTOR-STÄCKEL [1]) erreicht hatte, da wirkte die Entdeckung äußerst überraschend und aufsehenerregend und fand beim mathematischen Publikum wenig Vertrauen. Hatte man doch fest an das Charakteristische der *Dimensionenzahl* in dem Sinne geglaubt, daß z. B. ein Gebilde von „zwei Dimensionen", wie die Menge aller Punkte eines Quadrates oder einer Ebene oder einer beliebigen Fläche, unmöglich auf ein „eindimensionales" Gebilde (Menge aller Punkte einer Strecke oder einer Geraden oder irgendeiner Kurve) abgebildet werden könne. Das gegenteilige Ergebnis CANTORs schien das Wesen der Dimension von Grund auf zu zerstören, da es die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ als charakteristisch für *jedes* Kontinuum aufwies, gleichgültig ob es eindimensional oder zweidimensional ist.

Dennoch hat der Begriff der Dimension hiermit seine Bedeutung nicht verloren; im Gegenteil, gerade die Methoden der Mengenlehre haben uns erst die volle Einsicht in sein wahres Wesen vermittelt. Die vorhin benutzte Abbildung zwischen einer zweidimensionalen (Quadrat) und einer eindimensionalen Punktmenge (Strecke) ist nämlich zwar umkehrbar eindeutig, aber ganz und gar nicht „stetig", d. h. nicht so beschaffen, daß benachbarten Punkten des Quadrates etwa auch stets benachbarte Punkte der Strecke entsprächen und umgekehrt. Die Abbildung ist vielmehr, wie der Leser leicht erkennen wird, so unstetig wie nur möglich, sie zerstört alles, was dem ebenen bzw. dem linearen Kontinuum als solchem charakteristisch ist; es ist so (wie F. KLEIN sich ausdrückt), als schütte man alle Punkte des Quadrates in einen Sack, um sie zum Zwecke der Abbildung erst gründlich durcheinanderzurütteln.

Dagegen haben tiefergehende Forschungen gezeigt, daß bei Hinzunahme der Forderung der *Stetigkeit der Zuordnung* eine Abbildung *nicht* möglich ist[1], weder zwischen dem linearen und dem ebenen Kontinuum[2] noch überhaupt zwischen Kontinuen verschiedener Dimensionen[3]. Erst dieses Ergebnis in Gegenüberstellung mit dem CANTORschen läßt erkennen, in welchem Sinn die Dimensionenzahl eines geometrischen Gebildes etwas Unveränderliches, für es Charakteristisches darstellt.

Aufgaben. 1. Man zeige, daß die Summe von abzählbar unendlichvielen (von 0 verschiedenen) endlichen Zahlen stets $= \mathfrak{a}$ ist!

2. Man berechne die Summen $\mathfrak{f} + n$, $\mathfrak{f} + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{f} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{f}$ die auf S. 63 eingeführte Kardinalzahl bedeutet!

3. Es sei jeder der (nicht notwendig abzählbar unendlichvielen) Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_k, \ldots$ umkehrbar eindeutig eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}_k$ derart zugeordnet, daß jeweils $\mathfrak{m}_k$ gleich oder kleiner ist als die entsprechende Kardinalzahl $\mathfrak{n}_k$. Man beweise, daß dann auch die Summe aller $\mathfrak{m}_k$ gleich oder kleiner ist als die Summe aller $\mathfrak{n}_k$!

4. Falls in der Voraussetzung der vorigen Aufgabe „gleich oder" gestrichen wird, so daß also stets $\mathfrak{m}_k < \mathfrak{n}_k$, ist dann auch die Summe der $\mathfrak{m}_k$ stets *kleiner* als die der $\mathfrak{n}_k$? Gegenbeispiel! (Hingegen ist unter diesen Umständen die *Summe* der $\mathfrak{m}_k$ in der Tat stets kleiner als das *Produkt* der $\mathfrak{n}_k$; das ist gerade der auf S. 95 erwähnte tiefliegende Satz von KÖNIG-ZERMELO.)

5. Man führe den Beweis des Satzes 3 aus (entsprechend dem des Satzes 1)!

---

[1] Wesentlich ist hierbei, daß — wie bei jeder Abbildung — eine *umkehrbar eindeutige* Zuordnung vorliegen muß, vermöge deren dann auch die Stetigkeit von selbst gegenseitigen Charakter besitzt. Bei einer bloß *eindeutigen* Zuordnung hingegen ist auch das Hinzutreten der Stetigkeitseigenschaft noch nicht entscheidend. Vielmehr wurde die durch CANTORS Ergebnis bewirkte Erschütterung des Dimensionsbegriffs womöglich noch gesteigert, als es PEANO ([1]; aus der arithmetischen Darstellung in geometrisches Gewand erst durch HILBERT [1] gebracht) 1890 gelang eine „Kurve" anzugeben, die *sämtliche Punkte eines Quadrates durchläuft* (oder eine stetige Bewegung eines Punktes derart, daß dieser in endlicher Zeit sämtliche Punkte eines Quadrates trifft), m. a. W. die Punkte eines Quadrates den Punkten einer Strecke eindeutig — aber natürlich nicht umkehrbar eindeutig — in solcher Weise zuzuordnen, daß benachbarten Streckenpunkten benachbarte Quadratpunkte entsprechen.

[2] Zuerst bewiesen (auch noch für ein dreidimensionales Kontinuum) von LÜROTH seit 1878 (vgl. LÜROTH [1]).

[3] Der schwierige Beweis hierfür wurde zuerst von BROUWER ([4], siehe auch [5] und [6]) erbracht. Für die Geschichte dieses Problems und die gerade auch in allerneuester Zeit erfolgreich fortgesetzten Untersuchungen über den Dimensionsbegriff vergleiche man die tiefschürfende Zusammenstellung bei MENGER [1], sowie noch ALEXANDROFF [1] und HUREWICZ [1]. Übrigens findet man schon bei BOLZANO ([3], S. 80) einen bemerkenswert weit fortgeschrittenen Versuch zur Definition des Dimensionsbegriffes.

6. Man mache die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ dadurch anschaulich, daß man die Menge der natürlichen Zahlen in abzählbar unendlichviele unendliche Teilmengen zerlegt (auf sehr verschiedenartige Weisen möglich)!

7. Unter der Voraussetzung der Aufgabe 3 beweise man den entsprechenden Satz für die Produkte (statt Summen)! Ebenso für die in Aufgabe 4 aufgeworfene Frage!

8. Man zeige die Abzählbarkeit der Menge, deren Elemente alle möglichen *endlichen* Mengen von natürlichen Zahlen sind!

9. Aus der in der vorigen Aufgabe ausgedrückten Tatsache folgere man, daß die Bändezahl der auf S. 6 besprochenen Universalbibliothek, falls man die für den Umfang eines (natürlich immer endlich zu denkenden) Buches dort gesetzte Schranke fallen läßt, gleich $\mathfrak{a}$ ist — und zwar auch dann, wenn man dem Setzer statt 100 Zeichen abzählbar unendlichviele verschiedene Zeichen zur Verfügung stellt!

10. Man ersetze in den Definitionen 3 und 6 (S. 84 und 91) die Menge M, deren einzelnen Elementen die zu addierenden (bzw. zu multiplizierenden) Kardinalzahlen zugeordnet gedacht sind, durch eine äquivalente Menge N und ordne nach Wahl einer bestimmten Abbildung zwischen M und N nunmehr jedem Element n von N diejenige Kardinalzahl $\mathfrak{m} = g(n)$ zu, die vorher dem entsprechenden Element m von M zugeordnet war; dann bleibt die Summe (bzw. das Produkt) der Kardinalzahlen ungeändert. Man mache sich klar, daß diese Aussage mit dem kommutativen Gesetz der Addition (bzw. der Multiplikation) von Kardinalzahlen übereinstimmt!

11. Man zeige (entsprechend dem Beweise von Satz 8), daß auch die Menge aller Punkte eines Würfels oder des unbegrenzten dreidimensionalen Raumes die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt!

12. Man führe unter Verzicht auf den Königschen Kunstgriff den Beweis des Satzes 8 mittels einer Heranziehung des Äquivalenzsatzes durch!

§ 8. Potenzierung der Kardinalzahlen. Das Problem des Unendlichkleinen.

1. Die Potenzierung als wiederholte Multiplikation. Wir erklären zunächst die Potenzierung der Kardinalzahlen auf dieselbe Weise, wie es in der gewöhnlichen Arithmetik üblich ist, nämlich als eine wiederholte Multiplikation des nämlichen Faktors mit sich selbst. Doch sei schon hier bemerkt, daß ursprünglich von Cantor eine andere Definition der Potenzierung gegeben worden ist, die freilich auf das gleiche Ergebnis hinausläuft; wir werden auf diese andere Definition nachher zurückkommen.

Um zu einer beliebigen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ die Potenz $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}$ zu bilden, haben wir nach der Definition der Multiplikation zunächst zwei

Mengen M_1 und M_2 von der nämlichen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ zu wählen; anders ausgedrückt: wir haben eine Menge N der Kardinalzahl 2 von Mengen der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ zu nehmen (d. h. eine Menge N, die nur zwei Mengen M_1 und M_2 von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ enthält). Hierauf sind alle Elementepaare (m_1, m_2) zu bilden, wobei m_1 die Elemente von M_1, m_2 die Elemente von M_2 durchläuft; die Menge aller möglichen derartigen Paare (d. i. die Verbindungsmenge $M_1 \cdot M_2$) besitzt dann die Kardinalzahl $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}^2$.

Die sinngemäße Ausdehnung dieser Erklärung auf den allgemeinen Fall, wo die Menge N von Mengen nicht die Kardinalzahl 2, sondern eine beliebige endliche oder unendliche Kardinalzahl besitzt, führt zu der folgenden

Definition. Es seien zwei beliebige Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gegeben. Um die Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ zu bilden, wählen wir eine Menge N von Mengen: $N = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$, die folgende zwei Eigenschaften besitzt: 1. die Menge N soll die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ besitzen (sie braucht also keineswegs abzählbar zu sein); 2. jede der in N enthaltenen Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots$ soll die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ besitzen. Wir bilden dann die Verbindungsmenge $\mathfrak{P} N = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots$; gemäß der Definition der Multiplikation von Mengen (S. 89) sind zu diesem Zweck alle Elementekomplexe der Form $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ aufzustellen, wobei m_1 die Elemente von M_1, m_2 die Elemente von M_2 durchläuft usw., und die Menge aller derartigen Komplexe stellt dann die Verbindungsmenge $\mathfrak{P} N$ dar. Ist $\mathfrak{q}$ die Kardinalzahl der Menge $\mathfrak{P} N$, so wird $\mathfrak{q}$ die $\mathfrak{n}^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{m}$ genannt; man schreibt $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ und bezeichnet wie in der Arithmetik $\mathfrak{m}$ als die Basis, $\mathfrak{n}$ als den Exponenten der Potenz.

Kurz: unter der Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ versteht man ein Produkt von Kardinalzahlen (Definition 6 auf S. 91), in dem der Faktor $\mathfrak{m}$ „so oft" auftritt, als die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ angibt[1].

Daß nach dieser Erklärung das Ergebnis der Potenzierung davon unabhängig ist, wie im besonderen die Elemente von N, d. h. die Mengen M_1, M_2 usw. gewählt werden, braucht nicht mehr eigens nachgewiesen zu werden; denn das liegt einfach daran, daß nach Satz 3 auf S. 91 das Ergebnis der Multiplikation von Kardinalzahlen stets das nämliche ist, welche Mengen auch immer man als Vertreterinnen der einzelnen Kardinalzahlen heranziehen mag.

2. Definition der Potenz mittels der Belegungsmenge[2]. Nunmehr behandeln wir den Ausgangspunkt, von dem aus CANTOR die Lehre von der Potenz entwickelt hat. Diese Betrachtung wird zeigen, in wie innigem Zusammenhang

---

[1] Zu dieser wie auch zur folgenden Potenzdefinition kann man, sofern man Wert darauf legt, für den Fall $\mathfrak{n} = 0$, der freilich ohne Bedeutung ist, noch die Festsetzung $\mathfrak{m}^0 = 1$ (für jedes $\mathfrak{m}$) hinzufügen.

[2] Ausnahmsweise wird der Inhalt dieses kleingedruckten Abschnittes auch an manchen späteren Stellen dieses Paragraphen benutzt.

mit anderen mathematischen Begriffen die Potenzierung steht, insbesondere mit dem der Funktion und mit der auf S. 68f. betrachteten Menge aller Teilmengen einer Menge.

Wir knüpfen an den auf S. 17 und 61 kurz entwickelten Begriff einer *Funktion* $y = f(x)$ an. Es seien zwei beliebige Mengen M und N gegeben und es werde verabredet, daß die unabhängige Veränderliche (die wir daher mit n statt mit x bezeichnen wollen) die Elemente der Menge N zu durchlaufen habe, während für die Funktionswerte alle und nur die Elemente m der Menge M in Betracht kommen sollen; es ist also $m = f(n)$, wobei m auf die Elemente von M und n auf die von N beschränkt ist („Funktion in N mit Werten aus M").

Beispiele. 1. Soll mit einem Satz von 4 Würfeln gleichzeitig gewürfelt werden und läßt man n die Numerierungen der einzelnen Würfel als erster, zweiter usw., also die Zahlen 1, 2, 3, 4 durchlaufen, während m die gewürfelte Augenanzahl (eine der Zahlen 1 bis 6) bedeutet, so gibt $m = f(n)$ die Anzahl m der Augen an, die mit dem n^{ten} Würfel erzielt ist; N ist die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, M die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kombiniert man auf jede mögliche Weise mit jeder der vier Würfelnummern jede Augenanzahl, so erhält man alle möglichen Resultate eines Wurfs. Betrachtet man zwei Würfe aller vier Würfel schon dann als verschieden, wenn mit einem und demselben Würfel verschiedene Augenzahlen erzielt sind, so gibt es, wie man sich leicht überlegt, $6^4 = 1296$ verschiedene Möglichkeiten des Würfelns; jeder dieser Möglichkeiten entspricht eine — nur Werte aus der Menge M annehmende — Funktion in der Menge $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Ein ähnliches, vielleicht noch anschaulicheres Beispiel erhält man, wenn man unter N eine Programmfolge von Kiaviervorträgen für je einen einzelnen Spieler versteht und unter M eine Gruppe von Musikern, von denen jeder zur Übernahme sämtlicher Programmnummern fähig ist. Eine beliebige Funktion $m = f(n)$, wo n die Programmnummern, m die Musiker durchläuft, entspricht dann einer gewissen *Rollenbesetzung* der Programmfolge, die Menge aller Funktionen demnach der Gesamtheit aller möglichen Rollenbesetzungen, d. h. aller denkbaren Verteilungen der Musiker auf die Programmnummern. Bei gegebener Rollenbesetzung ist zwar durch jede Nummer der Musiker, der sie vorträgt, eindeutig festgelegt, dagegen kann der nämliche Musiker sehr wohl mehrere Nummern übernehmen, wie dies dem zwar eindeutigen, nicht aber umkehrbar eindeutigen Charakter unserer Funktionen entspricht.

3. Als letztes Beispiel diene eine beliebige Dezimalbruchentwicklung zwischen 0 und 10, z. B. die der Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ Als Menge N (für die unabhängige Veränderliche) nehmen wir die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ der Stellennummern der einzelnen Dezimalstellen, wobei 0 die Stelle vor dem Komma und n die n^{te} Stelle hinter dem Komma bedeute. Der Funktionswert $m = f(n)$ hingegen soll die an jeder einzelnen Stelle n vorkommende Ziffer angeben; für m kommen also die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ in Betracht, d. h. es ist $M = \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Ein bestimmter zwischen 0 und 10 gelegener Dezimalbruch (z. B. der für π) wird also gegeben sein durch eine Funktion $f(n)$, in der n sämtliche Werte von N durchläuft, während $f(n)$ nur die Werte m von M annehmen kann, also zu jeder Stelle n eine Ziffer angibt. *Eine* solche Funktion bestimmt die Dezimalbruchentwicklung von π; die Gesamtheit *aller möglichen* derartigen Funktionen entspricht offenbar der Menge *aller* Dezimalbrüche zwischen 0 und 10. Statt von einer Funktion spricht man in diesem Zusammenhang häufiger und anschaulicher von einer (Besetzung oder) Belegung der Menge N mit der Menge M, im letzten Beispiel also von einer gewissen Belegung der Menge aller (unendlichvielen) Stellennummern mit der Menge aller (zehn) Ziffern. Fragt man nach der Anzahl aller möglichen derartigen Funktionen oder Belegungen, so wird man in diesem Fall offenbar (vgl. das erste Beispiel) auf das „Produkt" $10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots$

(abzählbar unendlichviele Faktoren) geführt; denn für die Besetzung der Stelle vor dem Komma hat man 10 Möglichkeiten, dann unabhängig von der Besetzung dieser Stelle noch 10 Möglichkeiten für die Besetzung der ersten Stelle nach dem Komma usw.

Wir können jede Funktion oder Belegung auch als einen „Komplex" (S. 89) schreiben, nämlich im ersten Beispiel (Würfel) als einen Komplex (a, b, c, d), wo a, b, c, d sämtlich der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zu entnehmen sind; im dritten Beispiel hat der Komplex abzählbar unendlichviele Stellen und kann in der Form $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ geschrieben werden, wobei für a_n — d. i. die n^{te} Ziffer des dem Komplex entsprechenden Dezimalbruchs — nur Ziffern, d. h. nur Elemente der Menge $M = \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ eintreten können[1].

Wir betrachten nun, zum allgemeinen Fall beliebiger Mengen N (für die unabhängige Veränderliche) und M (für die Funktionswerte) zurückkehrend, die *Menge aller möglichen Belegungen der Menge N mit der Menge M*, d. h. die Menge aller möglichen Funktionen $m = f(n)$, wobei n die Elemente von N durchläuft und die Funktionswerte m auf die Elemente von M beschränkt sind. Zwei Belegungen oder Funktionen gelten hierbei dann (und nur dann) als verschieden, wenn irgendein Element von N beidemal verschieden belegt ist, d. h. wenn zu irgendeinem n beidemal verschiedene Funktionswerte m gehören. Diese Menge aller Belegungen nennt man mit CANTOR die Belegungsmenge von N mit M, in Zeichen (N/M); zuweilen wird auch von der Potenz M^N gesprochen. Jedes Element der Belegungsmenge läßt sich als eine Menge geordneter Paare $\{(n, m), (n', m'), \ldots\}$ oder kürzer (unter Beachtung der Reihenfolge) als ein Komplex $(m, m', \ldots)$ schreiben. Dabei durchlaufen die *Stellen* des Komplexes (in den obigen Beispielen die Würfelnummern 1 bis 4 bzw. die Programmnummern bzw. die abgezählt unendlichvielen Stellen 0, 1, 2, ... eines Dezimalbruches) alle Elemente $n, n', \ldots$ der Menge N; die Menge aller Stellen ist also äquivalent N. Dagegen sind die *Werte* m, m' usw. der einzelnen Stellen Elemente von M, und zwar in jeder möglichen Besetzung. Bei jeder Belegung gehört also zu jedem Element von N nur éin bestimmtes Element von M, das aber dabei gleichzeitig auch zu anderen Elementen von N gehören kann; es liegt eine eindeutige, aber nicht umkehrbar eindeutige Funktion vor.

Vergleichen wir schließlich diese Begriffsbildung mit der der Verbindungsmenge (Definition 5 auf S. 89), so erkennen wir, daß die Belegungsmenge (N/M) äquivalent ist der Verbindungsmenge $M \cdot M' \cdot \ldots$, falls die voneinander verschiedenen Mengen M, M' usw. sämtlich äquivalent M sind und die Menge $N = \{M, M', \ldots\}$, deren Elemente die Faktoren M, M' usw. sind, die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ von N besitzt[2]. In der Tat ist (nach der Definition der Verbindungsmenge) $\mathfrak{P}N = M \cdot M' \cdot \ldots$ die Menge aller möglichen Komplexe $(m, m', \ldots)$, deren Stellenzahl der Kardinalzahl von N entspricht, während die einzelnen Stellen die Elemente von $M, M', \ldots$, d. h. von lauter Mengen mit der gleichen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ wie M, zu durchlaufen haben. Nach der Definition der Potenzierung von Kardinalzahlen (S. 104) ist also $\mathfrak{P}N = M \cdot M' \cdot \ldots$ gerade eine Menge der Art, wie sie zur Bildung

[1] Schreibt man die Funktion oder Belegung in dieser Form, so hat man offenbar die *Reihenfolge* im Komplex zu beobachten, obgleich es an sich beim Funktionsbegriff auf eine Reihenfolge nicht ankommt. Will man, was freilich umständlicher ist, die Reihenfolge ausschalten, so braucht man nur jedem $f(n) = a_n$ das betreffende n noch hinzuzufügen, d. h. den (geordnet gedachten) Komplex der a_n zu ersetzen durch die (ungeordnete) Menge der geordneten Paare (n, a_n) (vgl. S. 88ff.), also durch die Menge $\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots\}$, worin zwei a_n mit verschiedenem Index n nicht verschieden zu sein brauchen.

[2] Noch durchsichtiger wird der Sachverhalt, wenn man (vgl. die Fußnote auf S. 89) sämtliche Faktoren M, M' usw. gleich M wählt.

der Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ zu konstruieren ist; daher *hat die zu* $\mathfrak{P}N$ *äquivalente Belegungsmenge* (N/M) *die Kardinalzahl* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$. Auf diese Weise, nämlich als *Kardinalzahl der Belegungsmenge*, hat CANTOR den Begriff der Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ eingeführt; die vorstehenden Betrachtungen zeigen, daß unsere obige, mehr an den Potenzbegriff der gewöhnlichen Arithmetik anknüpfende Definition mit der CANTORschen übereinstimmt. Der Vorzug der letzteren liegt in ihrer alsbald zu illustrierenden unmittelbaren Anwendungsfähigkeit, die aus dem Begriff der Belegungsmenge quillt.

Der Leser veranschauliche sich diese Einführung des Potenzbegriffes an den obigen Beispielen und vergleiche sie mit der früheren Definition! Er wird im Anschluß an das erste Beispiel leicht erkennen, daß für den Fall *endlicher* Mengen M und N mit den Kardinalzahlen m und n die Belegungsmenge (N/M) im wesentlichen die Menge aller „Variationen n^{ter} Klasse von m Elementen mit Wiederholung" darstellt, deren Anzahl nach einem elementaren Satz der Kombinatorik in der Tat gleich m^n ist (vgl. z. B. WEBER-EPSTEIN [1], S. 207).

3. Die Potenzmenge. Als wichtigste Anwendung des Begriffes der Belegungsmenge folge hier der Hinweis auf den *Zusammenhang des Potenzbegriffs mit der Menge aller Teilmengen einer Menge N*, die wir schon auf S. 67f. betrachtet und mit $\mathfrak{U}N$ bezeichnet haben. Eine beliebige Teilmenge N' von N (die Nullmenge und N selbst eingeschlossen) entsteht dadurch, daß gewisse der Elemente $n, n', \ldots$ von N in die Teilmenge N' aufgenommen, die anderen aber nicht aufgenommen werden; wir wollen uns den Elementen der ersten Art eine Eins, denen der zweiten Art eine Null zugeordnet denken. *So kann man jede Teilmenge N' von N als eine gewisse Belegung der Menge N mit der Menge* $\{0, 1\}$ *oder* {„*fehlt*", „*vorhanden*"} *auffassen*, d. h. als eine Funktion in N, die nur die beiden Werte $f(n) = 1 =$ „vorhanden" oder $f(n) = 0 =$ „fehlt" annehmen kann, je nachdem das betreffende Element n in der Teilmenge N' vorkommt oder nicht. Umgekehrt wird offenbar durch jede Belegung (Funktion) dieser Art eine gewisse Teilmenge von N eindeutig definiert[1]. (So entspricht z. B. der Menge N selbst die Belegung, bei der für alle n stets $f(n) = 1$ ist; der Nullmenge diejenige, für die $f(n) = 0$.) Die Menge $\mathfrak{U}N$ aller Teilmengen von N fällt daher im wesentlichen zusammen mit der Menge aller Belegungen der Menge N mit der Menge $\{0, 1\}$, d. h. in der obigen Schreibweise mit der Belegungsmenge $(N/\{0, 1\})$. Da die Menge $\{0, 1\}$ die Kardinalzahl 2 besitzt, so ist (nach der im vorletzten Absatz entwickelten Definition der Potenz) die Kardinalzahl jener Belegungsmenge, also auch die Kardinalzahl von $\mathfrak{U}N$, gleich $2^{\mathfrak{n}}$, wobei $\mathfrak{n}$ die Kardinalzahl der Menge N bedeutet. Es gilt somit der folgende wichtige Satz, der dazu geführt hat, die Menge aller Teilmengen einer Menge N auch schlechthin als die Potenzmenge von N zu bezeichnen:

Satz 1. *Ist N eine beliebige Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, so besitzt die Menge $\mathfrak{U}N$, d. i. die Menge aller Teilmengen von N, die Kardinalzahl $2^{\mathfrak{n}}$. Die Menge $\mathfrak{U}N$ kann als die Belegungsmenge von N mit einer Menge von zwei Elementen (z. B. mit $\{0,1\}$) aufgefaßt werden.*

Ist also $\mathfrak{n}$ eine beliebige Kardinalzahl, so ist (nach Satz 3 auf S. 67f.) die Kardinalzahl $2^{\mathfrak{n}}$ stets größer als $\mathfrak{n}$.

---

[1] Die so zu der festen Ausgangsmenge N definierbaren Funktionen nennt man nach DE LA VALLÉE POUSSIN ([1] sowie [2], S. 7; dort ein wenig spezieller eingeführt) die den Teilmengen N' zugehörigen *charakteristischen Funktionen*; demnach gehört zu jeder Teilmenge N' von N umkehrbar eindeutig eine charakteristische Funktion, deren unabhängige Veränderliche jedesmal die Menge N durchläuft.

Allen Bemühungen zum Trotz einstweilen ungelöst ist die Frage, ob für die unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{n}$ etwa $2^{\mathfrak{n}}$ die *nächstgrößere* Kardinalzahl nach $\mathfrak{n}$ ist. Im einfachsten Fall $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}$ entspricht diese Frage dem Kontinuumproblem (S. 67; vgl. S. 110).

Satz 1 gilt natürlich auch für *endliche* Mengen. Für solche drückt er, wie oben bemerkt, ein aus der Kombinatorik bekanntes elementares Resultat aus. Ist z. B. N die Menge der drei Zahlen 1, 2, 3, so enthält $\mathfrak{U}N$ als Elemente die folgenden Mengen:

$$\{1, 2, 3\} = N, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, 0 \text{ (Nullmenge)},$$

also wirklich $8 = 2^3$ Elemente. (Für den Fall der Nullmenge $N = 0$ besagt unser Satz, daß $\mathfrak{U}0$ éin Element enthält $(2^0 = 1)$; in der Tat ist ja die Nullmenge Teilmenge von sich selbst, während sie keine andere Teilmenge besitzt, d. h. es ist $\mathfrak{U}0$ die Menge $\{0\}$ mit dem einzigen Element 0.)

Aus dem zweiten Teil des Satzes 1 ersieht man, wenn man noch den Satz 7 von S. 95 hinzunimmt, daß *der Prozeß des Fortschreitens zu immer größeren und größeren unendlichen Kardinalzahlen ohne Schranke durchgeführt werden kann.* Denn ist $\mathfrak{m}_0$ die Kardinalzahl einer beliebigen endlichen oder unendlichen Menge (z. B. der Menge aller natürlichen Zahlen) und wird $2^{\mathfrak{m}_0} = \mathfrak{m}_1$, $2^{\mathfrak{m}_1} = \mathfrak{m}_2$ gesetzt usw., so ist zunächst nach dem soeben bewiesenen Satz:

$$\mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \dots,$$

dann aber nach dem erwähnten Satz 7 die Summe all dieser abzählbar unendlichvielen Kardinalzahlen

$$\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \cdots$$

größer als *jede* unter ihnen; wird diese Summe mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet, so ist wiederum $2^{\mathfrak{s}} > \mathfrak{s}$ usw. Auf diese Art lassen sich nicht nur — wie bei den endlichen Zahlen — zu jeder einzelnen Kardinalzahl, sondern auch zu jeder Menge von Kardinalzahlen immer größere Kardinalzahlen bilden[1].

4. Formale Rechenregeln. Für endliche Zahlen m, n, p werden in der Arithmetik die Beziehungen bewiesen:

$$m^n \cdot m^p = m^{n+p}, \quad m^n \cdot p^n = (m \cdot p)^n, \quad (m^n)^p = m^{n \cdot p}.$$

Genau die nämlichen Beziehungen gelten für beliebige (endliche oder unendliche) Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, und zwar (bei den ersten zwei Gleichungen) auch für beliebig viele Faktoren. Der Beweis läßt sich ohne besondere Schwierigkeit in der Weise führen, daß nach den Definitionen der Addition, Multiplikation und Potenzierung die linke wie die rechte Seite jeder Beziehung für sich in passender Weise berechnet und dann, vornehmlich unter Anwendung der in Satz 4 von

[1] Eine hieraus entspringende Schwierigkeit wird uns noch beschäftigen (S. 212).

S. 92 ausgedrückten Rechenregeln für die Multiplikation, gezeigt wird, daß die erhaltenen Ergebnisse paarweise übereinstimmen. Also:

Satz 2. *Für die Potenzierung der Kardinalzahlen gelten folgende Rechenregeln:*

$$(1) \qquad \mathfrak{k}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{k}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{k}^{\mathfrak{q}} \cdots = \mathfrak{k}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\cdots}$$

$$(2) \qquad \mathfrak{k}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{q}^{\mathfrak{n}} \cdots = (\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \cdots)^{\mathfrak{n}}$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{k}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}}.$$

Um z. B. die erste der obigen Regeln (und zwar sogleich für beliebig viele Faktoren) zu beweisen, gehen wir aus von derjenigen Form des assoziativen Gesetzes für die Multiplikation von Mengen, die wir auf S. 93 durch Formel (A) ausgedrückt haben. Sind in der dortigen Bezeichnung $N, P, Q, \ldots$ paarweise elementefremde Mengen von den Kardinalzahlen $\mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ und zwar so beschaffen, daß ihre Elemente lauter (äquivalente) Mengen von einer und derselben Kardinalzahl $\mathfrak{k}$ darstellen, so besitzt die Vereinigungsmenge $N + P + Q + \ldots$ nach der Definition 3 der Addition (S. 84) die Kardinalzahl $\mathfrak{n} + \mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \ldots$, während den Verbindungsmengen $\mathfrak{P}N, \mathfrak{P}P, \mathfrak{P}Q, \ldots \mathfrak{P}(N + P + Q + \ldots)$ nach der Definition der Potenzierung die Kardinalzahlen $\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}}, \mathfrak{k}^{\mathfrak{p}}, \mathfrak{k}^{\mathfrak{q}}, \ldots \mathfrak{k}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\cdots}$ zukommen. Die Formel (A) drückt also (gemäß der Definition 6 auf S. 91) in der Tat die erste unserer Potenzregeln aus:

$$\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{k}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{k}^{\mathfrak{q}} \cdots = \mathfrak{k}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\cdots}.$$

Sind überdies noch die Mengen $N, P, Q, \ldots$ sämtlich von der nämlichen Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, demnach die Verbindungsmengen $\mathfrak{P}N, \mathfrak{P}P, \mathfrak{P}Q, \ldots$ alle von der Kardinalzahl $\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}}$, und besitzt die Menge $\{N, P, Q, \ldots\}$ die Kardinalzahl $\mathfrak{r}$, so folgt nach Satz 5 auf S. 94 und unter nochmaliger Anwendung der Potenzdefinition die dritte Potenzregel:

$$(\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{k}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}}.$$

5. Die Potenzmenge einer abzählbaren Menge (Kontinuum). Gehen wir jetzt zu Beispielen über, so soll vor allem die Potenz $10^{\mathfrak{a}}$ berechnet werden. Wir bilden zu diesem Zweck, nach der CANTORschen Potenzdefinition vorgehend, eine Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ (d. h. eine abzählbare Menge), etwa die Menge $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ aller natürlichen Zahlen, und belegen sie mit einer Menge von der Kardinalzahl 10, wofür wir die Menge $M = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ wählen. Wenn wir, wie im dritten Beispiel auf S. 105, die Elemente von N als die Stellenzeiger eines Dezimalbruchs (rechts vom Komma) auffassen und wenn wir links vom Komma stets eine Null anschreiben, so stellt, ähnlich wie dort, die Belegungsmenge (N/M) ersichtlich *die Menge aller* (*endlichen und unendlichen*) *mit* 0, . . . *beginnenden Dezimalbrüche* dar. Diese Menge besitzt also die Kardinalzahl $10^{\mathfrak{a}}$. — Diese Tatsache macht sich der Leser, der etwa die CANTORsche Definition zunächst überschlagen hat, auch leicht auf Grund der Potenzdefinition von S. 104 klar; er bilde zur Konstruktion von $10^{\mathfrak{a}}$ das Produkt $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \ldots$ von abzählbar unendlichvielen Mengen, deren jede 10 geeignet gewählte Elemente umfaßt, und überzeuge sich, daß die Elemente der Verbindungsmenge

bis auf die Schreibweise mit den oben bezeichneten Dezimalbrüchen zusammenfallen.

Die Mächtigkeit dieser Menge von Dezimalbrüchen können wir andererseits auch auf folgende Art bestimmen: Nach Satz 1 auf S. 48 besitzt die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Die Menge aller endlichen (abbrechenden) Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 ist eine unendliche Teilmenge der Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1; denn jeder endliche Dezimalbruch läßt sich auch als gemeiner Bruch (mit einer Potenz von 10 als Nenner) schreiben. Die Menge aller endlichen Dezimalbrüche ist also abzählbar (Satz 1 auf S. 29). Die Menge aller endlichen und unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 hat demnach die Mächtigkeit $\mathfrak{c} + \mathfrak{a}$, die nach S. 87 gleich $\mathfrak{c}$ ist. Wir haben also das folgende Ergebnis gewonnen:

$$10^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Daß in dieser Beziehung gerade die Kardinalzahl 10 auftritt, beruht allein darauf, daß unser Ziffernsystem, das auch der Bildung der Dezimalbrüche zugrunde liegt, entsprechend der Anzahl unserer Finger auf die Zahl 10 gegründet ist. Von der Tatsache, daß der Mensch zehn Finger besitzt, können aber die Wahrheiten der Mathematik nicht abhängig sein. Wirklich kann man alle reellen Zahlen ebensogut unter Zugrundelegung einer beliebigen anderen natürlichen Zahl n, die nur nicht die Eins sein darf (weil deren Potenzen nicht wachsen, sondern alle wieder gleich Eins sind), in Form unendlicher und endlicher „systematischer n-albrüche" darstellen, wobei statt der Potenzen von 10 und $\frac{1}{10}$ die Potenzen von n und $\frac{1}{n}$ die Rolle der Einheiten spielen[1]. Wählt man z. B. n so klein als möglich, nämlich $= 2$, so werden alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch alle unendlichen „Dualbrüche" der Form $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ dargestellt, wobei für b_1, b_2 usw. nur die zwei Werte 0 und 1 zulässig sind. Setzt man auf Grund dieser elementaren Tatsache der Arithmetik in der zuletzt angestellten Betrachtung n an die Stelle von 10, so ergibt sich:

$$n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} \quad (n = \text{von 1 verschiedene endliche Kardinalzahl}).$$

Da also im besonderen auch $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ ist, so folgt nach Satz 1 (S. 107):

Satz 3. *Die Menge aller Teilmengen einer abzählbaren Menge (z. B. der Menge der natürlichen Zahlen) besitzt die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums. Allgemeiner gilt für jede endliche Kardinalzahl $n > 1$:*

$$n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Daß die Menge aller n-albrüche zwischen 0 und 1 äquivalent ist der Menge aller Dezimalbrüche zwischen diesen Grenzen, läßt sich auch leicht direkt be-

[1] Vgl. z. B. Loewy [1], S. 102—104.

weisen, ohne Berufung auf arithmetische Tatsachen. Wir benutzen zu diesem Zwecke (nach J. König [5], S. 219f.) den Äquivalenzsatz und wählen für n der Anschaulichkeit halber einen bestimmten Zahlenwert, etwa wie oben $n = 2$ (Dualbrüche). Dann ist einerseits die Menge der Dualbrüche einer Teilmenge der Dezimalbruchmenge äquivalent, nämlich der Menge all *der* Dezimalbrüche, in denen nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen; jeder Dezimalbruch dieser Art läßt sich ja als Dualbruch lesen und umgekehrt. Andererseits kann man der Menge aller Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 leicht eine äquivalente Teilmenge der Dualbruchmenge auf folgende Art zuordnen: ist ein Dezimalbruch $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ vorgelegt, dessen Ziffern a_1, a_2 usw. (allgemein a_k) also sämtlich zwischen 0 und 9 liegen, so soll an die Stelle von a_k eine Eins mit Voranstellung von a_k Nullen treten, also eine Gruppe von $a_k + 1$ Ziffern; z. B. ist so der Dezimalbruch 0,41021 ... zu ersetzen durch

$$0{,}000010110010 1 \ldots .$$

Hiernach wird jedem Dezimalbruch eindeutig ein gewisser Dualbruch zugeordnet, und zwar umkehrbar eindeutig, da nach dieser Vorschrift niemals zwei verschieden geschriebenen Dezimalbrüchen der nämliche Dualbruch entsprechen kann. Es ist also die Menge der Dualbrüche äquivalent einer Teilmenge der Menge der Dezimalbrüche, diese umgekehrt äquivalent einer Teilmenge der Menge der Dualbrüche; nach dem Äquivalenzsatz sind somit beide Mengen einander äquivalent, ihre Kardinalzahlen $2^{\mathfrak{a}}$ und $10^{\mathfrak{a}}$ also gleich.

Unter Benutzung der Cantorschen Potenzdefinition sieht man sofort, daß $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ gleich der auf S. 63 eingeführten Kardinalzahl $\mathfrak{f}$ ist; denn die dort untersuchte Menge aller zwischen 0 und 1 definierten reellen Funktionen läßt sich als die Belegungsmenge des Kontinuums mit sich selbst (genauer: der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit der Menge *aller* reellen Zahlen) auffassen. Man erkennt an diesem Beispiel deutlich die Fruchtbarkeit des Begriffs der Belegungsmenge. — Es ist übrigens nach Satz 2: $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ [nach (4) auf S. 97], d. h. schon die Menge der reellen Funktionen, die *nur zwei* (oder *endlichviele*) verschiedene Werte (z. B. nur die Werte 0 und 1) annehmen können, besitzt die Kardinalzahl $\mathfrak{f}$. Diese ist somit nach Satz 1 gleichzeitig die Kardinalzahl der Menge aller Teilmengen des Kontinuums. Man erkennt so, in wie unvergleichlich stärkerem Maße die Kardinalzahl der Funktionenmenge (Belegungsmenge) von der *Argument*menge (der zu belegenden Menge) N abhängig ist als von der Menge M der zulässigen Funktionswerte (Belegungswerte); auch in der Arithmetik wächst ja der Wert einer Potenz weit rascher mit zunehmendem Exponenten als mit zunehmender Basis.

6. Weitere Beispiele. Wir stellen noch einige weitere Beispiele für das Potenzieren von Kardinalzahlen zusammen. Es ist: $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (Gleich. (2) auf S. 97), $\mathfrak{a}^3 = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, allgemein

$$\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \text{ für jede endliche Kardinalzahl } n.$$

Weiter ergibt sich bei Benutzung der Potenzregeln (Satz 2):

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} &= (n \cdot \mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} \text{ (Gleich. (1) auf S. 97)} = n^{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \\ &= n^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \text{ (Gleich. (2) auf S. 97)} = (n^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = (n^{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} \\ &= (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} \text{ (Satz 3)} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} \text{ (Gleich. (4) auf S. 97)} \\ &= (n^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = n^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}} = n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}, \text{ also}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}\,.$$

Dieses Beispiel zeigt deutlich die Möglichkeit eines erfolgreichen Rechnens mit unendlichen Kardinalzahlen auf Grund der für sie gültigen Rechenregeln.

Ferner ist nach Gleichung (5) auf S. 98 $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, also auch $\mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}^2 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ usw., allgemein $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$ für jede endliche Kardinalzahl n. Dies folgt übrigens nunmehr weit einfacher aus

$$\mathfrak{c}^n = (2^{\mathfrak{a}})^n = 2^{n\,\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}\,.$$

Weiter gilt:

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}\,.$$

Mit berechtigter Genugtuung konnte CANTOR 1895 auf diese kurze und gewissermaßen mechanische Ableitung der Beziehungen $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ hinweisen ([12 I], S. 488), die ihn 18 Jahre vorher eine längere und in ihren Methoden Erfindergeist erfordernde Abhandlung [6] gekostet hatte (vgl. die Ableitung von $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ auf S. 98ff.). Das Rechnen mit den unendlichen Kardinalzahlen auf Grund der eingeführten Definitionen und der aus ihnen folgenden Rechenregeln erweist sich so als ein wertvoller Mechanismus zur Ersparnis gedanklicher Arbeit; gerade die Erfindung derartiger Mechanismen gehört zu den bevorzugten Aufgaben der Mathematik und spielt vielfach für den Fortschritt der Wissenschaft eine entscheidende Rolle (vgl. die Erfindung der Differential- und Integralrechnung).

Genau entsprechend, wie wir auf S. 98f. durch Einführung von Koordinaten sahen, daß die Menge aller Punkte eines Quadrats oder auch einer unbegrenzten Ebene die Kardinalzahl $\mathfrak{c}^2$ besitzt, erkennt man, daß die Menge aller Punkte eines Würfels oder des unbegrenzten dreidimensionalen Raumes die Kardinalzahl $\mathfrak{c}^3$ hat (entsprechend der Dimensionenzahl 3). Wir erhalten also das merkwürdige Ergebnis:

Satz 4. *Die Menge aller Punkte des unendlichen dreidimensionalen Raumes besitzt die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ des Kontinuums. Man kann also die Menge aller Punkte des Raumes auf die Menge aller Punkte einer noch so kleinen linearen Strecke so abbilden, daß jedem Punkt des Raumes ein einziger Punkt der Strecke zugeordnet ist und umgekehrt.*

Spricht man, wie es der Mathematiker vielfach tut, auch von Räumen mit mehr als drei Dimensionen, so wird in einem „mehrdimensionalen Koordinatenraum" jeder Punkt des Raumes durch so viele unabhängige reelle Zahlen (Koordinaten) definiert, als die Anzahl der Dimensionen beträgt. Die Menge aller Punkte eines derartigen Raumes von n bzw. $\mathfrak{a}$ Dimensionen hat also die Kardinalzahl $\mathfrak{c}^n$ bzw. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}$; denn jeder Punkt ist umkehrbar eindeutig durch einen Komplex von Koordinaten

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

bestimmt, wobei die einzelnen Koordinaten alle reellen Zahlen durchlaufen. Da, wie wir sahen, $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ ist, so gilt:

Zusatz. *Auch die Menge aller Punkte eines Raumes von beliebig (endlich) vielen Dimensionen oder von abzählbar unendlichvielen Dimensionen hat nur die gleiche*

Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ *wie die Menge aller Punkte des eindimensionalen (linearen) Kontinuums.*

Zum Schluß werde von den Begriffen und Ergebnissen des Potenzierens noch eine Anwendung gemacht, die über die Grenzen der Mengenlehre hinaus von Interesse ist und die gleichzeitig den Nutzen des Äquivalenzsatzes in helles Licht rückt. Wir betrachten *die Menge S aller (reellen) stetigen Funktionen* $y = f(x)$ *einer reellen Veränderlichen* x. Dabei setzen wir, ohne den Begriff der Stetigkeit scharf zu zergliedern, über ihn nur das Eine als bekannt (oder plausibel) voraus: der Wert einer stetigen Funktion $f(x)$ für einen bestimmten Wert (Stelle) x_0 ist völlig bestimmt durch Funktionswerte in der „Nachbarschaft", nämlich an den Stellen einer Menge, in der sich namentlich auch solche Stellen befinden, die sich von der Stelle x_0 um beliebig wenig unterscheiden. Daher ist eine stetige Funktion schon *vollständig* (auch für die irrationalen x) gegeben, sobald nur ihre Werte an den *rationalen* Stellen x bekannt sind; denn den irrationalen Stellen kommen immer rationale beliebig nahe (vgl. S. 149), z. B. einem unendlichen Dezimalbruch dessen endliche Annäherungsbrüche, die rational sind. (Allgemeiner: eine stetige Funktion ist schon durch jede abzählbare und dichte [S. 144] Teilmenge ihrer Funktionswerte festgelegt, eine ganz willkürliche Funktion dagegen erst durch die Gesamtheit ihrer Werte.)

Wenn wir nun die (abzählbare) Menge aller rationalen Zahlen x mit der (die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzenden) Menge aller reellen Zahlen y belegt denken, so entsteht eine Belegungsmenge von der Kardinalzahl $\mathfrak{c}^{a} = \mathfrak{c}$ (S. 112). Die Menge S der stetigen Funktionen läßt sich aber als eine Teilmenge eben dieser Belegungsmenge auffassen. Jede stetige Funktion stellt nämlich, wie wir vorher sahen, eine gewisse Belegung der rationalen Zahlen x mit reellen Zahlen y dar. (Allerdings läßt sich dies nicht umkehren; denn auch die Werte y an den *rationalen* Stellen x dürfen nicht ganz beliebig vorgeschrieben werden, weil — wegen der Stetigkeit — der Wert an einer rationalen Stelle durch die Werte an den benachbarten rationalen Stellen mitbestimmt ist; auf diesen recht verwickelten Sachverhalt braucht glücklicherweise gar nicht eingegangen zu werden.) Andererseits ist eine Teilmenge der Funktionenmenge S äquivalent dem Kontinuum, z. B. schon die Menge aller *konstanten* (und daher von selbst stetigen) Funktionen (S. 66). Die Kardinalzahl von S ist also (nach dem Äquivalenzsatz oder) nach Satz 5 auf S. 76 zugleich $\leqq \mathfrak{c}$ und $\geqq \mathfrak{c}$, also gleich $\mathfrak{c}$. Der Äquivalenzsatz, der hier schwer zu entbehren ist, erlaubt uns gerade, von dem oben angedeuteten komplizierten Verhältnis der Menge S zu der betrachteten Belegungsmenge ganz abzusehen. Wir erhalten so das Ergebnis (vgl. CANTOR [7 V], S. 590), das zu dem Satz von S. 63 über die Kardinalzahl der Menge *aller* reellen Funktionen in scharfem Gegensatz steht: *Die Menge aller (reellen) stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Für den kundigen Leser mag es demgegenüber wissenswert sein, daß die Menge der (auch nur im RIEMANNschen Sinn) integrierbaren Funktionen, entgegen einer Vermutung CANTORS ([7 V], S. 590), die größere Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ hat, also äquivalent ist der Menge *aller* Funktionen überhaupt (vgl. JOURDAIN [1], S. 178f.); für die Menge der differentiierbaren Funktionen dagegen gilt natürlich dasselbe wie für die der stetigen. Vgl. auch SCHOENFLIES [8], S. 60 bis 63 und 367f.

7. Das Problem des Unendlichkleinen[1]. Bevor wir jetzt von den unendlichen Kardinalzahlen, die wir als den in bestimmtem Sinn

[1] Der Rest dieses Paragraphen kann überschlagen werden, ohne daß das Verständnis des Nachfolgenden beeinträchtigt würde; er wendet sich vor allem an die *philosophischen* Interessenten am Unendlichkleinen.

nächstliegenden Typus des Unendlichgroßen kennengelernt haben, zu einem anderen Gegenstand übergehen, werde noch das *Problem des aktual Unendlichkleinen* kurz gestreift, das im Anschluß an die Mengenlehre vornehmlich von philosophischer, aber auch von mathematischer Seite aufgeworfen worden ist.

Während für das Unendlich*große* CANTOR dem potentiellen Unendlich der Analysis mit Nachdruck sein aktuales Unendlich, das Transfinite, gegenübergestellt (vgl. S. 7f.) und innerhalb dessen eine Fülle von Abstufungen unterschieden, ja eine ganze transfinite Arithmetik entwickelt hat, ist hinsichtlich des Unendlich*kleinen* von ihm nur das potentielle Unendlich der älteren Mathematik anerkannt worden. Wie der Leser aus seiner etwaigen Bekanntschaft mit den Elementen der höheren Mathematik weiß und anderenfalls z. B. aus den leichtverständlichen Darstellungen bei HESSENBERG [2] oder PASCH [4] (S. 47—73) entnehmen kann, herrscht hinsichtlich des „Unendlichkleinen“ oder „Infinitesimalen“ der Differential- und Integralrechnung sowie anderer analytischer und geometrischer Gebiete unter den Mathematikern seit langem — unbestritten seit CAUCHY — die folgende Auffassung, die im Grunde schon von NEWTON und LEIBNIZ, den Erfindern der Infinitesimalrechnung, vertreten worden ist: Das Unendlichkleine ist nur im Sinn einer Redeweise (vgl. das Zitat auf S. 1) auf der Grundlage des Grenz- oder Limesbegriffs, also eines *potentiellen* Unendlich, zu verstehen; es handelt sich um veränderliche, unbegrenzt der Null sich annähernde Zahlen oder Größen, die unter jeden noch so kleinen positiven Betrag hinabsinken können. Eine feste, von Null verschiedene und allen positiven endlichen Werten als untere Schranke dienende Zahl ist nicht möglich[1].

Demgegenüber wurde namentlich von H. COHEN und innerhalb der von ihm geführten Neukantischen Schule der Versuch gemacht, die Infinitesimalmethode auf das Differential als ein *aktual Unendlichkleines* zu gründen, das in ähnlichem Sinn fest und abgeschlossen sowie auch näher umgrenzbar sein sollte wie das Unendlichgroße der Mengenlehre (vgl. etwa NATORP [1], 4. Kap., und die dort angeführten Schriften). Ein derartiger Versuch kann sich übrigens in gewissem Maß auf das Vorbild des Rechnens mit Differentialen berufen, wie es — freilich ohne hinlängliche Begründung und Berechtigung — in der Jugendepoche der Infinitesimalrechnung geübt wurde; indes kann ein solcher Rückfall in die Gepflogenheiten eines vergangenen Zeitalters zwar allenfalls durch ein didaktisch gewendetes biogenetisches Grundgesetz als Durchgangsstufe gerechtfertigt, keinesfalls aber als eine Tugend neu empfohlen werden. Die Verfechter dieser Rückkehr zum Unendlichkleinen ver-

[1] Man vergleiche etwa die uns heute erstaunlich anmutende Diskussion zwischen LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI, auf die WEYL [7], S. 36, hinweist.

fuhren neuerdings vielfach so, daß sie die unendlichen Kardinalzahlen oder auch die im § 12 zu behandelnden unendlichen Ordnungszahlen als Vorbild nahmen: wie diese Zahlen zur Eins (und auch zueinander) in Verhältnissen stehen, die als unendlichgroße zu bezeichnen sind, so seien entsprechend in mannigfacher Abstufung Zahlen zu bilden und in die Mathematik einzuführen, zu denen die Eins (bzw. eine beliebige endliche Zahl) in einem unendlichgroßen Verhältnis steht und die daher als unendlichklein anzusehen wären. Gewissermaßen die reziproken Werte der unendlichgroßen Zahlen sollten ihnen als unendlichkleine Zahlen korrelativ gegenübertreten.

Natürlich kann bei der Ablehnung, die solche Anschauungen bei den Mathematikern, und zwar schon bei CANTOR — dem sie allerdings in anderer Einkleidung entgegengetreten waren[1] — gefunden haben, nicht von einem dogmatischen Standpunkt die Rede sein. Polizeiliche Denkverbote gibt es im Reiche der Mathematik nicht und wissenschaftliche Vorurteile können sich in ihm nicht lange aufrecht erhalten, wie dies von niemandem lebhafter betont worden ist als gerade von CANTOR selbst, der die Mühsale des Kampfes gegen derartige Vorurteile nur allzudeutlich selbst empfunden hat[2]. Auch der Einwand, daß eine Begriffsbildung der oben bezeichneten Art in sich widerspruchsvoll sei, m. a. W., daß über der Korrelationsbetrachtung (Unendlichgroßes $: 1 = 1 : x$) die Existenzfrage (gibt es überhaupt solch ein x?) vernachlässigt bzw. durch eine petitio principii umgangen werde, wäre zunächst nicht ganz stichhaltig. Denn die bloße „Setzung" eines Begriffs, mit der sich die philosophische Betrachtung zuweilen begnügt, wird *an sich* selten und gewiß nicht in diesem Falle zu Widersprüchen führen; vielmehr muß man sich auf solche in der Regel erst dann gefaßt machen, wenn man mit den gesetzten Begriffen etwas anfangen will — das bedeutet aber für Zahlen vornehmlich: wenn man mit ihnen zu *rechnen* und sie weiterhin auf wissenschaftliche Probleme anzuwenden unternimmt.

In diesen beiden Beziehungen versagt aber das aktual Unendlichkleine, zum mindesten in seinen bisher vorgeschlagenen Formen, und deshalb führt es in der Mathematik eine höchst kümmerliche Existenz, die in keiner Weise der des Unendlichgroßen in der Mengenlehre vergleichbar ist. Man muß daher sagen: *dem potentiellen, in Wirklichkeit auf Endliches reduzierbaren Unendlichkleinen der Analysis ist ein aktual Unendlichkleines nicht zur Seite getreten.*

Daß unendlichkleine Zahlen, wenn sie im obigen Sinn als reziproke Werte der unendlichen Kardinalzahlen eingeführt werden sollen, jedenfalls kein vernünftiges Rechnen gestatten, erhellt aus dem, was gegen Ende des vorigen Paragraphen (S. 96) über die Umkehrung der Multipli-

[1] Vgl. CANTOR [10], [13] und [14].
[2] Vgl. CANTORS auf S. 78f. angeführtes Motto sowie SCHOENFLIES [12], S. 14.

kation der Kardinalzahlen gesagt worden ist; der Versuch scheitert daran, daß keine eindeutige Division möglich ist, wie es aus dem entsprechenden Grund auch keinen Sinn hätte, „negative" unendliche Kardinalzahlen einzuführen. So könnte man z. B. das Produkt $\mathfrak{c} \cdot \frac{1}{\mathfrak{c}}$ mit dem nämlichen Recht gleich einer beliebigen endlichen Zahl n (wegen $\mathfrak{c} = n \cdot \mathfrak{c}$) oder gleich $\mathfrak{a}$ (wegen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$) oder gleich $\mathfrak{c}$ (wegen $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$), aber aus denselben Gründen auch z. B. gleich $\frac{1}{\mathfrak{c}}$ setzen. Die sorgsameren Begriffsbildungen und Rechenfestsetzungen, wie sie z. B. in der mathematisch tiefsten Behandlung des aktual Unendlichkleinen durch VERONESE und LEVI-CIVITA vorliegen, erfordern daher mancherlei Umständlichkeiten und bringen Nachteile anderer Art mit sich (vgl. den nächsten Absatz); man vergleiche hierzu neben VERONESES Hauptwerk [1] und LEVI-CIVITA [1] sowie der zusammenhängenden Darstellung bei NATUCCI [1] (XI. Kapitel) etwa noch HÖLDER [1] und SCHOENFLIES [3] sowie [1 II], S. 53—64, wo weitere Literaturangaben zu finden sind.

Wenn man demgemäß versuchen wird, durch geeignete Festsetzungen die erste Bedingung, die Möglichkeit des Rechnens, zu sichern, so wird doch das zweite erstrebte Ziel, die Fruchtbarkeit und Anwendungsfähigkeit der unendlichkleinen Zahlen, vollends verfehlt oder mindestens ganz ungenügend erreicht. Mit Recht stellen die Neukantianer wie auch z. B. GEISSLER ([1] und [2]) mit in den Vordergrund den *Wert* der unendlichkleinen Zahlen, der sie nachträglich erst voll legitimieren soll, und mit Recht weisen sie hierbei speziell auf die *Infinitesimalrechnung* als auf das Rhodus hin, auf dem das Unendlichkleine in Form von „Differentialen" seine Leistungsfähigkeit zu zeigen habe; scheinen doch die Methoden dieses grundlegenden Zweiges der Mathematik die Verwendung des Unendlichkleinen geradezu zu fordern, wie das schon der Name andeutet. *Bei dieser Probe hat aber das Unendlichkleine restlos versagt.* Die bisher in Betracht gezogenen und teilweise sorgfältig begründeten Arten unendlichkleiner Größen haben sich zur Bewältigung auch nur der einfachsten und grundlegendsten Probleme der Infinitesimalrechnung (etwa zum Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung oder zur Definition des bestimmten Integrals) als völlig unbrauchbar erwiesen (vgl. z. B. F. BERNSTEIN [1]). Sie mußten der bisherigen (verhältnismäßig umständlichen) Begründungsmethode mittels des Grenzwertbegriffs das Feld ungeschmälert belassen; es besteht auch kein Grund zu der Erwartung, daß sich hierin künftig etwas ändern werde. Gewiß wäre es an sich *denkbar* (wenn auch aus guten Gründen äußerst unwahrscheinlich und jedenfalls beim heutigen Stand der Wissenschaft in ungreifbarer Ferne liegend), daß ein zweiter CANTOR dereinst eine einwandfreie arithmetische Begründung neuer unendlichkleiner Zahlen

gäbe, die sich als mathematisch brauchbar erweisen und ihrerseits vielleicht einen einfachen Zugang zur Infinitesimalrechnung eröffnen könnten. Solange das aber nicht der Fall ist, wird man weder die (in vieler Hinsicht interessanten) VERONESEschen noch andere unendlichkleine Zahlen in Parallele zu den CANTORschen setzen dürfen, sondern sich auf den Standpunkt stellen müssen, daß von der mathematischen und damit logischen Existenz des *Unendlichkleinen* in einem gleichen oder ähnlichen Sinn wie beim Unendlichgroßen in keiner Weise gesprochen werden kann.

8. Unendlichkleines und nichtarchimedische Größensysteme. Trotz alledem hat man, wie bemerkt, gewisse in einem *formalen* Sinn unendlichkleine Zahlen in die Mathematik eingeführt und zu umgrenzten Aufgaben mit Vorteil verwendet. Zum Verständnis des Wesens solcher Zahlen gehen wir vom sog. *Axiom des* ARCHIMEDES (historisch richtiger: EUDOXUS) aus, das besagt: sind zwei Strecken gegeben, so kann man durch hinreichend oftmaliges (endlichmaliges) Hintereinanderantragen der kleineren Strecke immer eine Strecke erzielen, die die größere der gegebenen Strecken übertrifft. Dieser selbstverständlich scheinende Satz spielt bei der Begründung der Geometrie wie auch der Arithmetik — sofern man nämlich für die Streckenlängen reelle Zahlen eintreten läßt — eine wesentliche Rolle. Ein System geometrischer oder arithmetischer Größen, in dem jener Satz nicht erfüllt ist, bezeichnet man als ein *nichtarchimedisches Größensystem*; in einem solchen wird man, wenn a, noch so oft zu sich selbst hinzugefügt, immer einen unterhalb b bleibenden Betrag ergibt, a unendlichklein im Vergleich zu b (oder, falls b „endlich“ ist, unendlichklein schlechthin) oder auch b unendlichgroß im Vergleich zu a nennen. Derartige und zwar auch höchst allgemeine nichtarchimedische Größensysteme hat man in den letzten Jahrzehnten öfters und zu sehr verschiedenartigen Zwecken eingeführt[1]. Von dem Verhalten der unendlichgroßen Zahlen der Mengenlehre (bzw. des gewünschten, aber nicht möglichen reziproken Gegenbilds) unterscheiden sie sich durch das Fehlen des *Anzahl*- (oder Ordnungszahl-)momentes, wie es die transfiniten Zahlen z. B. mit der Eins verknüpft. Demgemäß wird bei jenen Größensystemen in der

[1] Schon Polynome in einer Variabeln x bilden ein solches System, wenn man z. B. $nx < 1$ (für jedes n) festsetzt. Für tieferliegende Beispiele vergleiche man außer den schon genannten Arbeiten etwa HILBERT [2], § 12; HAHN [1]; VAHLEN [1]; FRAENKEL [1]; ARTIN-SCHREIER [1]; BAER [1]. (Vgl. auch CHWISTEK [4].) Ein sehr anschauliches und schon frühzeitig erörtertes Beispiel stellen die „hornförmigen“ Winkel zwischen sich berührenden Kurven (z. B. einem Kreis und seiner Tangente) gegenüber den Winkeln zwischen Geraden dar. Für die in diesem Zusammenhang besonders wichtige Theorie der Wachstumsordnung vergleiche man neben DU BOIS-REYMOND [1] etwa HARDY [3] sowie den zitierten vielseitigen Aufsatz von BAER, der auch weitere Literaturangaben enthält.

Regel durch eine wiederholte Addition der nämlichen Zahl die Summe gegenüber der Ausgangszahl zwar unter Umständen verkleinert, nicht aber wesentlich vergrößert; in der Mengenlehre dagegen, wo 1 unendlichklein ist im Vergleich zur kleinsten unendlichen Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, wird diese durch abzählbar unendlichmalige Addition von 1 erreicht (S. 94).

Dieser Gegensatz wurzelt aber in einem innerlichen Unterschied hinsichtlich der ganzen Art der Einführung und Begründung des Unendlichgroßen in der Mengenlehre einerseits, in den nichtarchimedischen Größensystemen andererseits; in einem Gegensatz, der auch begründet, warum man es in diesen Größensystemen mit bloß *relativ*, in der Mengenlehre aber mit *absolut* Unendlichgroßem zu tun hat. Bei der Einführung der Kardinalzahlen wie auch der in den §§ 9 und 12 zu behandelnden Ordnungstypen und Ordnungszahlen operiert die Mengenlehre nicht etwa rein formal derart, daß sie neue Symbole einführt als „Zahlen", die gegenüber den gewöhnlichen Zahlen als unendlichgroß erklärt werden, und mehr oder weniger willkürlich das Rechnen mit solchen Zahlen widerspruchsfrei festsetzt; ein derartiges Vorgehen würde verhältnismäßig einfach sein und keines eigenen wissenschaftlichen Gebäudes bedürfen, aber mangels einer natürlichen Grundlage, die gleichzeitig eine entsprechende Anwendungsfähigkeit bedingt, wenig Interesse oder Nutzen bringen. In Wirklichkeit geht die Mengenlehre vielmehr von dem gewissermaßen anschaulichen Begriff der *Menge* aus und gelangt von da aus in konsequenter, durch das wissenschaftliche Bedürfnis geleiteter Begriffsbildung (vgl. die auf S. 3f. angeführte Stelle aus CANTOR [7 V]) zu den verschiedenen Arten „unendlicher Zahlen"; deren Größenanordnung und Rechengesetze werden dementsprechend nicht durch willkürliche Definitionsakte *vorgeschrieben* (erfunden), sondern gewissermaßen der Natur abgelauscht, d. h. (auf Grund anschaulich naheliegender Grunddefinitionen) in ihrer zwangsläufig gegebenen Struktur, wie sie jeweils der Sonderart der betreffenden Zahlengattung entspricht, *festgestellt* (entdeckt)[1]. So ergeben sich (vgl. die §§ 7—9 und 12) die untereinander sehr verschiedenartigen Gesetze der Rechenoperationen für die einzelnen Zahlenarten, die a priori so festzusetzen keinerlei Grund bestanden hätte und auf deren Festsetzung in dieser Art man von philosophischer, rein auf den Be-

---

[1] Natürlich bezieht sich dieses „Feststellen" nur auf den intuitiven Weg zu einer neuen Theorie, auf dem ja die Phantasie eine weit wesentlichere Rolle spielt als das Denken, sowie auf die Folgerungen aus den Definitionen, nicht aber auf die logisch-systematische Darstellung der Begriffsbildungen. In der Systematik sind die eigentlichen (expliziten) Definitionen der Mathematik immer Festsetzungen und nicht etwa „Feststellungen" aus irgendwie „gegebenen" Sachverhalten (siehe DUBISLAV [2]).

griff des Unendlichgroßen gerichteter Betrachtung her ganz gewiß nicht verfallen wäre[1].

Ein derartiger „natürlicher" Zugang, wie ihn zum Unendlichgroßen die Mengenlehre gibt, existiert aber zum *Unendlichkleinen* bisher überhaupt nicht[2]; der Begriff der Menge, die entweder mindestens éin Element umfaßt (d. h. eine Kardinalzahl [oder Ordnungszahl] $\geqq 1$ hat) oder überhaupt keine Elemente besitzt (also auf die Nullmenge zusammenschrumpft), ist in dieser Beziehung nutzlos und ein anderer brauchbarer Weg ist mindestens bis heute nicht aufgefunden worden. So ist denn auch vom Standpunkt der *Begründung* aus, womit übrigens die beschränkte Anwendungsfähigkeit der nichtarchimedischen Größensysteme in enger Beziehung steht, die Frage des aktual Unendlichkleinen weitgehend negativ zu beantworten.

Aufgaben. 1. Man zeige direkt (durch Konstruktion einer Abbildung), daß aus $M \sim M'$ und $N \sim N'$ die Äquivalenz der Belegungsmengen (N/M) und (N'/M') folgt — eine Tatsache, die der CANTORschen Potenzdefinition offenbar als notwendige Bedingung zugrunde liegt.

2. Man beweise, daß für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gilt: $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}$, $1^{\mathfrak{m}} = 1$.

3. Für die in Fußnote 1 auf S. 107 angeführten ch(arakteristischen) F(unktion)en — bei fester Ausgangsmenge N — gelten u. a. folgende Gesetze: Die zum Durchschnitt zweier Teilmengen gehörige ch. F. ist das Produkt der zu den einzelnen Teilmengen gehörigen ch. Fen.; die zur

---

[1] Das schließt freilich eine nachträgliche dogmatische, namentlich auch axiomatische Begründung nicht aus (vgl. fünftes Kapitel), wie dies ja auch von Arithmetik und Geometrie gilt; vielmehr hat eine derartige Begründung in all diesen Fällen ihre methodischen Vorzüge, z. B. auch zur Klärung der gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnisse zwischen den einzelnen Rechengesetzen usw. Übrigens läßt sich auch auf solchem Wege zeigen, daß es unmöglich ist, *aktual unendlichkleine* Zahlen in den Rahmen der Rechengesetze der unendlichgroßen Kardinalzahlen mithineinzuspannen (vgl. FRAENKEL [4], besonders S. 171, 180, 182f.).

[2] Für die vorstehend gemachte Unterscheidung zwischen „formaler" und „natürlicher" (oder „anschaulicher") Begründung neuer mathematischer Begriffe, auf die in scharfer Weise einzugehen nicht in der Absicht der obigen Zeilen liegt, vergleiche man auch die etwas verwandte, von CANTOR hervorgehobene Unterscheidung zwischen *immanenter* und *transienter* Realität von Begriffen (CANTOR [7 V], § 8). Der z. B. mit der Theorie der höheren komplexen Zahlen vertraute Leser denke etwa einerseits an ein durch willkürliche (nur miteinander verträgliche) Additions- und Multiplikationsregeln definiertes System solcher Zahlen, dessen Eigenschaften im allgemeinen für die übrige Mathematik bedeutungslos sein werden, andererseits an die durch das Bedürfnis von Algebra und Funktionentheorie nahegelegte „transiente" Begründung der gemeinen komplexen Zahlen vermittels der ebenen Vektoren (GAUSSsche Zahlenebene) oder auch an die Begründung der HAMILTONschen Quaternionen! Allerdings ist die Kluft zwischen dem Unendlichen der Mengenlehre und dem der nichtarchimedischen Größensysteme eine weit tiefere. — Eine auf die *Außenwelt* sich beziehende transiente Begründung steht freilich auch für das Unendlichgroße nicht zur Verfügung (vgl. S. 6f. zu Beginn des Beispiels 4; ferner S. 373f.).

Vereinigungsmenge zweier *elementefremder* Teilmengen gehörige ch. F. ist die Summe der zu den einzelnen Teilmengen gehörigen ch. Fen.; für zwei beliebige Teilmengen entsteht durch Addition der zugehörigen ch. Fen. die nämliche Funktion, wie durch Addition der zur Vereinigungsmenge und zum Durchschnitt gehörigen ch. Fen. Beweis!

4. Man beweise die Potenzregeln (2) und (3) in Satz 2, und zwar (2) mittels der auf S. 104 gegebenen, (3) mittels der CANTORschen Potenzdefinition!

5. Man beweise $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ ohne Rechnung auf entsprechendem Weg, wie er zum Beweis des Satzes 8 auf S. 101 eingeschlagen wurde!

6. Man beweise $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ mittels des Äquivalenzsatzes!

7. Man zeige, daß $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots = \mathfrak{c}$, sowie daß $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$ (d. i. die Mächtigkeit der Menge aller Funktionen, die nur *rationaler* Werte fähig sind) $= \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}$.

8. Die Menge aller *Folgen* von natürlichen Zahlen oder auch aller *abzählbaren* Teilmengen des Kontinuums hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Beweis!

9. (Für den mit den Elementen der Funktionenlehre Vertrauten.) Man beweise, daß die Menge aller analytischen, d. h. durch konvergente *Potenzreihen* darstellbaren Funktionen und allgemeiner sogar die Menge aller Funktionen, die sich durch konvergente Reihen *stetiger Funktionen* darstellen lassen, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt! (In Verbindung mit dem auf S. 113 angeführten Ergebnis JOURDAINS folgert man hieraus leicht, daß eine integrierbare Funktion sich „im allgemeinen“ nicht in eine konvergente — auch nicht in eine *ungleichmäßig* konvergente — Reihe stetiger Funktionen entwickeln läßt; das beleuchtet den „pathologischen“ Charakter der allgemeinen integrierbaren Funktion.)

Drittes Kapitel.

Ordnungstypen und Ordnungszahlen.

§ 9. Geordnete Mengen. Ähnlichkeit und Ordnungstypus.

1. Allgemeine Vorbemerkungen. All unsere bisherigen Überlegungen haben an den Begriff der unendlichen Menge nur in der einen Richtung angeknüpft, daß wir uns mit den *Kardinalzahlen* der Mengen beschäftigt haben, d. h. mit dem, was je allen untereinander *äquivalenten* Mengen gemeinsam ist. Da in der ersten Hälfte des vorliegenden Buches der Hauptnachdruck darauf gelegt ist, dem Leser die Möglichkeit der Einführung „unendlichgroßer Zahlen“ und ihrer vernünftigen und fruchtbaren Verwendung vor Augen zu führen, so erscheint diese Hervorhebung des Äquivalenzbegriffs als berechtigt; denn in den un-

endlichen Kardinalzahlen, ihrer Vergleichung und dem Rechnen mit ihnen haben wir eine besonders einfache und wichtige Klasse solcher Zahlen und ihre Eigenschaften kennengelernt.

Zwei äquivalente Mengen können aber, auch wenn man von der besonderen *Natur ihrer Elemente* absieht, neben der ihnen gemeinsamen Kardinalzahl noch Verschiedenheiten aufweisen, deren Gesamtheit man als die verschiedene *Anordnung ihrer Elemente* bezeichnen kann. Ist z. B. M die Menge der natürlichen Zahlen in der gewöhnlichen Reihenfolge: $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$, N die Menge aller positiven Brüche, die ihrer *Größe* nach (also nicht etwa so wie auf S. 32) geordnet sind, so sind zwar M und N äquivalent, aber in bezug auf die Ordnung ihrer Elemente ganz verschieden: M hat ein erstes Element 1 und zu jedem anderen Element von M gibt es ein unmittelbar vorangehendes und ein unmittelbar nachfolgendes; N besitzt dagegen kein erstes Element, da es keinen *kleinsten* positiven Bruch gibt, und zwischen je zwei positiven Brüchen liegen immer noch positive Brüche (z. B. ihr Mittel), so daß ein beliebiges Element von N weder einen unmittelbaren Vorgänger noch einen unmittelbaren Nachfolger besitzt. Ja auch eine und die nämliche Menge zeigt ein sehr verschiedenes Aussehen je nach der Art der Anordnung ihrer Elemente. Z. B. besitzt die Menge aller ganzen Zahlen in der „natürlichen“ Reihenfolge

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

kein erstes Element, wohl aber in der Anordnung

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\};$$

andere, wesentlich verschiedene Anordnungen für diese nämliche Menge sind z. B. die folgenden:

$$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots 1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots\},$$
$$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots \quad \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots$$
$$\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots \quad \ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.$$

In ganz handgreiflicher Andeutung kann man bei den geordneten Mengen etwa an eine offene Perlenschnur denken, bei den Mengen schlechthin dagegen an einen Sack voll Kartoffeln.

Bevor wir in die systematische Entwicklung eintreten, sollen einige Bemerkungen über die Bedeutung der Theorie der Ordnung und der geordneten Mengen vorangeschickt werden[1]. Vor allem sei der (freilich über die Grenzen der rein mathematischen Betrachtung hinausführende)

[1] Der Begriff „geordnete Menge“ ist hier ausschließlich in dem nachstehend präzisierten mathematischen Sinn (auf Grund einer einheitlichen Anordnungsrelation) zu verstehen; in allgemein-philosophischer Betrachtung wird der Begriff einer geordneten Mannigfaltigkeit vielfach weiter gebraucht, z. B. auch für die (nicht ausdrücklich in bestimmter Weise geordnete) Gesamtheit aller Punkte des Raumes. Vgl. BURKAMP [1], S. 249.

Hinweis gestattet, daß in gewisser Hinsicht die *geordnete Menge* den primären Begriff darstellt, aus dem der logisch-mathematisch einfachere Begriff der *Menge schlechthin* erst durch einen Abstraktionsakt hervorgeht, gewissermaßen mittels Durcheinanderschütteln der (ursprünglich in bestimmter Reihenfolge befindlichen) Elemente (vgl. CANTORS auf S. 58 erwähnte Einführung des Begriffs der Kardinalzahl). In der Tat vermitteln uns sowohl unsere Sinne (Gesicht, Gehör usw.) wie auch unser Denken Einzeldinge und -begriffe in der Regel in einer gewissen räumlichen oder zeitlichen Ordnung, und wenn wir die Elemente einer nichtgeordneten Menge (z. B. der Menge aller Häuser der Stadt Berlin) uns gedanklich oder in schriftlicher Tabellierung einzeln vor Augen führen wollen, kann dies nicht anders als in gewisser Reihenfolge geschehen[1]. Von dieser Erwägung aus könnte man sogar daran denken, die Theorie der Ordnung (geordnete Mengen) *vor* der Theorie der Äquivalenz (Kardinalzahlen, ungeordnete Mengen) zu entwickeln. Dies wäre jedoch schon deshalb unpraktisch, weil die letztere, auf eine weitergehende Abstraktion sich stützende Theorie in ihren elementaren Teilen unvergleichlich viel einfacher ist, entsprechend dem Umstand, daß in geordneten Mengen zu der (auch in ungeordneten definierten) Gleichheitsbeziehung noch eine weitere Beziehung zwischen den Elementen tritt, eben die der Anordnung. Übrigens schreitet die systematische Entwicklung in der Mathematik auch sonst meist vom Allgemeinen zum Besonderen fort, was der hier verwendeten Reihenfolge entspricht. Es soll aber nicht verschwiegen werden, daß es auch ernstliche wissenschaftliche Argumente gibt (vgl. S. 205 sowie VON NEUMANN [2]), die für die Voranstellung der Ordnungstheorie sprechen.

Neben diesen mehr psychologischen Erwägungen ist es namentlich die Rücksicht auf die Bedürfnisse der Mathematik selbst, was die Theorie der Ordnung und der geordneten Mengen zu einem besonders wichtigen Teilgebiet der Mengenlehre stempelt. Mit der Einführung der unendlichen Kardinalzahlen haben wir nur eine einseitige Verallgemeinerung des Begriffs der natürlichen Zahl über das Endliche hinaus vorgenommen. Denn die endlichen Zahlen dienen ja im Leben und in der Wissenschaft nicht allein der Bezeichnung der *Anzahl* (der Beantwortung der Frage: *wieviele* Elemente kommen in einer vorgelegten endlichen Menge vor ?), sondern gleichzeitig auch der Bezeichnung der *Ordnungszahl*, also dem Zweck des sukzessiven Aufzählens der einzelnen Elemente in der Reihenfolge erstens, zweitens, drittens usw., was auch mathematisch (vgl. z. B. HÖLDER [2], S. 14ff., und LOEWY [1], S. 384ff.) sogar die einfachere Seite des Zahlbegriffs darstellt.

---

[1] Dem widerspricht nicht notwendig die von FETTWEIS [1] angeführte Tatsache, daß sich beim Kind wie auch bei den Naturvölkern Ordnungszahl und Kardinalzahl gleichzeitig bilden.

Bei den *endlichen Zahlen* braucht man allerdings in der weiteren mathematischen Behandlung nicht mehr zwischen Kardinalzahlen und Ordnungzahlen zu unterscheiden; das liegt an der — uns zwar durch die Gewöhnung als selbstverständlich erscheinenden, in Wirklichkeit aber keineswegs trivialen und übrigens mathematisch streng beweisbaren — Tatsache (vgl. S. 22), wonach man bei jeder wie immer vorgenommenen Numerierung der Elemente einer gegebenen endlichen Menge stets mit der nämlichen Nummer (Ordnungszahl) zum Abschluß kommt[1]; diese Ordnungszahl kann man daher, als Kardinalzahl aufgefaßt, unzweideutig zur Angabe der Anzahl der Elemente der Menge verwenden und ebenso umgekehrt. In scharfem Gegensatz hierzu lassen sich, wie die letzten Beispiele auf S. 121 und weitere nachfolgende Beispiele zeigen, die Elemente einer gegebenen *unendlichen* Menge M auf (sogar unendlichviele) *wesentlich* verschiedene Arten ordnen, so daß zur Kardinalzahl von M nicht mehr bloß éine, sondern verschiedene Typen der Anordnung gehören. Will man also den Zählprozeß über die endlichen Ordnungszahlen hinaus aufs Unendliche verallgemeinern, so kommt man mit den unendlichen Kardinalzahlen, in denen allzuviel Abstraktion steckt, nicht aus; man muß neue „Zahlen" schaffen, also Zeichen, die wir den einzelnen Elementen einer geordneten Menge in Rücksicht auf die Plätze, die sie innerhalb der Menge einnehmen, zuordnen können. Zu solchen Zeichen, die man als „Ordnungstypen" bzw. „Ordnungszahlen" bezeichnet und die eine neue Art „unendlicher Zahlen" darstellen, ist CANTOR bereits sehr frühzeitig gelangt. Man kann sie, von den geordneten Mengen ausgehend, auf einem entsprechenden Weg gewinnen, wie er von den Mengen schlechthin zu den Kardinalzahlen führt.

Außer dieser grundsätzlichen Bedeutung ist aber die Theorie der geordneten Mengen auch von großer Wichtigkeit für die *Anwendungen* der Mengenlehre auf andere mathematische Disziplinen, namentlich auf Funktionentheorie und Geometrie. Innerhalb der Theorie der Äquivalenz werden nämlich, gerade vermöge der außerordentlichen Allgemeinheit des Äquivalenzbegriffs, die spezielleren mathematischen Eigenschaften, wie Stetigkeit, Zusammenhang, Nachbar-

---

[1] Vgl. das Beispiel 1 auf S. 128. Beweise für diese Tatsache, die in ihrer Bedeutung zuerst wohl SCHRÖDER [1] erkannt, indes' als empirisches Ergebnis gedeutet hat, findet man z. B. in den oben zitierten Schriften von HÖLDER und LOEWY, sowie bei PRINGSHEIM [1], S. 15ff. Um einem Mißverständnis vorzubeugen, sei hervorgehoben, daß man in der Arithmetik nicht etwa auf den *Begriff* der endlichen Kardinalzahl (zugunsten der Ordnungszahl) gänzlich verzichten kann, worauf besonders nachdrücklich HÖLDER a. a. O. hingewiesen hat (vgl. auch HÖLDER [3], S. 161ff., sowie etwa die Bemerkung bei RAMSEY [1], S. 348). Man vergleiche ferner für die einschlägigen, den endlichen Zahlbegriff betreffenden Fragen etwa noch COUTURAT [2], DEDEKIND [2], FREGE [1] und [2], HESSENBERG [11], RUSSELL [5] sowie die (von mathematischer Seite nicht in allem zu billigenden) philosophischen Standpunkte von HEYMANS [1] und NATORP [1], ferner SPAIER [1].

schaft, Dimension usw., systematisch ausgeschaltet und geradezu von Grund auf zerstört; man denke beispielshalber an die Abzählung der rationalen Zahlen bzw. rationalen Punkte (S. 31ff.) oder an die Zuordnung der Punkte einer Strecke zu denen eines Quadrats (S. 98ff.)! Bei der Untersuchung der Funktionen und der geometrischen Gebilde sind indes eben jene hier ausgeschalteten Eigenschaften von größter Bedeutung. Die Mengenlehre würde ihre Wirksamkeit von vornherein aufs empfindlichste einengen, wollte sie unter einseitiger Ausbildung der Tendenz nach Abstraktion und Allgemeinheit etwa die unterscheidenden Eigenschaften der geschilderten Art vernachlässigen[1]; diese Eigenschaften vielmehr ihrem tiefsten Wesen nach zu klären und systematisch zu erfassen, ist eine Hauptaufgabe der Mengenlehre, die zwar nicht ausschließlich, aber immerhin zu einem wesentlichen Teil (namentlich für die linearen Mengen, siehe § 10) der Theorie der geordneten Mengen zufällt.

2. Ordnungsbeziehung und geordnete Menge. Wir beginnen mit der Einführung des Begriffs der „geordneten Menge". In Anlehnung an den gewöhnlichen Sprachgebrauch versteht man darunter eine Menge, zu der eine Regel (Gesetz) gegeben ist, wodurch *für irgend je zwei verschiedene Elemente der Menge stets bestimmt wird, daß das eine vorangeht* (*früher kommt, kleiner ist*) *und das andere nachfolgt* (*später kommt, größer ist*). Da die betreffende Regel innerhalb gewisser sogleich zu erwähnender Grenzen willkürlich bleibt und an sich nichts mit Größe oder räumlichen bzw. zeitlichen Verhältnissen zu schaffen hat, ist eine möglichst allgemeine Bezeichnung der fraglichen Ordnungsbeziehung (wie „vorangehen" und „nachfolgen") jeder spezielleren (wie „kleiner" und „größer") vorzuziehen; die Regel könnte ja z. B. auch festsetzen, daß das größere Element vorangeht, das kleinere nachfolgt. Wie immer eine derartige Anordnungsregel beschaffen ist, vernünftigerweise wird sie stets folgende drei Eigenschaften besitzen: Erstens wird kein Element sich selber vorangehen; zweitens wird kein Element einem und demselben anderen Element gleichzeitig vorangehen *und* nachfolgen[2]; drittens wird ein Element, das einem zweiten

---

[1] Es verhält sich also, wie für den Kundigen bemerkt sei, mit dem Gegensatz zwischen Äquivalenz- und Ordnungstheorie analog wie mit dem zwischen projektiver und metrischer Geometrie im Sinne von KLEINS Erlanger Programm. Von der Äquivalenz, die als Isomorphismus in bezug auf die Gleichheitsbeziehung angesehen werden kann, gelangt man nämlich zur Ähnlichkeit, indem man noch gegenüber der weiteren Beziehung der „Anordnung" den isomorphen Charakter vorschreibt.

[2] Diese zweite Eigenschaft ist von selbst erfüllt, wenn die erste und die dritte befriedigt sind (vgl. Aufg. S. 142). Im übrigen vergleiche man für größtmögliche Vereinfachung und Zerlegung der hier erörterten Grundeigenschaften jeder einfachen Ordnung HUNTINGTON [4] und [5].

vorangeht, während dieses zweite seinerseits einem dritten vorangeht, um so mehr selber dem dritten Element vorangehen.

Diese drei Eigenschaften, aber nichts Weiteres, wollen wir über die Anordnungsbeziehung für Mengen voraussetzen; im übrigen kann diese also völlig willkürlich sein. Der bequemen Bezeichnung wegen benutzt man für die Anordnungsbeziehung ein Zeichen, etwa $\prec$ (nicht zu verwechseln mit dem für die *Größenordnung der Kardinalzahlen* verwendeten Zeichen $<$); wir schreiben also $a \prec b$ (gelesen etwa: „a vor b"); wenn von den zwei Elementen a und b einer Menge auf Grund der Anordnungsregel a vorangeht und b nachfolgt. Völlig gleichbedeutend mit $a \prec b$ soll die Schreibweise $b \succ a$ („b nach a") sein. Die drei angeführten Eigenschaften lassen sich dann so ausdrücken:

1. Es ist nie $a \prec a$; 2. es ist nie gleichzeitig $a \prec b$ und $b \prec a$; 3. aus $a \prec b$ und $b \prec c$ folgt $a \prec c$. Oder in Worten: die Anordnungsbeziehung ist nicht-reflexiv, asymmetrisch und transitiv (vgl. S. 20).

Definition 1. *Ist zu einer Menge M eine Regel gegeben, die für jedes Paar $\{a, b\}$ verschiedener Elemente aus M eine der Beziehungen $a \prec b$ und $b \prec a$ festlegt und dabei den drei soeben angeführten Eigenschaften Genüge leistet, so sprechen wir von der einfach*[1] *geordneten Menge M oder kurz von der g e o r d n e t e n Menge M.*

Eine „geordnete Menge" entsteht also genau genommen durch die Zusammenfassung von zweierlei: einer Menge schlechthin und einer Ordnungsregel für sie; oder anders gefaßt: durch die Hinzufügung einer weiteren Beziehung, der der Anordnung, zur Gleichheitsbeziehung in Mengen. Die Ordnungsregel kann, wenn M eine *endliche* Menge ist, durch Aufzählung aller Paare von Elementen und Angabe der jeweils gültigen Ordnungsbeziehung ausgedrückt werden (etwa tabellarisch). Ein derartiges Verfahren ist natürlich bei einer *unendlichen* Menge M unmöglich. Hier muß an die Stelle einer Aufzählung oder Tabelle das Hilfsmittel treten, dessen sich die Mathematik allgemein bedient, um unendlichviele Einzelsachverhalte in einen endlichen Ausdruck zu kleiden: das *Gesetz* (zu dessen Aussprache man meist Formeln benutzt). Es verhält sich damit also ebenso wie mit der Abbildung zweier äquivalenter Mengen (d. h. der umkehrbar eindeutigen Zuordnung ihrer Elemente), die zwar bei endlichen Mengen durch eine Summe von Einzel-

[1] Was man unter *mehrfach* geordneten Mengen, die für uns ganz außer Betracht bleiben können, zu verstehen hat, wird dem mit den komplexen Zahlen vertrauten Leser hinlänglich klar an dem folgenden Doppelbeispiel, das arithmetisch oder geometrisch aufgefaßt werden kann: Man stelle die komplexen Zahlen (ebenen Vektoren, Punkte einer Ebene) einmal dar in der Form $a + bi$ (a und b reell), das andere Mal in der Form r $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (r Absolutbetrag, $0 \leqq \varphi < 2\pi$). Ordnet man die Zahlen (Punkte) im ersten Fall gleichzeitig nach der Größe von a einerseits, von b andererseits bzw. im zweiten Fall gleichzeitig nach der Größe von r einerseits, von φ andererseits, so erhält man in beiden Fällen je eine zweifach geordnete Menge.

vorschriften, bei unendlichen aber nur durch Angabe eines Zuordnungsgesetzes zu vollziehen ist. Z. B. sind bei den vier auf S. 121 angedeuteten Anordnungen der Menge aller ganzen Zahlen die Anordnungsgesetze vollständig so auszusprechen: 1. von zwei ganzen Zahlen geht die kleinere voran; 2. von zwei ganzen Zahlen geht die mit dem kleineren absoluten Betrag (S. 37) voran, von zwei Zahlen mit dem nämlichen absoluten Betrag die positive; 3. von zwei ganzen Zahlen geht stets die gerade der ungeraden voran; sind beide gerade oder beide ungerade, so geht die Zahl mit dem kleineren absoluten Betrag voran, schließlich von zwei Zahlen mit dem nämlichen absoluten Betrag die positive; 4. von zwei ganzen Zahlen geht diejenige voran, die bei der Division durch 4 den kleineren der Reste 0, 1, 2, 3 gibt; geben beide Zahlen denselben Rest, so geht die kleinere voran. In der Regel begnügt man sich wie bei diesen Beispielen damit, die Ordnungsregel durch die Schreibweise (die von selbst in einer Ordnung geschieht) kenntlich zu machen.

Bedeutungslos wird der Begriff der Ordnung für eine Menge mit *keinem* (Nullmenge) oder *einem* Element. Dagegen liegt der einfachste und in gewissem Sinn grundsätzlich wichtigste Fall bei einem Paar $\{a, b\}$, d. h. einer Menge von zwei Elementen vor, wozu nämlich die zwei verschiedenen *geordneten Paare* $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ gehören.

Aus den Eigenschaften der Ordnungsbeziehung folgt, daß zwischen irgend zwei Elementen a und b einer wie immer geordneten Menge (den Fall der Identität von a und b eingeschlossen) stets eine einzige der folgenden drei Beziehungen besteht: $a = b$, $a \prec b$, $a \succ b$. Durch die Regel, die eine Menge M ordnet, werden natürlich gleichzeitig alle Teilmengen von M mitgeordnet; wir können daher jede Teilmenge einer geordneten Menge ohne weiteres selbst als geordnete Menge betrachten. Zwei geordnete Mengen werden als solche nur dann gleich genannt, wenn sie die nämlichen Elemente enthalten und überdies die Anordnungsbeziehung für jedes Paar gleicher Elemente beidemal die nämliche ist. Aus der nämlichen Menge kann man also sehr wohl verschiedene geordnete Mengen bilden (vgl. S. 121). Weitere Beispiele geordneter Mengen werden wir unmittelbar nach der nächsten Definition (S. 128 ff.) kennenlernen.

Eine beliebig gegebene Menge braucht nicht geordnet zu sein (wenn wir auch beim Aufschreiben oder Aussprechen einzelner ihrer Elemente uns unwillkürlich gezwungen sehen, dies in einer bestimmten Reihenfolge zu tun). Die Frage, *ob es möglich ist, eine gegebene Menge stets zu ordnen* — d. h. eine Ordnungsbeziehung von den angeführten Eigenschaften in ihr durch eine Regel festzulegen oder überhaupt festlegbar zu denken — wird uns später (S. 195 ff.; vgl. auch S. 319 f.) beschäftigen. Auch auf das Problem, *ob und wie man den Begriff der Ordnung und der geordneten Menge auf die Begriffe der Funktion oder der Äquivalenz und schließlich auf den der Menge schlechthin zurück-*

führen kann, kommen wir noch zurück (S. 316ff.). In der Möglichkeit einer solchen Zurückführung zeigt sich schon die Unabhängigkeit des Ordnungsbegriffs von raumzeitlichen Vorstellungen.

Wir gebrauchen öfters die folgenden kurzen und anschaulichen Bezeichnungen: Stehen drei Elemente a, b, c einer Menge zueinander gleichzeitig in den Beziehungen $a \prec b$ und $b \prec c$, so sagt man, b liege „zwischen" den Elementen a und c. Geht ein Element a einer Menge im Sinne der Ordnungsbeziehung allen übrigen Elementen der Menge voran, so nennt man es das „erste" Element der Menge; folgt a allen übrigen Elementen der Menge nach, so heißt a das „letzte" Element der Menge.

3. Begriff der Ähnlichkeit. Beispiele. Die entsprechende Bedeutung, wie sie bei Mengen schlechthin der Äquivalenzbegriff besitzt, hat bei geordneten Mengen der Begriff der „Ähnlichkeit". Man setzt nämlich mit CANTOR fest:

Definition 2. Eine geordnete Menge M heißt einer geordneten Menge N ähnlich, wenn die Elemente von N denjenigen von M auf solche Art zugeordnet werden können, daß erstens jedem Element m von M in umgekehrt eindeutiger Weise ein einziges Element n von N entspricht und daß zweitens bei dieser Zuordnung auch die Anordnung entsprechender Elemente die nämliche ist (d. h. daß, falls den Elementen m und m' von M die Elemente n und n' von N beziehentlich entsprechen, aus der in M geltenden Beziehung: $m \prec m'$ stets die Beziehung in N: $n \prec n'$ folgt und umgekehrt). Eine Zuordnung zwischen den Elementen der geordneten Mengen M und N, welche die beiden angeführten Eigenschaften besitzt, nennt man eine ähnliche Abbildung zwischen den beiden Mengen. Man bezeichnet die Tatsache, daß die geordnete Menge M der geordneten Menge N ähnlich ist, durch die Schreibweise: $M \simeq N$ (gelesen: M ähnlich N).

Nach dieser Definition kann Ähnlichkeit nur zwischen äquivalenten Mengen bestehen (wegen der ersten Eigenschaft der ähnlichen Abbildung). *Ähnliche Mengen sind also stets äquivalent*, während äquivalente Mengen keineswegs einander ähnlich zu sein brauchen. Z. B. kann zwischen den geordneten Mengen

$$M = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ und } N = \{\ldots, 4, 3, 2, 1\},$$

die sogar die nämlichen Elemente enthalten, also sicherlich äquivalent sind, keine ähnliche Abbildung existieren, die Mengen sind also nicht ähnlich. Denn eine auf Grund einer ähnlichen Abbildung zwischen M und N dem Element 1 von N zugeordnete Zahl von M z. B. müßte allen anderen Zahlen von M nachfolgen, wie dies die Zahl 1 in N tut; offenbar geht aber *jede* Zahl von M gewissen anderen *voraus*, nämlich allen im gewöhnlichen Sinn größeren Zahlen.

Aus der Definition der Ähnlichkeit fließen unmittelbar die beiden Tatsachen, daß jede Menge[1] sich selbst ähnlich ist und daß (wie zum Teil in der Ausdrucksweise schon stillschweigend benutzt) die Eigenschaft der Ähnlichkeit zweier Mengen M und N eine gegenseitige ist, d. h. daß zugleich mit $M \simeq N$ auch $N \simeq M$ gilt. Ferner erkennt man ohne weiteres, daß, falls M der Menge N und diese wiederum der Menge P ähnlich ist, auch die Menge M ihrerseits der Menge P ähnlich ist; man hat zum Nachweis dieser Tatsache je eine ähnliche Abbildung zwischen M und N und zwischen N und P in der nämlichen Weise miteinander zu verknüpfen, wie dies für äquivalente (ungeordnete) Mengen auf S. 19f. geschah. Die Ähnlichkeit ist also gleich der Äquivalenz (S. 20) eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung. Daher kann man die geordneten Mengen in Klassen derart aufteilen, daß je zwei Mengen der nämlichen Klasse — und nur solche — einander ähnlich sind.

Beispiele. 1. Die geordneten Mengen $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{2, 1, 3\}$ sind alle einander ähnlich. Es leuchtet ein, daß eine endliche Menge stets überhaupt geordnet werden kann; wird nämlich ein beliebiges Element als erstes, ein beliebiges anderes als zweites bezeichnet usw., so kommt dieses Verfahren stets zum Abschluß (vgl. S. 22). Ferner sind (vgl. S. 123) zwei endliche Mengen, die äquivalent sind (d. h. gleichviel Elemente aufweisen), stets auch ähnlich, wie immer ihre Elemente angeordnet werden mögen; es können nämlich die ersten Elemente, die zweiten, die dritten usw. beziehentlich einander zugeordnet werden. Für den vollständigen Beweis dieser Tatsachen sei auf die früher gemachten Angaben verwiesen.

2. Wird die Menge aller natürlichen Zahlen wie auch die Menge aller rationalen Zahlen jeweils der Größe nach geordnet, d. h. so, daß stets die kleinere Zahl der größeren vorangeht, so sind diese beiden Mengen sicher nicht ähnlich, obgleich sie äquivalent sind. Denn es kann z. B. der Zahl 1 der ersten Menge keine Zahl der zweiten entsprechen, weil der Zahl 1 in der ersten Menge kein anderes Element vorangeht, während in der zweiten Menge *jeder* rationalen Zahl andere Zahlen vorangehen, da es ja keine *kleinste* rationale Zahl gibt. Ordnet man dagegen die Menge aller rationalen Zahlen so, wie es auf S. 32 geschehen ist, also in der Reihenfolge $\{\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \ldots\}$, so ist diese geordnete Menge ähnlich der Menge der ihrer Größe nach geordneten natürlichen Zahlen; denn läßt man die Zahlen $\frac{1}{1}$ und 1, $\frac{0}{1}$ und 2, $-\frac{1}{1}$ und 3 usw. einander entsprechen, so ist ersichtlich die Reihenfolge für jedes Paar von Elementen der einen Menge dieselbe wie für das Paar der *entsprechenden* Elemente der anderen Menge. Allgemein sind so zwei

[1] Der Zusatz „geordnet" bleibt nachstehend, wo ohne Mißverständnis möglich, öfters fort.

abgezählte (damit auch geordnete) Mengen einander stets ähnlich, während das für zwei *abzählbare* Mengen, ja sogar für eine und dieselbe abzählbare Menge (bei verschiedener Ordnung) nicht der Fall zu sein braucht.

3. M sei die Menge aller rationalen Zahlen; N sei die Menge aller rationalen Zahlen, ausgenommen die Zahlen zwischen 0 und 10, und zwar soll auch noch 0, nicht aber 10 zu N gehören. Die Elemente beider Mengen sollen ihrer Größe nach geordnet sein. Dann ordnen wir von den negativen rationalen Zahlen einschließlich 0, die in beiden Mengen vorkommen, jede sich selber zu; ist dagegen $\frac{m}{n}$ irgendeine positive rationale Zahl aus M, so ordnen wir ihr die rationale Zahl $10 + \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot n + m}{n}$ aus N zu und umgekehrt (also der Zahl $\frac{r}{s}$ aus N die Zahl $\frac{r}{s} - 10$ aus M). Auf diese Weise erhalten wir offenbar eine ähnliche Abbildung zwischen den geordneten Mengen M und N.

Eine ähnliche Abbildung zwischen beiden Mengen wird aber *unmöglich*, sobald wir in die Menge N auch noch die Zahl 10 aufnehmen. Bezeichnet man nämlich die so entstehende geordnete Menge mit N', so ist in N' zwar $0 \prec 10$, aber keine Zahl von N' liegt zwischen 0 und 10, d. h. 0 ist „unmittelbarer Vorgänger“ von 10. In M dagegen liegen zwischen je zwei verschiedenen Zahlen stets noch weitere Zahlen von M (z. B. ihr Mittel). Ist nun Φ *irgendeine* Abbildung zwischen den Mengen M und N', so seien $\frac{m}{n}$ bzw. $\frac{r}{s}$ die rationalen Zahlen aus M, die den Zahlen 0 bzw. 10 aus N' entsprechen. Das arithmetische Mittel zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{r}{s}$ ist $\frac{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{m \cdot s + r \cdot n}{2 \cdot n \cdot s}$; wir wollen diese Zahl zur Abkürzung mit $\frac{p}{q}$ bezeichnen. Dann liegt bekanntlich, wie übrigens sehr leicht zu sehen ist, $\frac{p}{q}$ zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{r}{s}$. Die vermöge der Abbildung Φ der Zahl $\frac{p}{q}$ von M entsprechende Zahl von N' sei endlich mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Wenn nun Φ eine *ähnliche* Abbildung zwischen M und N' darstellen soll, so muß, da $0 \prec 10$ ist, auch $\frac{m}{n} \prec \frac{r}{s}$ sein; daher ist $\frac{m}{n} \prec \frac{p}{q} \prec \frac{r}{s}$. Dagegen kann unmöglich $0 \prec \frac{a}{b} \prec 10$ sein, wie es der Fall sein müßte, wenn die Abbildung Φ ähnlich wäre; denn zwischen 0 und 10 liegt ja überhaupt keine Zahl von N'. Eine ähnliche Abbildung zwischen den Mengen M und N' kann also nicht existieren.

Die Hinzufügung endlich (oder selbst abzählbar unendlich) vieler Elemente zu einer von zwei äquivalenten unendlichen Mengen kann

nach Satz 6 auf S. 42 das Bestehen der *Äquivalenz* nicht stören. Unser Beispiel zeigt dagegen, daß bei ähnlichen Mengen schon die Hinzufügung eines einzigen Elements die *Ähnlichkeit* beeinträchtigen kann.

4. Wir betrachten einmal eine von links nach rechts ziehende, beiderseits unbegrenzte gerade Linie und ferner eine zu ihr parallele gerade Strecke $\overline{AB}$ von der Länge 1 (vgl. Abb. 10); M sei die Menge aller Punkte der geraden Linie, N die Menge aller Punkte der Strecke *ausschließlich* ihrer beiden Endpunkte A und B. Wir wollen beide Mengen ordnen durch die Vorschrift: für zwei Punkte P und Q der geraden Linie oder der Strecke soll $P \prec Q$ gelten, wenn P links von Q liegt, dagegen $P \succ Q$, wenn P rechts von Q gelegen ist; grob aus-

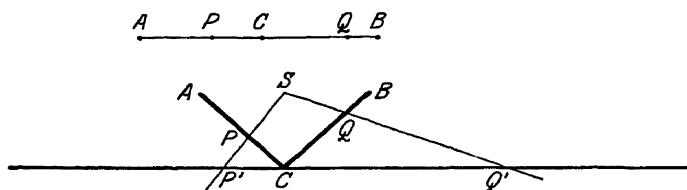



Abb. 10.

gedrückt: wir „verfolgen“ Linie wie Strecke von links nach rechts. Um die Ähnlichkeit dieser zwei geordneten Mengen nachzuweisen, denken wir uns die (etwa als ein dünner Draht vorzustellende) Strecke in der Mitte rechtwinklig geknickt und die geknickte Strecke ohne Umlegung so an die gerade Linie angefügt, wie es auf S. 52 (Abb. 5) geschah und in Abb. 10 wieder ausgeführt ist. Wie dort ziehen wir weiter von dem Punkte S aus alle möglichen Strahlen, die die geknickte Strecke wie auch die gerade Linie in je einem Punkt schneiden. Eine Abbildung zwischen den Mengen M und N werde nun wie auf S. 52 hergestellt durch die Vorschrift, daß je ein Punkt der Strecke und der geraden Linie, die auf dem nämlichen von S ausgehenden Strahl liegen, einander zugeordnet werden sollen. Diese Abbildung ist ähnlich, wie schon der Augenschein lehrt. Denn sind P und Q zwei Punkte der Strecke, von denen (in der ursprünglichen Lage der Strecke) P links von Q gelegen ist, so liegt der zu P zugeordnete Punkt P' der geraden Linie links von dem zu Q zugeordneten Punkt Q' der Geraden, weil zwei von S aus gezogene Strahlen einander niemals überschneiden. M ist also zu N nicht nur äquivalent, sondern auch ähnlich.

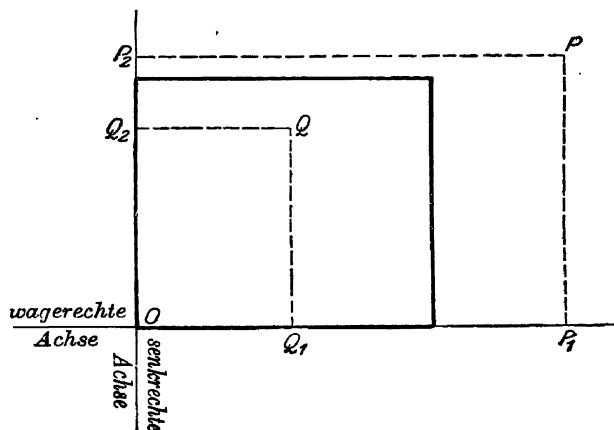
Diese Zuordnung wird dagegen unmöglich, wenn wir zur Menge N noch einen der Endpunkte der Strecke $\overline{AB}$, etwa den linken A, rechnen. Bei der *angegebenen* Zuordnung entspricht jedenfalls diesem Punkt kein Punkt der geraden Linie, weil die Verbindungslinie zwischen S und A, die der Geraden parallel ist, diese überhaupt nicht schneidet. Es kann aber nach der Hinzufügung von A auch keine *andere* ähnliche

Abbildung zwischen den beiden Mengen geben; denn dem Punkte A geht kein Punkt der Strecke voran, während es zu *jedem* Punkt der Geraden noch vorangehende, d. h. links von ihm gelegene Punkte der Geraden (sogar unendlichviele) gibt.

Übertragen wir die Verhältnisse dieses Beispiels aus dem Reich der räumlichen Anschauung in das der Zahlen, indem wir die gerade Linie als Zahlengerade, die Strecke als ein beliebiges Stück derselben (etwa von 0 bis 1) mit Ausschluß der Endpunkte betrachten, so erhalten wir das folgende Ergebnis: Ist M die Menge aller der Größe nach geordneten reellen Zahlen, N die Menge der (ebenfalls der Größe nach geordneten) reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (oder zwischen irgend zwei reellen Zahlen) unter Ausschluß der Grenzen, so sind beide Mengen ähnlich. Dies ist dagegen nicht mehr der Fall, wenn man zu der zweiten Menge ihre Grenzen oder eine von ihnen hinzurechnet.

5. M sei die Menge aller Punkte einer unbegrenzten Ebene, z. B. einer allseitig ins Unendliche fortgesetzt gedachten Seite dieses Buches. In dieser Ebene sei ein Quadrat von beliebiger Größe gezeichnet (vgl. Abb. 11), etwa so, daß zwei Quadratseiten von links nach rechts, die anderen zwei also von unten nach oben verlaufen; N sei die Menge aller innerhalb dieses Quadrats gelegenen Punkte, während die auf den Seiten des Quadrats liegenden Punkte nicht zu N gehören sollen. Beide Mengen mögen durch die nämliche Bestimmung geordnet sein: von zwei Punkten soll derjenige als vorangehend bezeichnet werden, der weiter *links* als der andere gelegen ist; liegt von zwei Punkten der Menge M oder N keiner links vom anderen, d. h. liegen beide Punkte genau untereinander (also auf einer Parallelen zu den von unten nach oben verlaufenden Quadratseiten), so soll derjenige Punkt dem anderen vorangehen, der *unter* dem anderen gelegen ist. Man überzeugt sich, daß unsere Vorschrift die drei Eigenschaften, die für jede Ordnungsbeziehung erfüllt sein müssen (S. 125), wirklich besitzt; M und N sind also geordnete Mengen.

Abb. 11.

Um eine ähnliche Abbildung zwischen den beiden Mengen herzustellen, denken wir uns die untere der zwei von links nach rechts verlaufenden und die linke der zwei von unten nach oben verlaufenden Quadratseiten jeweils unbegrenzt nach beiden Seiten verlängert; wir wollen diese zwei geraden Linien, deren Schnittpunkt die linke untere Quadratecke O ist, als *Achsen* unserer Ebene bezeichnen, und zwar in der angeführten Reihenfolge als wagerechte und senkrechte Achse. Dann kann jeder Punkt P der Ebene, im besonderen also auch jeder Punkt des Quadrats, genau wie auf S. 98 vollständig bestimmt werden durch Angabe der Fußpunkte P_1 (auf der wagerechten Achse) und P_2 (auf der senkrechten Achse)

der Lote, die von P aus senkrecht zu den Achsen auf diese gefällt werden; mit anderen Worten: die beiden Achsen werden zur Herstellung eines rechtwinkligen Koordinatensystems für sämtliche Punkte der Ebene (und um so mehr des Quadrates) benutzt.

Es sei nun P ein ganz beliebiger Punkt der Ebene, P_1 und P_2 die zu ihm gehörigen Fußpunkte auf der wagerechten und der senkrechten Achse; ebenso möge Q einen beliebigen Punkt innerhalb des Quadrates, Q_1 und Q_2 die zu ihm gehörigen Fußpunkte auf den Achsen bezeichnen. Dann liegt Q_1 auf der wagerechten Achse speziell innerhalb der unteren Quadratseite, Q_2 auf der senkrechten Achse speziell innerhalb der linken Quadratseite (jeweils die Quadratecken ausgeschlossen); P_1 und P_2 dagegen können auf den Achsen innerhalb oder außerhalb der Quadratseiten liegen, auch mit Quadratecken zusammenfallen. In Beispiel 4 haben wir eine bestimmte ähnliche Abbildung zwischen der Menge aller Punkte einer unbegrenzten Geraden und der Menge aller Punkte einer Strecke kennengelernt; diese Abbildung benutzen wir jetzt, um in umkehrbar eindeutiger und ähnlicher Weise alle Punkte der wagerechten Achse den Punkten der unteren Quadratseite, alle Punkte der senkrechten Achse den Punkten der linken Quadratseite zuzuordnen. Endlich setzen wir fest: Der Punkt P der Ebene, d. h. der Menge M, soll dem Punkt Q des Quadratinnern, d. h. der Menge N, dann und nur dann zugeordnet sein, wenn gemäß der soeben angegebenen Zuordnungsvorschrift der Punkt P_1 dem Punkte Q_1 und *gleichzeitig* der Punkt P_2 dem Punkte Q_2 entspricht.

Die sich so ergebende Abbildung zwischen den Mengen M und N ist ähnlich. Am einfachsten erkennt dies der Leser dadurch, daß er zwei beliebige Punkte der einen Menge annimmt, die ihnen entsprechenden Punkte der anderen Menge zeichnerisch aufsucht und dann überlegt, daß und aus welchem Grunde die Reihenfolge der Punkte beidemal die nämliche ist. Hierbei ist besondere Aufmerksamkeit dem Falle zuzuwenden, wo die beiden Punkte der einen (und daher auch der anderen) Menge gerade *untereinander* liegen.

4. Begriff des Ordnungstypus. Genau wie wir vom Begriff der Äquivalenz zu dem der Kardinalzahl oder Mächtigkeit kamen (S. 55ff.), gelangen wir jetzt vom Begriff der Ähnlichkeit zu dem des „Ordnungstypus". Wir wollen nämlich das Gemeinsame, was jeweils allen untereinander ähnlichen geordneten Mengen eigentümlich ist, ihren Ordnungstypus nennen. *Die Aussage „zwei geordnete Mengen besitzen den nämlichen Ordnungstypus" soll also nur eine andere Ausdrucksweise für die Tatsache sein, daß die beiden Mengen ähnlich sind.* Liegt eine bestimmte geordnete Menge vor, so erhalten wir, wenn wir von der speziellen Natur ihrer Elemente absehen, den Ordnungstypus; lassen wir auch noch die Anordnung der Elemente außer acht, so gelangen wir zur Kardinalzahl (vgl. die Beispiele des § 2, S. 5ff.). Zur Kritik und Rechtfertigung der neuen Begriffsbildung gilt genau Entsprechendes, wie auf S. 57 ff., zum Begriff der Kardinalzahl bemerkt wurde, wobei hier die Einteilung geordneter Mengen in Klassen ähnlicher Mengen die entsprechende Rolle spielt wie dort die in Klassen äquivalenter Mengen.

Übrigens läßt sich, ähnlich wie für die Kardinalzahlen (S. 60), für die wichtigste Klasse von Ordnungstypen (nämlich für die in § 12 zu behandelnden Ordnungszahlen) auch eine — freilich unbequemere — direkte Einführungs-

methode geben, bei der nicht wie vorstehend die Ableitung aus dem Begriff der Ähnlichkeit notwendig wird. Das kann entweder innerhalb der Mengenlehre geschehen, wobei dann die Ordnungszahlen als Mengen spezieller Art erscheinen (von Neumann [1], [2] und [4]), oder mittels einer eigenen axiomatischen Einführung der Ordnungszahlen (Tarski [5], Lindenbaum-Tarski [1]).

Da zwei äquivalente *endliche* Mengen stets ähnlich sind (vgl. S. 128), so entsprechen die endlichen Kardinalzahlen umkehrbar eindeutig den Ordnungstypen der endlichen Mengen; wir können daher auch diese „endlichen Ordnungstypen" mit 1, 2, 3 usw. bezeichnen und so der Doppelbedeutung der natürlichen Zahlen, als Anzahlen (Kardinalzahlen) und Ordnungszahlen zu dienen, Rechnung tragen. Z. B. ist 3 der Ordnungstypus der Menge $\{1, 2, 3\}$ oder der Menge $\{a, b, c\}$, wo a, b, c beliebig sind. Unter entsprechender Begriffserweiterung wie bei den Kardinalzahlen spricht man im Bedarfsfall auch vom Ordnungstypus 0 der Nullmenge.

Die Ordnungstypen unendlicher Mengen pflegt man mit kleinen griechischen Buchstaben zu bezeichnen. So ist ω der Ordnungstypus der (nach Beispiel 2 auf S. 128f. untereinander ähnlichen) *abgezählten* unendlichen Mengen, z. B. der Menge der natürlichen Zahlen in der gewöhnlichen Reihenfolge; der umgekehrte oder „inverse" Ordnungstypus, also der der Menge $\{\ldots, 4, 3, 2, 1\}$, wird mit $^*\omega$ bezeichnet, wie überhaupt für den Ordnungstypus der geordneten Menge, die aus einer Menge vom Ordnungstypus μ durch Umkehrung der Anordnung entsteht, die Schreibweise $^*\mu$ üblich ist.

In den Ordnungstypen unendlicher Mengen können wir ebenso wie in ihren Kardinalzahlen „unendliche Zahlen" erblicken. Eine sinngemäße Anordnung dieser „Zahlen" nach ihrer „Größe", wie sie für die Kardinalzahlen in § 6 festgesetzt wurde, läßt sich freilich nicht ermöglichen; geht man nämlich an diese Aufgabe in einem dem dortigen Gedankengang entsprechenden, zweckmäßig veränderten Sinn heran, so zeigt sich, daß man im allgemeinen von zwei gegebenen Ordnungstypen weder einen als den kleineren noch (auf Grund der Definition der Ähnlichkeit) beide als gleich ansehen kann[1]. Zwei Ordnungstypen sind also in der Regel *unvergleichbar*; man legt den Ordnungstypen deshalb nicht die Bezeichnung „Zahlen" bei, mit der die Vorstellung einer Ordnungsfähigkeit „der Größe nach" verbunden

[1] Z. B. sei der eine Ordnungstypus der der Menge aller ganzen Zahlen in der gewöhnlichen Anordnung, der andere der der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 einschließlich dieser Grenzen; wir werden den ersten später mit $^*\omega + \omega$, den zweiten mit $1 + \eta + 1$ zu bezeichnen lernen. Der erste Ordnungstypus ist dann (im Gegensatz zum zweiten) ohne „Anfang und Ende", dafür der zweite (im Gegensatz zum ersten) „überall dicht" (S. 144); beide gehören zu abzählbaren Mengen. Man wird nicht ohne übergroße Willkür, die sich entsprechend rächen würde, einen dieser Ordnungstypen als kleiner, den anderen als größer bezeichnen können.

zu werden pflegt. Eine *besondere* Klasse von Ordnungstypen werden wir in § 12 als durchweg vergleichbar kennenlernen und daher als „Ordnungszahlen" bezeichnen.

Dagegen kann das *Rechnen mit Ordnungstypen* ganz allgemein und ebenso bestimmt erklärt und ausgeführt werden wie das Rechnen mit Kardinalzahlen. Hierbei bleiben freilich die Rechenregeln, die für das Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen gelten und die sich auch beim Rechnen mit Kardinalzahlen als gültig erwiesen haben, nicht mehr vollständig, sondern nur zum Teil bestehen. Wir wollen uns übrigens im wesentlichen auf die *Addition* der Ordnungstypen beschränken, deren Kenntnis auch für den nächsten Paragraphen von Nutzen sein wird.

5. Addition zweier Ordnungstypen. M sei eine geordnete Menge vom Ordnungstypus μ, ferner N eine geordnete Menge vom Ordnungstypus ν, die zu M elementefremd ist, also kein Element von M enthält[1]. Wir bilden dann die Vereinigungsmenge der beiden Mengen (S. 79) und ordnen sie durch folgende Vorschrift, die die beiden Mengen in willkürlicher Weise unsymmetrisch behandelt: sind m_1 und m_2 Elemente aus M und besteht in M die Beziehung $m_1 \prec m_2$, so soll auch in der Vereinigungsmenge $m_1 \prec m_2$ gelten; sind n_1 und n_2 Elemente aus N und ist in N $n_1 \prec n_2$, so soll die nämliche Beziehung in der Vereinigungsmenge bestehen; ist endlich m irgendein Element von M, n irgendein Element von N, so soll in der Vereinigungsmenge stets $m \prec n$ gelten. Mit anderen Worten: Die Ordnung der Elemente von M und von N soll in der Vereinigungsmenge beibehalten werden, dagegen sollen alle Elemente von M allen Elementen von N in der Vereinigungsmenge vorangehen. (In der letzteren Regel liegt die Unsymmetrie.) Die durch diese Vorschrift geordnete Vereinigungsmenge S wird als die S u m m e d e r g e o r d n e t e n M e n g e n M und N (in dieser festzuhaltenden Reihenfolge), der Ordnungstypus σ der geordneten Menge S als die S u m m e d e r O r d n u n g s t y p e n μ und ν (in dieser Reihenfolge) bezeichnet; man schreibt:

$$S = M + N, \qquad \sigma = \mu + \nu.$$

Ein Mißverständnis wegen der Übereinstimmung dieser Schreibweisen mit denen, die für die Addition von ungeordneten Mengen und von Kardinalzahlen benutzt werden, ist nicht zu befürchten; denn ob das Zeichen $+$ im einen oder im anderen Sinn gemeint ist, geht daraus hervor, ob M und N ungeordnete oder geordnete Mengen bzw. ob μ

---

[1] Diese Beschränkung ist deshalb nötig, weil sonst möglicherweise die Reihenfolge zweier in beiden Mengen vorkommender Elemente in der einen Menge umgekehrt ist wie in der anderen, so daß es unmöglich wird, die Reihenfolge in der Summe beizubehalten.

und ν Kardinalzahlen oder Ordnungstypen sind. Für den Fall lauter *endlicher* Zahlen, wo die Bezeichnung doppelsinnig ist, wird die Auffassung offenbar gleichgültig (vgl. das nachstehende Beispiel 1).

Sind M_1, M_2, N_1, N_2 lauter geordnete Mengen, von denen M_1 und M_2, ferner N_1 und N_2 gegenseitig elementefremd sind, und ist $M_1 \simeq N_1$, $M_2 \simeq N_2$, so ist auch $M_1 + M_2 \simeq N_1 + N_2$, wie man sich durch Zusammenfassung je einer zwischen M_1 und N_1 einerseits, zwischen M_2 und N_2 andererseits bestehenden ähnlichen Abbildung überzeugt (vgl. Satz 1 auf S. 82). Dies muß auch der Fall sein, wenn die obige Definition der Addition zweier Ordnungstypen μ und ν einen bestimmten Sinn haben soll, unabhängig von der besonderen Wahl der geordneten Mengen M und N (vgl. dieselbe Überlegung bei der Addition von Kardinalzahlen, S. 81ff.).

Beispiele zur Addition zweier Ordnungstypen. 1. Es ist $\{1, 2, 3\} + \{4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $\{4, 5, 6, 7, 8\} + \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3\}$. Gehen wir von den geordneten Mengen zu ihren Ordnungstypen über, so ergeben sich also zwischen den endlichen Ordnungstypen 3, 5, 8 die folgenden Beziehungen: $3 + 5 = 8$ und $5 + 3 = 8$.

Man sieht leicht ein, daß entsprechende Beziehungen für beliebige endliche Ordnungstypen bestehen und daß demnach ebenso wie für endliche *Kardinalzahlen* der Satz gilt: Die Summe zweier endlicher Ordnungstypen ist wieder ein endlicher Ordnungstypus, und zwar ist diese Summe unabhängig von der Reihenfolge der Summanden. Weiter erkennt man, daß die Rechenregeln für die Addition endlicher Ordnungstypen mit den für die Addition endlicher Kardinalzahlen gültigen Regeln genau übereinstimmen (vgl. auch die auf S. 122f. angegebene Literatur).

2. M sei die geordnete unendliche Menge $\{2, 3, 4, \ldots\}$, N die Menge $\{1\}$; der Ordnungstypus von M ist ω (S. 133), der von N ist 1. Der Ordnungstypus der Summe $\{2, 3, 4, \ldots 1\}$, in der auf eine abgezählte unendliche Menge ein weiteres Element folgt, ist gemäß der Definition der Addition $\omega + 1$. Dieser Ordnungstypus, bei dem ein *letztes* Element auftritt, ist sicherlich verschieden vom Ordnungstypus ω, bei dem kein letztes Element vorkommt. — Wird dagegen bei der Addition die Menge N vorangestellt, so erhält man als Summe die geordnete Menge $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, d. h. wiederum eine abgezählte unendliche Menge; daher ist $1 + \omega = \omega$. Es ist demnach $\omega + 1$ verschieden von $1 + \omega$. Die Unsymmetrie in der Definition der Addition ist also nicht ohne Folgen geblieben.

Man schließt entsprechend weiter, daß $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$ usw. lauter verschiedene Ordnungstypen sind, daß dagegen für jeden endlichen Ordnungstypus n stets gilt: $n + \omega = \omega$. Ebenso sind $1 + {}^*\omega$, $2 + {}^*\omega$, $3 + {}^*\omega$ usw. lauter verschiedene Ordnungstypen, während für jeden endlichen Ordnungstypus n offenbar ${}^*\omega + n = {}^*\omega$ ist.

3. Durch Addition der geordneten Mengen $\{1, 3, 5, \ldots\}$ und $\{2, 4, 6, \ldots\}$ erhält man die geordnete Menge $\{1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots\}$, deren Ordnungstypus also mit $\omega + \omega$ zu bezeichnen ist. Fügt man noch eine endliche Menge hinzu, etwa $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$, so erhält man je nach der Stelle, an der diese Menge als Summand eingesetzt wird, die Beziehungen (vgl. zur Schreibweise den Schluß dieser Nummer):

$$3 + \omega + \omega = \omega + \omega, \qquad \omega + 3 + \omega = \omega + \omega;$$

dagegen läßt sich der offenbar von $\omega + \omega$ verschiedene Ordnungstypus $\omega + \omega + 3$ nicht mehr einfacher darstellen. Ebenso ist ersichtlich für *jeden* endlichen Ordnungstypus n

$$n + \omega + \omega = \omega + \omega = \omega + n + \omega,$$

während $\omega + \omega$, $\omega + \omega + 1$, $\omega + \omega + 2$, $\omega + \omega + 3$ usw. lauter verschiedene Ordnungstypen sind.

4. Durch Addition einer Menge vom Ordnungstypus $^*\omega$ und einer Menge vom Ordnungstypus ω, z. B. der Mengen $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ und $\{1, 2, 3, \ldots\}$, erhält man eine Menge vom Ordnungstypus $^*\omega + \omega$; das ist also der Ordnungstypus der Menge aller ganzen Zahlen in der natürlichen Reihenfolge:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Dieser Ordnungstypus ändert sich offenbar nicht, wenn zwischen der ersten und der zweiten Menge eine beliebige *endliche* Menge als Summand eingeschoben wird, deren Elemente man sich nach Belieben mit denen der ersten Menge (am Ende) oder mit denen der zweiten (am Anfang) vereinigt denken kann; es ist also für jeden endlichen Ordnungstypus n stets $^*\omega + n + \omega = {}^*\omega + \omega$. Dagegen erkennt man genau wie bei den zwei letzten Beispielen, daß $n + {}^*\omega + \omega$ und $^*\omega + \omega + n$ für alle endlichen Ordnungstypen n lauter untereinander verschiedene Ordnungstypen darstellen.

Weitere Beispiele für die Addition von Ordnungstypen werden uns im nächsten Paragraphen entgegentreten.

Wir haben bei den Beispielen 3 und 4 schon stillschweigend die Rechenregel

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

benutzt; sie besagt, daß es bei der Addition von drei Ordnungstypen α, β, γ gleichgültig ist, in welcher Weise je zwei Summanden zusammengefaßt werden. Diese Tatsache geht aus der Definition der Addition von Ordnungstypen ohne Schwierigkeit hervor, wie sich der Leser leicht klarmacht; in den entsprechenden geordneten Vereinigungsmengen ist nämlich offenbar die Anordnung je zweier gleicher (oder entsprechender) Elemente beidemal die nämliche. Die obige Regel berechtigt uns, für jene Summe auch (unter Weglassung der Klammern) $\alpha + \beta + \gamma$ zu

schreiben, wie wir es bereits getan haben. Diese Schreibweise ist auch im Einklang mit der nachfolgenden Definition der Addition von mehr als zwei Ordnungstypen. Dagegen gilt die für gewöhnliche Zahlen m und n (wie auch für beliebige ungeordnete Mengen oder Kardinalzahlen) bestehende Regel $m + n = n + m$ nicht mehr allgemein für die Addition von geordneten unendlichen Mengen und von Ordnungstypen unendlicher Mengen, wie unsere Beispiele zeigen; *bei der Addition von Ordnungstypen darf also die Reihenfolge der Summanden im allgemeinen nicht miteinander vertauscht werden.*

6. Addition beliebig vieler Ordnungstypen. Ganz analog wie bei den Kardinalzahlen läßt sich nun die Definition der Addition leicht von zwei Ordnungstypen auf beliebig viele Ordnungstypen übertragen[1]. Man wird also festsetzen:

Definition 3. Es seien beliebig (endlich oder unendlich) viele Ordnungstypen, die auch sämtlich oder teilweise gleich sein können, in bestimmter Reihenfolge gegeben; etwa in der Form, daß jedem Element a, b, c usw. einer gewissen *geordneten* Menge M eindeutig je ein bestimmter Ordnungstypus α, β, γ usw. zugeordnet ist. Um die Summe dieser Ordnungstypen in der gegebenen Reihenfolge zu bilden, wähle man zu jedem Ordnungstypus α, β, γ usw. je eine geordnete Menge A vom Ordnungstypus α, B vom Ordnungstypus β, C vom Ordnungstypus γ usw., und zwar derart, daß die gewählten Mengen paarweise elementefremd sind, im übrigen aber beliebig. Man bilde dann die Vereinigungsmenge S der Mengen A, B, C usw. und ordne sie durch die Festsetzung, daß für die Ordnungsbeziehung zweier Elemente aus *verschiedenen* der Mengen A, B, C, ... stets die Reihenfolge der zugehörigen Ordnungstypen — m. a. W. die Anordnung derjenigen Elemente in M, denen die betreffenden Ordnungstypen zugeordnet sein sollten — maßgebend sein soll; die gegenseitige Anordnung der Elemente in *jeder einzelnen* der geordneten Mengen A, B, C, ... soll dagegen unverändert in die Vereinigungsmenge S übernommen werden. Dann bezeichnet man den Ordnungstypus σ der so geordneten Menge S, die die geordnete Summe der Mengen A, B, C usw. genannt wird, als die Summe der gegebenen Ordnungstypen; man schreibt:

$$\sigma = \cdots + \alpha + \cdots + \beta + \cdots + \gamma + \cdots,$$

wobei die Reihenfolge und die Punkte andeuten wollen, daß unter den als Summanden gegebenen Ordnungstypen zwar α vor β und β vor γ steht, aber weitere Summanden vor α, zwischen α und β usw. auftreten können.

---

[1] Hierfür gelten sinngemäß die der Definition 3 auf S. 84 vorangeschickten Bemerkungen.

Wiederum (vgl. auch Satz 1 auf S. 82) ist das Ergebnis der Addition davon unabhängig, welche besonderen geordneten Mengen $A, B, C, \ldots$ als Vertreterinnen der Ordnungstypen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gewählt werden; bei anderer Auswahl erhält man nämlich eine geordnete Vereinigungsmenge S', die der geordneten Menge S ähnlich ist.

Beispiele zur Addition beliebig vieler Ordnungstypen. 1. M sei eine beliebige abgezählte Menge, also vom Ordnungstypus ω, und jedem Element von M werde der Ordnungstypus ω zugeordnet. Die Summe all dieser Ordnungstypen ist dann mit $\omega + \omega + \omega + \cdots$ zu bezeichnen; sie stellt den Ordnungstypus einer geordneten Menge $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ dar, in der abzählbar unendlichviele abgezählte Mengen in *abgezählter* Reihenfolge nacheinander auftreten. Man erhält eine solche Menge am einfachsten dadurch, daß man sich die Gesamtheit der natürlichen Zahlen gemäß der folgenden leicht verständlichen Figur angeschrieben denkt:

1	2	4	7	11	16	.	.
3	5	8	12	17	.	.	.
6	9	13	18	.	.	.	.
10	14	19	.	.	.	.	.
15	20	.	.	.	.	.	.
21	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Faßt man dann die Zahlen der ersten Zeile, in der Reihenfolge von links nach rechts genommen, zu der geordneten Menge A_1 zusammen, ebenso die Zahlen der zweiten Zeile zu A_2 usw., so ergibt die *zeilenweise* Durchlaufung der ganzen Figur eine geordnete Menge vom gewünschten Ordnungstypus $\omega + \omega + \omega + \cdots$. Offenbar ergibt sich der nämliche Ordnungstypus als Summe, falls jedem Element der Ausgangsmenge M etwa $\omega + \omega$ statt ω zugeordnet wird.

2. M sei eine beliebige geordnete Menge, μ ihr Ordnungstypus. Wird jedem Element m von M der endliche Ordnungstypus 1 zugeordnet, so entsteht als Summe all dieser Einsen offenbar wieder der Ordnungstypus μ; denn faßt man die einzelne 1 als Ordnungstypus der (geordneten) Menge $\{m\}$ auf, die allein das zugehörige Element m von M enthält, so erhält man nach dem Verfahren der Definition 3 als geordnete Summe gerade die Ausgangsmenge M. *Jeder Ordnungstypus μ läßt sich also als eine geordnete Summe von Einsen darstellen,* ebenso wie nach S. 94 jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ als (ungeordnete) Summe von Einsen; in diesem Fall ist die einzelne Eins als ($\mathfrak{m}$-mal zu addierende) Kardinalzahl anzusehen, in jenem Fall als Ordnungstypus, der „so oft und in solcher Anordnung“ auftritt, wie es der Ordnungstypus μ angibt.

Beim vorliegenden Beispiel wird sich der Wert der Summe auch für unendliches M im allgemeinen ändern, wenn jedem Element von M

z. B. der Ordnungstypus 2 statt 1 zugeordnet wird. Ist etwa (vgl. S. 34) M die Menge der rationalen Zahlen oder Punkte, so liegen zwischen je zwei Elementen von M immer noch weitere; *keines* dieser Elemente besitzt also einen unmittelbaren Vorgänger oder Nachfolger. Die geordnete Summe dagegen, die man bei Zuordnung des Ordnungstypus 2 zu jedem Element von M zu bilden hat, ist offenbar so beschaffen, daß *jedes* ihrer Elemente entweder einen unmittelbaren Nachfolger oder einen unmittelbaren Vorgänger besitzt, je nachdem das Element das erste oder das zweite in einem der zu bildenden geordneten Paare ist. (Man denke etwa an einen unendlich dünn bleibenden Strahl eines zweiatomigen Gases, dessen — jeweils in der Strahlrichtung orientierte — Moleküle allerdings unendlich dicht gepackt sein müßten, und zwar so dicht wie die rationalen Punkte einer Geraden.) Die Verhältnisse liegen hier also anders als bei der additiven Darstellung der *Kardinalzahlen* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ durch Einsen, wo wegen der durchgängigen Vertauschbarkeit der Summanden und wegen $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ der Summand 1 ebensogut durch 2 ersetzt werden könnte.

Ist im vorliegenden Beispiel M speziell eine abgezählte Menge, dann allerdings bleibt auch bei der Ersetzung der Summanden 1 durch 2 die Summe offenbar die gleiche, nämlich ω; das liegt daran, daß eine abgezählte Menge diesen ihren Charakter und somit ihren Ordnungstypus nicht ändert, falls zwischen je zweien ihrer Elemente immer noch ein weiteres Element eingeschoben wird.

7. Über die Multiplikation von Ordnungstypen. Ohne näher auf die Multiplikation der Ordnungstypen eingehen zu wollen, bemerken wir nur, daß eine Spezialisierung der Verhältnisse, wie sie bei der soeben angegebenen Definition vorliegen, naturgemäß zum Produkt zweier Ordnungstypen führt. Besitzt nämlich die zu Beginn der Definition 3 auftretende geordnete Menge M den Ordnungstypus μ und sind die den Elementen von M zugeordneten Ordnungstypen α, β, γ, ... alle gleich α, so erhalten wir eine Summe von lauter gleichen Summanden α, die in der Kardinalzahl und Anordnung der geordneten Menge M auftreten; wir bezeichnen diese Summe jetzt mit π (natürlich nicht zu verwechseln mit der Kreiszahl π). Entsprechend der Erklärung der Multiplikation in der Arithmetik als einer wiederholten Addition bezeichnet man dann π als das Produkt der Ordnungstypen α und μ (*in dieser Reihenfolge*) und schreibt:

$$\pi = \alpha \cdot \mu .$$

Ist z. B. $\alpha = \omega$, $\mu = 2$, so erhält man $\pi = \omega + \omega = \omega \cdot 2$ etwa als den Ordnungstypus der Menge

$$\{1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots\} .$$

Ist dagegen $\alpha = 2$, $\mu = \omega$, so ergibt sich $\pi = 2 + 2 + 2 + \cdots = 2 \cdot \omega$ etwa als der Ordnungstypus der Menge

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\},$$

d. h. einer abgezählten unendlichen Menge. Da ω den Ordnungstypus einer abgezählten Menge bezeichnet, so haben wir damit erkannt, daß $2 \cdot \omega = \omega$ ist (vgl. die Schlußbemerkung beim vorigen Beispiel). Entsprechend schließt man für jeden (von 0 verschiedenen) endlichen Ordnungstypus n: $n \cdot \omega = \omega$, während die Ordnungstypen $\omega \cdot 1 = \omega$, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3$, ... alle untereinander verschieden sind.

Bei der Multiplikation zweier Ordnungstypen darf also die Reihenfolge der Faktoren im allgemeinen nicht vertauscht werden; vielmehr ist daran festzuhalten, daß der erste Faktor den Ordnungstypus angibt, der wiederholt zu addieren ist („Multiplikand"), während der zweite Faktor ausdrückt, „wie oft" und „in welcher Anordnung" diese wiederholte Addition ausgeführt werden soll („Multiplikator"). Wenigstens ist diese Festsetzung CANTORS, mit der er seine ursprünglich entgegengesetzte Schreibweise vertauschte, trotz gewisser Unbequemlichkeiten die weitaus vorherrschende geblieben.

Im besonderen gilt für jeden Ordnungstypus μ (vgl. Beispiel 2 auf S. 138).

$$\mu = 1 \cdot \mu = \cdots + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1 + \cdots.$$

Der Ordnungstypus der wie in Beispiel 1 auf S. 138 geordneten Menge der natürlichen Zahlen ist offenbar $\omega \cdot \omega$ oder ω^2. Weitere Beispiele für die Multiplikation von Ordnungstypen werden wir im Laufe der folgenden Betrachtungen (S. 154, 157, 177, 189ff.) kennenlernen. Im übrigen werde für die (erst spät und zwar in erster Linie von HAUSDORFF ausgestaltete) Theorie des Rechnens mit Ordnungstypen auf SCHOENFLIES [8], HAUSDORFF [2] und [3] und auf die neuen Ergebnisse in LINDENBAUM-TARSKI [1], § 3, verwiesen.

Will man diese Erklärung der Multiplikation von Ordnungstypen vom Falle *zweier* auf den *endlichvieler* Faktoren ausdehnen, so ist es zweckmäßig, die vorstehende Definition noch in einem anderen Licht zu betrachten, wie es der Definition der Multiplikation von Kardinalzahlen (S. 91) entspricht. Dort haben wir ja den Gedanken der hier vorangegangenen Definition erst als Lehrsatz (Satz 5 auf S. 94) aus der Definition der Multiplikation hergeleitet. Entsprechend wie dort bilden wir also zu zwei (sonst beliebigen) geordneten Mengen A und M von den als Faktoren gegebenen Ordnungstypen α und μ zunächst die ungeordnete Verbindungsmenge $M \cdot A$ (Definition 4 auf S. 87), die sämtliche Paare (m, a) von Elementen m aus M und a aus A umfaßt. Wir ordnen diese Verbindungsmenge durch folgende Regel: es sei $(m, a) \prec (m', a')$, falls $m \prec m'$ (in M); ist aber $m = m'$, so sei $(m, a) \prec (m', a')$, falls $a \prec a'$ (in A). Offenbar besitzt die so geordnete Menge den Ordnungstypus, den wir oben mit $\alpha \cdot \mu$ bezeichnet haben, und kann also auch zur *Definition* dieses Ordnungstypus benutzt werden; in der Tat folgen ja in der geordneten Verbindungsmenge lauter geordnete Teilmengen vom Ordnungs-

typus α — nämlich die Mengen der Paare (m, a) mit festem m und veränderlichem a — aufeinander, und zwar so oft und in solcher Anordnung, wie es der Ordnungstypus von M (m veränderlich!) angibt.

So aufgefaßt, ist aber die Definition der Multiplikation von Ordnungstypen unmittelbar der Verallgemeinerung fähig. Dazu bemerken wir, daß die soeben getroffene Anordnung der Paare, die in der Menge $M \cdot A$ auftreten, dieselbe ist wie die, nach der in einem Lexikon die Vokabeln geordnet werden: zunächst nach dem Anfangsbuchstaben, dann nach dem zweiten Buchstaben usw. Wir haben in den Paaren (m, a) gewissermaßen lauter zweibuchstabige Vokabeln vor uns, für deren Reihenfolge primär die Reihenfolge der m und nur sekundär (wenn zwei Vokabeln in m übereinstimmen) die Reihenfolge der a maßgebend ist. Man spricht deshalb kurz und anschaulich von *lexikographischer Anordnung*[1]. Sind nun $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ beliebig (aber endlich) viele Ordnungstypen, die in dieser Reihenfolge miteinander multipliziert werden sollen, und bedeuten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ beliebige geordnete Mengen von beziehentlich jenen Ordnungstypen, so bilde man nach Definition 5 auf S. 89 die Verbindungsmenge $M_n \cdot \cdots \cdot M_2 \cdot M_1$, die alle Komplexe $(m_n, \ldots, m_2, m_1)$ enthält, wo m_n die Menge M_n durchläuft usw. (die Umkehrung der Reihenfolge wiederum aus dem in der Fußnote bezeichneten Grund!). Dann ordnen wir diese Komplexe lexikographisch, d. h. so, wie es das erste Paar abweichender entsprechender Elemente in zwei gegebenen Komplexen bedingt; es gelte also

$$(m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1) \lessgtr (m', m'_{n-1}, \ldots, m'_1),$$

falls $m_n \lessgtr m'_n$ in M_n

oder bei $m_n = m'_n$: falls $m_{n-1} \lessgtr m'_{-1}$ in M_{n-1}

oder bei $m_n = m'_n$ *und* $m_{n-1} = m'_{n-1}$: falls $m_{n-2} \lessgtr m'_{n-2}$ in M_{n-2} — usw.

Der Ordnungstypus der so geordneten Verbindungsmenge wird folgerichtig mit $\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_n$ bezeichnet. Damit sind dann gleichzeitig *Potenzen* definiert, bei denen die Basis ein beliebiger, der Exponent aber ein endlicher Ordnungstypus ist. So weit ist bereits CANTOR (vgl. z. B. [12 I], § 8) gelangt.

Unauflösbare Schwierigkeiten ergeben sich indes, sobald man versucht, die vorstehende Definition auf den Fall unendlichvieler Faktoren auszudehnen. Man macht sich das beispielsweise sofort klar, indem man von einer *abgezählten* Folge von Ordnungstypen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$ ausgeht; man hätte dann sinngemäß eine Verbindungsmenge der Form $\cdots M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$ im lexikographischen Sinn zu ordnen. Maßgebend für die Reihenfolge zweier Komplexe $(\ldots, m_3, m_2, m_1)$ und $(\ldots, m'_3, m'_2, m'_1)$ müßte also das *erste* Paar entsprechender Elemente m_n und m'_n sein, für das m_n von m'_n verschieden ist. Wie aber, wenn je zwei Elemente mit demselben Index *immer* voneinander verschieden sind? Oder allgemeiner, wenn es kein *erstes* derartiges Paar gibt, sondern jedem solchen noch gleichartige Paare vorangehen? Dann ist wirklich eine sinngemäße Anordnung in der Verbindungsmenge unmöglich; man muß sich zwecks Definition des Produkts mit einem — im allgemeinen sehr bescheidenen, d. h. unvergleichlich viel weniger umfassenden — Surrogat jener Verbindungsmenge begnügen, welches gerade so reich an Komplexen ist, daß eine sinngemäße Anordnung eben noch möglich ist. Entsprechendes gilt für die Potenz mit einem unendlichen Ordnungstypus als Exponenten. Eine

[1] Um diese und nicht die ungewohnte Anordnung vom *Ende* der Vokabeln aus zu treffen, wurde im vorigen Absatz die Umstellung der Reihenfolge, nämlich M vor A (für die Paare), gegenüber der gegebenen Reihenfolge α vor μ für die zu multiplizierenden Ordnungstypen nötig. Der Leser macht sich leicht klar, daß diese Umstellung unumgänglich ist, vorausgesetzt daß man im Produkt $\alpha \cdot \mu$ wirklich α als Multiplikanden und μ als Multiplikator auffaßt.

schwierige und scharfsinnige Theorie nach dieser Richtung hat HAUSDORFF seit 1904 begründet; für diese „Ersatzmultiplikation“ und „Ersatzpotenzierung“, die sich zur Konstruktion neuer Ordnungstypen mannigfachster Art als nützlich erwiesen hat, werde auf HAUSDORFF [1] und [2] sowie [3], namentlich S. 147ff., verwiesen (in [4] nur kurz behandelt, S. 73—77). Diese Multiplikation und Potenzierung von Ordnungstypen ist aber grundverschieden von den entsprechenden Operationen für Kardinalzahlen, eben weil im allgemeinen nur *Teilmengen* der eigentlich wünschenswerten Verbindungs- und Belegungsmengen herangezogen und geordnet werden können.

Aufgaben. 1. Wie kann man die zweite der auf S. 125 angegebenen Eigenschaften der Anordnungsbeziehung allgemein aus der ersten und dritten folgern?

2. Man führe im Beispiel 5 auf S. 131f. den Beweis für die Ähnlichkeit der Mengen M und N vollständig durch!

3. Markiert man in Abb. 1 auf S. 9 weitere (unendlichviele) Punkte in der Art, daß man vom Punkt P_1 genau entsprechend nach rechts fortschreitet wie nach links und somit eine Punktmenge von symmetrischem Charakter erhält, so besitzt diese (auf einer beiderseits begrenzten Strecke gelegene) Punktmenge denselben Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ wie die (beiderseits ins Unendliche sich erstreckende) Menge aller ganzzahligen Punkte einer geraden Linie.

4. Man beweise das assoziative Gesetz für die Multiplikation endlichvieler Ordnungstypen (vgl. Satz 4 auf S. 92)!

5. Man zeige, daß von den beiden (in der Arithmetik wie auch für unendliche Kardinalzahlen) gültigen distributiven Gesetzen

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \text{und} \qquad (a+b)c = ac + bc$$

das eine, nicht aber das andere für die Multiplikation von Ordnungstypen gilt!

6. Das vollständige Analogon des Äquivalenzsatzes (S. 71) in der Theorie der Ähnlichkeit wäre der Satz: Ist von zwei geordneten Mengen jede einer Teilmenge der anderen ähnlich, so sind die Mengen selbst einander ähnlich. Man zeige an Beispielen, daß dieser Satz falsch ist! (Ein *teilweises* Analogon findet man bei LINDENBAUM-TARSKI [1], § 3.)

7. Welches sind die inversen Ordnungstypen (S. 133) zu $\alpha + \beta$ und zu $\alpha \cdot \beta$, wobei α und β beliebige Ordnungstypen bedeuten? Beispiele dazu!

8. Man zeige, daß $\omega + \omega^2 = \omega^2 = (\omega + \omega)\,\omega$!

§ 10. Lineare Punktmengen[1].

Wir wollen uns jetzt des Hilfsmittels der Mengenlehre und zwar namentlich des Begriffs der geordneten Menge zu einigen Überlegungen

---

[1] *Dieser Paragraph kann ohne Beeinträchtigung des Verständnisses alles später Folgenden überschlagen werden. Auch die in den Definitionen dieses Paragraphen eingeführten Begriffe und Bezeichnungen werden später nicht mehr benutzt.*

bedienen, die nicht unmittelbar auf die Definition „unendlicher Zahlen“ gerichtet sind. Sie führen uns statt dessen auf anschauliches Gebiet und zeigen, wie die Methoden der Mengenlehre gleich einem Mikroskop von unendlicher Vergrößerung noch Feinheiten zu unterscheiden gestatten, die sich dem Auge des ohne Mengenlehre arbeitenden Geometers entziehen.

1. Dichte und stetige geordnete Mengen. Wir gehen aus von einer beiderseits unbegrenzten geraden Linie, die der Einfachheit halber von links nach rechts verlaufen möge. Um die Punkte der Geraden kurz bezeichnen zu können, denken wir sie uns als Zahlengerade (S. 10); jede reelle Zahl stellt dann auch einen gleichbezeichneten Punkt der Geraden dar[1]. Wir betrachten die Menge M aller Punkte der Geraden, die nach Satz 3 auf S. 52 die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums besitzt, und ordnen sie durch die Festsetzung, daß $\prec$ als „links von“ erklärt werden soll; zwischen zwei verschiedenen Punkten P und Q unserer Menge besteht also die Beziehung $P \prec Q$ oder $P \succ Q$, je nachdem P links von Q oder rechts von Q liegt. *Alle folgenden Überlegungen betreffen Teilmengen der geordneten Punktmenge M,* die sämtlich geordnet sind durch die in M gültige Anordnung. Jede gewonnene Erkenntnis über unsere Menge oder über Teilmengen von ihr liefert uns gleichzeitig ein Ergebnis über *geordnete Mengen reeller Zahlen;* wir brauchen dazu nur von den Punkten zu den sie bezeichnenden Zahlen überzugehen und diese, wie es stets geschehen soll, ihrer Größe nach angeordnet zu denken.

Jede Teilmenge von M bezeichnet man — auch wenn man von der Anordnung in M absieht — folgerichtig als eine *Punktmenge,* und zwar

---

[1] Um von dieser mehrfach benutzten umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen allen reellen Zahlen und allen Punkten einer Geraden in aller Strenge Gebrauch machen zu können, legt man am einfachsten die Gerade definitorisch als ähnliches Abbild der geordneten Menge aller reellen Zahlen zugrunde. Zwischen dieser und einer (abstrakten und schwierigen) rein „topologischen“ Auffassung sind mannigfache Zwischenstufen denkbar; in anschaulicher und weitgehend der Einführung des Zahlbegriffs entsprechender Weise kann man z. B. von zwei Punkten ausgehen, aus ihnen auf der durch sie bestimmten Geraden durch gewisse Operationen (z. B. durch „rationale“ einschl. geometrischer Mittelbildung) weitere Punkte herleiten und schließlich eine geometrische Forderung hinzuzufügen, die der Geraden eine genügend starke Besetzung mit Punkten garantiert (vgl. die Fußnote auf S. 160). Daß jedem Punkt der Geraden eindeutig eine reelle Zahl entspricht, ist bei dieser Auffassung eine Folge des Begriffs der reellen Zahl und daher beweisbar; daß aber auch umgekehrt jeder reellen Zahl ein Punkt zugeordnet ist, wird erst durch jene Forderung, das Cantor-Dedekindsche Axiom, erzwungen; durch dieses Axiom wird somit der Begriff des Punktes erst abschließend festgelegt. Vgl. Dedekind [1] und Cantor [4] sowie etwa die Darstellung bei Loewy [1], S. 188—191, wo man auch weitere Literaturangaben findet, denen noch Hölder [1] (bes. S. 30) und Baldus [3] (S. 44ff.) hinzugefügt seien.

als eine *lineare*[1], im Gegensatz zu Mengen von Punkten in der Ebene oder im drei- bzw. mehrdimensionalen Raum. Die Punktmengen überhaupt stellen die für die Anwendungen wichtigsten Mengen dar. Wie wir indes schon bei den Mengen schlechthin (z. B. in den §§ 5 und 6) auch andere als Punktmengen, und zwar sogar Mengen von höherer Mächtigkeit als $\mathfrak{c}$ kennenlernten, so kann man auch unter den geordneten Mengen noch allgemeinere als Punktmengen in Betracht ziehen; eine solche allgemeine Theorie der geordneten Mengen von beliebiger Mächtigkeit ist von HAUSDORFF ([2], vgl. auch [3]) entwickelt worden. Wir beschränken uns im folgenden auf lineare Punktmengen, und zwar zunächst auf geordnete; unter „Punktmenge" soll nachstehend stets eine beliebige, aber mindestens zwei Punkte enthaltende (geordnete) Teilmenge unserer geordneten Menge M verstanden werden. Beispiele folgen alsbald.

Definition 1. Eine Punktmenge N heißt überall dicht oder schlechthin *dicht*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Punkten von N stets ein weiterer Punkt von N liegt, wenn also kein Punkt von N einen „Nachbarpunkt" hat.

Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte einer dichten Punktmenge N und ist etwa $P_1 \prec P_2$, so gibt es demnach in N einen Punkt P_3 von der Eigenschaft $P_1 \prec P_3 \prec P_2$, ebenso Punkte P_4 und P_5, für die die Beziehungen $P_1 \prec P_4 \prec P_3$ und $P_3 \prec P_5 \prec P_2$ gelten, und so unbegrenzt weiter. Zwischen je zwei Punkten einer dichten Punktmenge liegen also stets unendlichviele Punkte der Menge; um so mehr ist jede dichte Punktmenge (mit mindestens zwei Punkten) eine unendliche Menge.

Definition 2. Wird eine Punktmenge N derart in zwei Teilmengen N_1 und N_2 eingeteilt, daß erstens jeder Punkt von N einer, aber auch nur einer einzigen der Mengen N_1 und N_2 angehört, daß zweitens jede der Mengen N_1 und N_2 mindestens einen Punkt enthält (also keine von ihnen die Nullmenge ist) und daß drittens alle Punkte der Menge N_1 links von allen Punkten der Menge N_2 gelegen sind, so nennt man diese Einteilung einen *Schnitt* $N_1|N_2$ *in der Menge* N.[2] Besitzt die Menge N_1

[1] Diese Bezeichnung will nur das Bestehen einer („einfachen") Ordnung in der Menge ausdrücken und gilt daher z. B. auch für die Menge der Punkte einer beliebigen, nicht geschlossenen „Kurve" im üblichen Sinne. Für den schon anderweitig mit der Theorie der Punktmengen vertrauten Leser sei indes bemerkt, daß „linear" zuweilen in einem ganz anderen Sinn gebraucht wird, wie überhaupt dieses Gebiet den zweifelhaften Vorzug einer immer noch höchst uneinheitlichen Terminologie genießt.

[2] Der für die Grundlegung der Arithmetik (Theorie der *irrationalen* — d. h. der [reellen] nicht rationalen — Zahlen) wie auch für die Geometrie überaus wichtige Begriff des „Schnittes" ist von DEDEKIND in seiner berühmten, zuerst 1872 erschienenen Schrift [1] eingeführt worden. Unabhängig von DEDEKINDS Schnitttheorie haben im nämlichen Jahre CANTOR [4] (vgl. auch HEINE [1]) und

einen letzten Punkt (rechtsseitigen Endpunkt) P_1 oder die Menge N_2 einen ersten Punkt (linksseitigen Endpunkt) P_2, so sagt man von dem Punkte P_1 bzw. P_2 bzw. von jedem von beiden, er *erzeuge den Schnitt* $N_1|N_2$. Diese Ausdrucksweise beruht darauf, daß man in diesen Fällen den Schnitt $N_1|N_2$ einfach folgendermaßen erklären kann: zu N_2 gehören alle Punkte von N, die rechts von P_1 liegen, zu N_1 alle übrigen Punkte von N — bzw.: zu N_1 gehören alle Punkte von N, die links von P_2 liegen, alle anderen zu N_2.

Ist $N_1|N_2$ eine beliebiger Schnitt in N, so besteht offenbar im Sinn der Addition geordneter Mengen (S. 134) die Beziehung: $N = N_1 + N_2$, während der Durchschnitt von N_1 und N_2 die Nullmenge ist.

Für einen beliebigen Schnitt $N_1|N_2$ in N sind nur folgende vier einander ausschließende Fälle möglich: 1. N_1 besitzt einen letzten und N_2 einen ersten Punkt; 2. N_1 besitzt einen letzten, aber N_2 keinen ersten Punkt; 3. N_1 besitzt keinen letzten, wohl aber N_2 einen ersten Punkt; oder endlich 4. weder besitzt N_1 einen letzten noch N_2 einen ersten Punkt. Aus Gründen, die bei den nachfolgenden Beispielen 3 und 4 einleuchten werden, nennt man den Schnitt $N_1|N_2$ im ersten Fall einen *Sprung in der Menge* N, im vierten Fall eine *Lücke in der Menge* N; im zweiten und dritten Fall dagegen spricht man von einem *stetigen Schnitt*. Im ersten und zweiten Fall wird der Schnitt $N_1|N_2$ durch den letzten Punkt von N_1, im ersten und dritten Fall durch den ersten Punkt von N_2 erzeugt, während es im vierten Fall keinen Punkt von N gibt, der den Schnitt erzeugt.

Die Punktmenge N heißt *stetig*, wenn jeder Schnitt in N stetig ist, wenn N also weder Sprünge noch Lücken aufweist.

2. Beispiele. Der Aufstellung weiterer Definitionen seien einige Beispiele vorangeschickt, die den Sinn der bisherigen Erklärungen — welche übrigens noch für beliebige geordnete Mengen gültig bleiben — veranschaulichen sollen.

1. Sind P_1 und P_2 irgend zwei Punkte auf unserer Geraden, d. h. irgend zwei Punkte der Punktmenge M, so sei N die Menge aller Punkte

---

MÉRAY [1] ihre Ideen über den Begriff der *Fundamentalreihe* veröffentlicht, auf den sie die Theorie der irrationalen Zahlen gründen und der ihnen — wie oben im Text der Begriff des Schnittes — als methodisches Werkzeug zur Untersuchung der Punktmengen dient. Trotz der für die Praxis der Arithmetik weit bequemeren Anwendbarkeit der Methode von CANTOR und MÉRAY, die darum mathematisch den Vorzug verdient, ziehen wir hier die Auffassung DEDEKINDS um ihrer begrifflichen Einfachheit und Schönheit willen heran; ihre wirkliche Durchführung in der Arithmetik findet man am besten bei PERRON [3]. Für eine vergleichende Betrachtung der beiden Theorien (sowie einer dritten spezielleren, von WEIERSTRASS herrührenden) in ihrer Verwendung zur Definiton der Irrationalzahlen vergleiche man CANTOR [7 V], § 9, und JOURDAIN [2] sowie die vorstehend auf S. 143, Fußnote, angeführte Literatur, ferner (für den inneren Zusammenhang) noch PERRON [1].

zwischen P_1 und P_2 oder, wie man auch sagt, das *Intervall* zwischen P_1 und P_2. Sie ist dicht, und zwar gleichviel ob man die Punkte P_1 und P_2 oder einen von ihnen zur Menge N rechnet oder nicht; denn in jedem dieser Fälle liegt zwischen je zwei Punkten von N stets ein weiterer Punkt von N. Auch die Menge *aller* Punkte der Geraden, d. h. die Menge M selbst, ist dicht.

2. Sind P_1 und P_2 irgend zwei Punkte auf unserer Geraden, so sei N die Menge aller *rationalen* Punkte zwischen P_1 und P_2, d. h. derjenigen Punkte, die durch rationale Zahlen bezeichnet werden. Auch diese Menge ist dicht, und zwar ebenfalls unabhängig davon, ob P_1 oder P_2 oder beide Punkte zu N gerechnet werden oder nicht; denn zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine weitere rationale Zahl (z. B. das arithmetische Mittel der gegebenen rationalen Zahlen). Im besonderen ist aus demselben Grund auch die Menge *aller* rationalen Punkte auf unserer Geraden dicht. Man vergleiche hierzu die früheren ausführlichen Bemerkungen auf S. 34f.!

3. P sei ein beliebiger Punkt der Menge M aller Punkte der Geraden. Teilen wir M in zwei Teilmengen M_1 und M_2 durch die Festsetzung, daß zu M_1 alle links von P gelegenen Punkte gehören sollen, zu M_2 dagegen alle rechts von P gelegenen Punkte einschließlich des Punktes P selbst, so erhalten wir einen Schnitt $M_1|M_2$ in der Menge M; der Schnitt wird durch den Punkt P erzeugt. Genau das nämliche ist der Fall, wenn wir den Punkt P zu M_1 statt zu M_2 rechnen. In beiden Fällen ist der entstandene Schnitt stetig.

Rechnen wir dagegen P weder zu M_1 noch zu M_2, so ist $M_1|M_2$ ein Schnitt in derjenigen Teilmenge N von M, die aus M durch Fortlassung des einzigen Punktes P entsteht. Dieser Schnitt $M_1|M_2$ in N ist eine Lücke. Denn ist P_1 *irgendein* Punkt von M_1, d. h. ein links von P gelegener Punkt der Menge M, so gehört jeder zwischen P_1 und P liegende Punkt von M — da links von P gelegen — sicherlich zu M_1; andererseits liegt jeder solche Punkt rechts von P_1, so daß P_1 jedenfalls nicht der letzte Punkt von M_1 ist. Ist ferner P_2 *irgendein* Punkt von M_2, d. h. ein rechts von P gelegener Punkt von M, so ist genau ebenso einzusehen, daß P_2 nicht der erste Punkt von M_2 ist. Kurz gesagt: zu jedem Punkt von M_1 gibt es noch weiter rechts gelegene Punkte von M_1, zu jedem Punkt von M_2 aber auch noch weiter links gelegene Punkte von M_2. Nach S. 145 ist daher $M_1|M_2$ eine Lücke in N. Diese Ausdrucksweise besagt anschaulich, daß in der Menge N sozusagen noch ein Punkt (in unserem Fall der Punkt P) „fehlt“, der bei seiner Aufnahme in die Menge N den Schnitt erzeugen würde. N ist also keine stetige Menge, wohl aber dicht, wie überhaupt eine Menge ohne Sprünge immer dicht ist und umgekehrt.

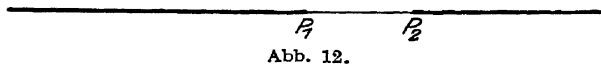
4. P_1 und P_2 seien zwei beliebige Punkte auf unserer Geraden, es liege etwa P_1 links von P_2 (vgl. Abb. 12). N sei die Menge, die aus allen Punkten links von P_1 und allen Punkten rechts von P_2 besteht, die Punkte P_1 und P_2 eingeschlossen. Erklärt man N_1 als die Menge aller links von P_1 gelegenen Punkte von N unter Einschluß von P_1, N_2 als die Menge aller rechts von P_2 gelegenen Punkte von N unter Einschluß von P_2, so ist $N_1|N_2$ ein Schnitt in der geordneten Menge N. Dann liegt kein Punkt von N_1 rechts von P_1, kein Punkt von N_2 links von P_2; P_1 ist also der letzte Punkt von N_1, P_2 der erste Punkt von N_2. Daher ist $N_1|N_2$ ein Sprung in N. Die Bezeichnung erklärt sich daraus, daß zwischen P_1 und P_2 überhaupt kein Punkt von N liegt, diese Menge also einen „Sprung" von P_1 nach P_2 macht. N ist keine dichte Menge, weil zwischen P_1 und P_2 kein einziger Punkt von N gelegen ist.

P_1 P_2

Abb. 12.

Rechnet man dagegen den Punkt P_2 nicht zur Menge N (also auch nicht zu N_2), so ist der Schnitt $N_1|N_2$ in N weder ein Sprung noch eine Lücke, sondern stetig; N_1 hat dann ein letztes Element P_1, N_2 aber kein erstes Element. Die so erklärte Teilmenge N von M, die wir für sich und nicht mehr im Verhältnis zu M betrachten, ist dicht[1] und der geordneten Menge M *aller* Punkte der Geraden ähnlich; man überzeugt sich davon, indem man genau entsprechend wie in Beispiel 3 auf S. 129 die in N_2 enthaltenen Punkte von N den rechts von P_1 liegenden Punkten von M ähnlich zuordnet, während P_1 und alle links von P_1 gelegenen Punkte sich selber zugeordnet werden. Ist z. B. P_1 der Punkt 0, P_2 der Punkt 10, so entspricht 0 und jeder durch eine negative Zahl bezeichnete Punkt von M und N sich selber, während für eine positive Zahl a der Punkt a von M dem Punkte $a + 10$ von N zugeordnet ist und umgekehrt. Obgleich also in der Menge N alle Punkte von M zwischen 0 und 10 (letzteren eingeschlossen) gewissermaßen ausgelassen sind, ist doch im Sinn der Ähnlichkeit kein Unterschied zwischen M und N feststellbar; vom Standpunkt der bloßen Anordnung aus, der ein Längenmaß (Größenmaß) und daher den gewöhnlichen Begriff der Entfernung nicht kennt, ist die Punktmenge N ebenso stetig wie die Menge M *aller* Punkte der Geraden. Das nämliche gilt, wenn der Punkt P_2 (10) zur Menge N hinzugefügt, aber dafür der Punkt P_1 (0) weggelassen wird.

[1] Es widerstrebt zunächst dem Empfinden, eine solche Menge N „dicht" zu nennen, und für gewisse mathematische Zwecke empfiehlt sich in der Tat eine abweichende Fassung dieses Begriffs. Innerhalb der uns hier interessierenden Theorie der Ordnung aber ist die obige, der Definition 1 entsprechende Terminologie im Einklang damit, daß der Ordnungstypus dieser Menge N derselbe ist wie derjenige der Gesamtmenge M.

5. N sei die Menge aller rationalen Punkte auf unserer Geraden. Der Schnitt $N_1|N_2$ werde folgendermaßen erklärt: Zu N_2 soll jeder Punkt gerechnet werden, der durch eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ bezeichnet ist, deren Quadrat $\frac{m^2}{n^2}$ größer ist als die Zahl 2; alle anderen Punkte von N sollen zu N_1 gehören, also zunächst diejenigen durch positive rationale Zahlen $\frac{m}{n}$ bezeichneten Punkte, für die $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner ist als 2, dann der Punkt 0 und schließlich alle durch negative rationale Zahlen bezeichneten Punkte. Wir werden sehen: N_1 hat kein letztes und N_2 kein erstes Element; es gibt also keinen Punkt von N, der den Schnitt $N_1|N_2$ in N erzeugt, dieser Schnitt ist somit eine Lücke.

Zunächst kann sicherlich weder der Punkt 0 noch ein durch eine negative rationale Zahl bezeichneter Punkt den Schnitt erzeugen, weil ja z. B. der zu N_1 gehörige Punkt 1 rechts von all diesen Punkten liegt. Es kann für die Erzeugung des Schnittes also nur ein Punkt in Betracht kommen, der durch eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ bezeichnet wird. Da es bekanntlich keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat die Zahl 2 wäre[1], so können wir die zwei Fälle unterscheiden, daß erstens $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner als 2 oder zweitens $\frac{m^2}{n^2}$ größer als 2 ist. Im ersten Fall gibt es aber Punkte von N_1, die rechts von $\frac{m}{n}$ liegen, im zweiten Fall Punkte von N_2, die links von $\frac{m}{n}$ liegen, wie man auf folgende Weise zeigen kann:

Ist $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner als 2, so liegt in der Punktmenge M, d. h. auf unserer Geraden, der Punkt $\frac{m}{n}$ links von dem (in N nicht vorkommenden)

---

[1] Diese Tatsache läßt sich (so z. B. bei EUCLID, ähnlich wohl schon in der Schule des PYTHAGORAS) folgendermaßen einsehen: Eine beliebige gerade natürliche Zahl kann man offenbar in der Form $2p$ schreiben, eine beliebige ungerade Zahl in der Form $2q + 1$, wo p und q natürliche Zahlen bedeuten. Wir wollen annehmen, das Quadrat des Bruches $\frac{m}{n}$ wäre 2, und setzen dabei voraus, daß die ganzen Zahlen m und n keinen gemeinsamen Teiler besitzen, durch den man ja sonst Zähler und Nenner kürzen könnte. Aus $\frac{m^2}{n^2} = 2$ folgt $m^2 = 2n^2$, d. h. m^2 ist eine gerade Zahl; daher ist auch m gerade, weil das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist. Da also m durch 2 teilbar ist, etwa $m = 2p$, so kann n nicht gleichfalls durch 2 teilbar sein; n ist somit ungerade. Andererseits folgt aus $4p^2 = 2n^2$, daß $n^2 = 2p^2$, also n gerade ist. Das so erhaltene widerspruchsvolle Ergebnis, wonach n gleichzeitig ungerade und gerade sein müßte, zeigt, daß die Annahme $\frac{m^2}{n^2} = 2$, von der wir ausgingen, falsch sein muß; die Quadratwurzel aus 2 ist keine rationale, sondern eine irrationale Zahl.

Punkt $\sqrt{2}$ von M; dabei bedeutet $\sqrt{2}$ die (zwar nicht als gemeiner Bruch, wohl aber als unendlicher Dezimalbruch in der Form 1,4142 ... darstellbare) positive reelle Zahl, deren Quadrat die Zahl 2 ist. Nun liegt zwischen irgend zwei verschiedenen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl[1] (sogar unendlichviele rationale Zahlen); ist $\frac{p}{q}$ eine zwischen $\frac{m}{n}$ und $\sqrt{2}$ gelegene rationale Zahl, so ist $\frac{p^2}{q^2}$ kleiner als 2, weil $\frac{p}{q}$ kleiner ist als $\sqrt{2}$. Da also der Punkt $\frac{p}{q}$, der rechts von $\frac{m}{n}$ liegt, noch zu N_1 gehört, ist $\frac{m}{n}$ sicher nicht der letzte Punkt von N_1. Genau entsprechend erhält man, falls $\frac{m^2}{n^2}$ größer ist als 2, einen zu N_2 gehörigen Punkt $\frac{r}{s}$, der

[1] Diese später (S. 156) nochmals benutzte Tatsache läßt sich unter Verwendung der einfachsten Eigenschaften der Dezimalbrüche folgendermaßen beweisen: Es sei A die kleinere, B die größere der zwei gegebenen, der Einfachheit halber als positiv angenommenen reellen Zahlen. Liegt zwischen A und B eine ganze Zahl, so ist diese eine zwischen A und B gelegene rationale Zahl. Ist das nicht der Fall, so schreiben wir A, wenn möglich, als endlichen, sonst als unendlichen Dezimalbruch, dagegen B jedenfalls als unendlichen Dezimalbruch (vgl. S. 43f.); A und B treten also auf in der Form

$$A = m, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots, \qquad B = m, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots,$$

wobei m eine beliebige — aber beidemal die nämliche — positive ganze Zahl (oder Null) bedeutet und a_1, b_1, a_2, b_2 usw. lauter Ziffern der Reihe 0, 1, 2, ..., 9 sind; im besonderen werden bei A nicht etwa schließlich lauter Neunen, bei B nicht schließlich lauter Nullen auftreten. Dann kann eine gewisse Folge gleichnumerierter Ziffernpaare: a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 usw. möglicherweise aus paarweise gleichen Ziffern bestehen, also $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ usw.; jedenfalls gibt es aber eine natürliche Zahl n (die auch schon 1 sein kann) von der Eigenschaft, daß a_n und b_n die beiden *ersten* an entsprechender Stelle stehenden Ziffern sind, die sich voneinander unterscheiden (a_n verschieden von b_n); ist schon a_1 verschieden von b_1, so ist $n = 1$. Wir wollen etwa annehmen, es sei $n = 4$, ohne daß dadurch die Allgemeingültigkeit der folgenden Überlegung beeinträchtigt würde; dann ist $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, aber a_4 verschieden von b_4, und zwar, da A kleiner als B sein sollte, a_1 kleiner als b_1; dies ist beispielsweise der Fall für $A = 27{,}2534$ und $B = 27{,}2537272\ldots$. Dann liegt z. B. die Zahl

$$C = m, b_1 b_2 b_3 b_4 \text{ (in unserem Beispiel die Zahl } C = 27{,}2537)$$

zwischen A und B; denn C ist zunächst größer als A, weil b_4 größer ist als a_4 und auf a_4 nicht lauter Neunen folgen; andererseits ist C kleiner als B, da der Dezimalbruch B unendlich sein sollte, also die in B auf b_4 folgenden Ziffern b_5, b_6 usw. keinesfalls lauter Nullen sind. Da schließlich

$$C = m + \frac{1000 \cdot b_1 + 100 \cdot b_2 + 10 \cdot b_3 + b_4}{10000}$$

eine rationale Zahl ist, so haben wir in der Tat zwischen den zwei beliebig gegebenen reellen Zahlen A und B eine rationale Zahl C nachgewiesen. — Für das Wesen und die Eigenschaften der Dezimalbrüche sowie für die *keineswegs selbstverständliche* Tatsache, daß jede reelle Zahl als Dezimalbruch darstellbar ist, sei nochmals auf die auf S. 44 angeführten Werke verwiesen.

links von dem Punkte $\frac{m}{n}$ liegt; $\frac{m}{n}$ kann also auch nicht der erste Punkt von N_2 sein. Es enthält also weder N_1 einen letzten noch N_2 einen ersten Punkt, d. h. der Schnitt $N_1|N_2$ in N ist wirklich eine Lücke.

Dies ändert sich jedoch sogleich, falls wir auch noch den Punkt $\sqrt{2}$ von M in die Menge N aufnehmen. Gleichviel ob wir dann diesen Punkt zu N_1 oder zu N_2 rechnen, jedenfalls wird der Punkt $\sqrt{2}$ den Schnitt $N_1|N_2$ in N erzeugen. Denn in beiden Fällen besteht z. B. N_2 aus allen rechts von $\sqrt{2}$ gelegenen Punkten von N und nur aus ihnen (evtl. unter Einschluß des Punktes $\sqrt{2}$ selbst); liegt nämlich der Punkt $\frac{m}{n}$ rechts vom Punkte $\sqrt{2}$, so besagt dies, daß die Zahl $\frac{m}{n}$ größer ist als die Zahl $\sqrt{2}$, d. h. daß $\frac{m^2}{n^2}$ größer ist als 2, wie dies das Kennzeichen der Punkte von N_2 sein sollte. Durch Hinzufügung des Punktes $\sqrt{2}$ ist also jene Lücke in der Menge N (nicht etwa ihre übrigen Lücken) beseitigt.

Alles in diesem Beispiel Gesagte gilt, wie leicht einzusehen ist, völlig entsprechend, wenn der Punkt $\sqrt{2}$ durch irgendeinen anderen nicht rationalen Punkt ersetzt wird. Punkte dieser Art gibt es (vgl. Aufgabe 3 auf S. 64) in unendlicher Anzahl, sie liegen sogar in dichter und nicht abzählbarer Menge auf der Geraden; unsere Menge N weist somit unendlichviele Lücken auf. Diese Tatsache wird dem Leser überraschend erscheinen, wenn er nur davon ausgeht, daß zwischen zwei noch so benachbarten Punkten unserer Menge immer noch unendlichviele Punkte derselben liegen, und wenn er auf den ersten Blick daraus schließen möchte, daß diese dichte Punktmenge unsere Gerade auch „stetig" und restlos erfülle (vgl. S. 34 und 40). Gegenüber den Unvollkommenheiten der Anschauung zeigt unsere jetzige Betrachtung, daß die dichte Punktmenge N dennoch Lücken (sogar unendlichviele Lücken) aufweist und daß sie demnach nicht (wie die Punktmenge M) eine stetige Menge darstellt; hierdurch wird gleichzeitig das Ergebnis von S. 52 anschaulich ergänzt[1].

3. Der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Punkte einer Geraden. Was die Anwendungen der in den Definitionen 1 und 2 enthaltenen Begriffsbildungen anlangt, so wollen wir uns darauf beschränken anzugeben, wie CANTOR mit ihrer Hilfe zum erstenmal zwei ganz besonders wichtige geordnete Punktmengen *vollständig* charakterisieren konnte. Vorausgeschickt werde dabei die fast selbstverständliche Bemerkung, daß die

[1] Offenbar ist sogar der Umstand, daß eine Menge von *Punkten* (Zahlen) vorliegt, nicht wesentlich; vielmehr gilt der Kern der obigen Betrachtung ersichtlich für eine beliebige geordnete Menge mit Lücken, aber ohne Sprünge. Für jede derartige Menge kann man durch Anwendung der DEDEKINDschen Schnitttheorie die Lücken „ausfüllen" und damit beseitigen.

Eigenschaft einer geordneten Punktmenge N, dicht bzw. stetig zu sein, gleichzeitig eine Eigenschaft jeder zu N ähnlichen Menge N' ist; denn hat man eine bestimmte ähnliche Abbildung zwischen den Mengen N und N' gewählt, so beweist man mit ihrer Hilfe die nämlichen Anordnungstatsachen wie für die Elemente der Menge N auch für die ihnen zugeordneten Elemente von N'.

a und b seien nun zwei beliebige reelle Zahlen, etwa a kleiner als b. Dann hat die Menge R aller rationalen Zahlen zwischen a und b, beide Grenzen ausgeschlossen — oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Menge aller zwischen den Punkten a und b gelegenen rationalen Punkte auf der Zahlengeraden ausschließlich der Endpunkte — folgende drei Eigenschaften, falls man die Zahlen ihrer Größe nach, d. h. die Punkte in der Richtung von links nach rechts anordnet:

1. Die geordnete Menge R ist dicht (Beispiel 2 auf S. 146);
2. sie enthält weder ein erstes noch ein letztes Element;
3. sie ist abzählbar (S. 34f.).

Die nämlichen drei Eigenschaften hat offenbar auch die geordnete Menge *aller* rationalen Zahlen bzw. *aller* rationalen Punkte der (beiderseits unbegrenzten) Zahlengeraden, wenn man die gleiche Anordnung festsetzt.

Man kann nun umgekehrt zeigen, daß *durch die angeführten drei Eigenschaften ein gewisser Ordnungstypus vollständig bestimmt ist, d. h. daß irgendwelche geordnete Mengen, die jene drei Eigenschaften besitzen, stets einander und somit auch der Menge R ähnlich sind.*

Zum Beweis[1] legen wir neben der obigen Menge R noch eine beliebige weitere geordnete Menge N mit den nämlichen drei Eigenschaften zugrunde; da R und N abzählbar sein sollen, so können wir, von je einer beliebigen Abzählung ausgehend, ihre Elemente in der Form $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k, \ldots$ bzw. $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ (mit den natürlichen Zahlen als Indizes) schreiben, wobei die Numerierung natürlich in keiner Beziehung zur Reihenfolge der Elemente in den geordneten Mengen steht. Um unsere Behauptung nachzuweisen, daß die obigen drei Eigenschaften einen Ordnungstypus festlegen, haben wir nur eine ähnliche Abbildung zwischen den geordneten Mengen R und N herzustellen.

Wir beginnen, indem wir (erster Schritt) die Elemente r_1 und n_1 einander zuordnen und ferner (zweiter Schritt) dem Element r_2 ein Element n_k von N entsprechen lassen, das zu n_1 in derselben Ordnungsbeziehung steht wie r_2 zu r_1, und zwar unter allen so beschaffenen Elementen von N dasjenige mit möglichst kleinem Index k; ist z. B.

[1] Vgl. CANTOR [121], S. 504—506. Eine Ausdehnung des Verfahrens gibt SKOLEM [2], § 4. Der Beweis beansprucht im Schlußteil die sorgfältige Aufmerksamkeit des Lesers und kann allenfalls zunächst überschlagen werden.

$r_1 \prec r_2$, so haben wir als das zu r_2 entsprechende Element n_k das mit dem kleinsten Index versehene *auf* n_1 *folgende* Element von N zu wählen. Um die Zuordnung auch in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir, da die gewöhnlichen Indizes schon vergeben sind, die bisher herangezogenen Elemente von N auch unter Verwendung von geklammerten Indizes, nämlich $n_{(1)}$ für n_1, $n_{(2)}$ für das dem r_2 entsprechende n_k. Um den nächsten (dritten) Schritt in der Zuordnung zu tun, fassen wir die Ordnungsbeziehungen ins Auge, in denen r_3 zu r_1 und r_2 in R steht; ist etwa $r_1 \prec r_2$, so wird ein einziger der drei möglichen Fälle $r_3 \prec r_1 \prec r_2$, $r_1 \prec r_3 \prec r_2$, $r_1 \prec r_2 \prec r_3$ vorliegen. Es gibt dann Elemente n_k von N (sogar unendlichviele), die zu $n_{(1)}$ und $n_{(2)}$ in denselben Ordnungsbeziehungen stehen wie r_3 zu r_1 und r_2; denn nach der zweiten der vorausgesetzten Eigenschaften gibt es Elemente von N, die $n_{(1)}$ und $n_{(2)}$ gleichzeitig vorangehen bzw. nachfolgen, nach der ersten Eigenschaft aber auch Elemente, die zwischen $n_{(1)}$ und $n_{(2)}$ gelegen sind. Unter allen so beschaffenen Elementen n_k von N werde wiederum das mit möglichst niedrigem (ungeklammertem) Index k gewählt und mit $n_{(3)}$ bezeichnet. Die geordneten Teilmengen R_3 und N_3 von R und N, die beziehentlich die Elemente r_1, r_2, r_3 und $n_{(1)}$, $n_{(2)}$, $n_{(3)}$ enthalten, sind einander hiernach nicht nur äquivalent, sondern auch ähnlich.

Um uns davon zu überzeugen, daß ein solches Zuordnungsverfahren *unbegrenzt* fortgesetzt werden kann, nehmen wir die Zuordnung schon für eine *beliebige* endliche Anzahl von Elementepaaren r_1 und $n_{(1)}$, r_2 und $n_{(2)}$, . . . , r_k und $n_{(k)}$ als vollzogen an, so daß die aus je k Elementen bestehenden geordneten Teilmengen R_k und N_k von R und N einander ähnlich sind; wir beweisen, daß auch der nächste Schritt sich immer vollziehen läßt. Das Element r_{k+1} von R stellt zu sämtlichen Elementen r_1, . . . , r_k von R_k in ganz bestimmten Ordnungsbeziehungen, so daß es entweder zwischen zwei gewissen aufeinanderfolgenden dieser Elemente liegt oder ihnen allen vorangeht oder nachfolgt. Es gibt jedenfalls auch Elemente von N, die zu den *entsprechenden* (d. h. mit dem nämlichen *geklammerten* Index versehenen) Elementen von N_k in denselben Ordnungsbeziehungen stehen; denn nach Eigenschaft 1 liegen zwischen je zwei Elementen von N weitere solche und nach 2 gibt es Elemente in N, die allen Elementen von N_k vorangehen bzw. nachfolgen. Unter den derart beschaffenen Elementen von N wählen wir das mit kleinstmöglichem Index und bezeichnen es mit $n_{(k+1)}$. Dann sind offenbar auch die geordneten Teilmengen R_{k+1} und N_{k+1} von R und N, die durch Einführung von r_{k+1} und $n_{(k+1)}$ in R_k und N_k entstehen, einander ähnlich. So lassen sich aber allen Elementen von R Bildelemente in N zuordnen, und die bei unbegrenzter Fortführung des Verfahrens sich ergebende (unendliche) geordnete Teilmenge von N wird der ganzen Menge R ähnlich sein. Es sei bemerkt, daß wir

bisher noch keinen Gebrauch davon gemacht haben, daß auch R die Eigenschaften 1 und 2 besitzt.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß durch die Bildelemente sämtlicher Elemente von R die Menge N *erschöpft* wird, m. a. W., daß die Teilmenge von N, die durch unser Verfahren ähnlich auf R abgebildet wird, mit N selbst zusammenfällt. Da jedenfalls das Element $n_1 = n_{(1)}$ (nämlich beim ersten Schritt) zur Verwendung kam, so genügt es nachzuweisen, daß neben jeder hinsichtlich der klammerfreien Indizes lückenlosen Serie von schon herangezogenen Elementen $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ von N auch das Element mit dem nächstgrößeren ungeklammerten Index, also n_{k+1}, einmal an die Reihe kommt; denn die Abzählung $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sollte ja die Menge N dem Elementebestand nach erschöpfen.

Befindet sich nun in der beim l^{ten} Schritt erhaltenen geordneten Teilmenge N_l, die $n_{(1)}, n_{(2)}$ usw. bis $n_{(l)}$ enthält, neben den darin vorkommend vorausgesetzten Elementen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nicht schon ohnehin auch n_{k+1}, so wird jedenfalls bei einem der folgenden Schritte auch n_{k+1} herangezogen. Es sei nämlich $r_{l+\nu}$ das mit kleinstmöglichem Index versehene Element von R, welches zu den Elementen $r_1, r_2, \ldots, r_l$ in den nämlichen Ordnungsbeziehungen steht wie n_{k+1} zu $n_{(1)}, n_{(2)}, \ldots, n_{(l)}$; die Existenz eines solchen $r_{l+\nu}$ folgt entsprechend wie im vorletzten Absatz daraus, daß auch R ebenso wie N die Eigenschaften 1 und 2 besitzt. Dann hat aber n_{k+1} sogar zu den Elementen

$$n_{(1)}, \ldots, n_{(l)}, n_{(l+1)}, \ldots, n_{(l+\nu-1)}$$

die nämlichen Ordnungsbeziehungen, wie sie $r_{l+\nu}$ zu

$$r_1, \ldots, r_l, r_{l+1}, \ldots, r_{l+\nu-1}$$

besitzt; denn die Elemente $r_{l+1}, \ldots, r_{l+\nu-1}$ und somit auch ihre Bildelemente in N können sich zwischen die Elemente von R_l (bzw. N_l) nicht etwa an dem Platz einschieben, der für $r_{l+\nu}$ (bzw. n_{k+1}) vorbehalten blieb, weil sonst (gemäß dem zweiten Satz dieses Absatzes) schon ein Element mit niedrigerem Index als $r_{l+\nu}$ zur Heranziehung von n_{k+1} hätte Anlaß geben müssen. Nach dem Verfahren des vorletzten Absatzes entspricht somit n_{k+1} dem Element $r_{l+\nu}$, d. h. n_{k+1} kommt beim $(l+\nu)^{\text{ten}}$ Schritt des Verfahrens wirklich an die Reihe und ist somit mit $n_{(l+\nu)}$ zu bezeichnen. Unser Verfahren zieht also mit jedem Element n_k von N immer auch einmal das Element n_{k+1} heran und erschöpft demnach die Menge N; N ist daher ähnlich R, wie wir nachweisen wollten.

Man bezeichnet den Ordnungstypus jeder geordneten Menge von obigen drei Eigenschaften mit η. Im besonderen folgt aus unserem Ergebnis, daß alle geordneten Mengen, die unter Verwendung *irgendwelcher* Zahlen a und b im angeführten Sinn definiert sind, untereinander (wie auch mit der entsprechend geordneten Menge *aller* ratio-

alen Zahlen) ähnlich sind. η stellt darnach aber auch z. B. den Ordungstypus einer geordneten Menge $\overline{N}$ dar, die folgendermaßen erklärt .t: c und d seien zwei beliebige reelle Zahlen, etwa c kleiner als d, und $\overline{N}$ enthalte alle rationalen Zahlen, die kleiner als c oder größer als d nd, unter Anordnung der Größe nach. Dabei darf zu $\overline{N}$ auch *eine* er Zahlen c und d gerechnet werden; nicht aber beide, da sonst zwischen en Zahlen c und d der Menge keine weitere Zahl der Menge liegt, iese also nicht mehr dicht ist.

Aus der Tatsache, daß der Ordnungstypus η durch die angeführten rei Eigenschaften völlig festgelegt ist, kann man leicht folgende eziehungen für das Rechnen mit diesem Ordnungstypus herleiten:

$$\eta + \eta = \eta, \eta \cdot n = \eta \text{ für jeden endlichen Ordnungstypus } n, \eta \cdot \omega = \eta .$$

um Beweis bilde man geordnete Mengen mit den links stehenden rdnungstypen[1]; die angeschriebenen Beziehungen besagen dann nur, aß die so gebildeten geordneten Mengen wiederum unsere drei Eigen-:haften besitzen.

4. Der Ordnungstypus des Linearkontinuums. Endlich wollen wir ıs noch mit einem zweiten Ordnungstypus etwas genauer beschäfgen, dem wichtigsten, den es neben ω überhaupt gibt. $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ seien vei beliebige reelle Zahlen ($\bar{c}$ kleiner als $\bar{\bar{c}}$) bzw. zwei beliebige unkte der Zahlengeraden ($\bar{c}$ links von $\bar{\bar{c}}$). Dann soll im folgenden C ıs „abgeschlossene" Intervall zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ bedeuten, also die enge aller reellen Zahlen zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$, beide Grenzen *eingehlossen*, in der Anordnung nach der Größe; bzw. die ihr ähnliche enge aller Punkte zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ einschließlich der Grenzen in der nordnung von links nach rechts. Wir haben es bei der Menge C mit dem ı tun, was man auch außerhalb der Mathematik als das *Kontinuum* enauer: Linearkontinuum oder eindimensionales Kontinuum) beichnet: mit der „lückenlosen" oder „stetigen" Gesamtheit aller ınkte einer Strecke, also mit der nächstliegenden (geordneten) Punktenge, die wir uns denken können. Innerhalb der Mathematik spielt ese Menge nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der Analysis ıan denke nur an den Begriff der Funktion, vgl. S. 61) eine hervorgende Rolle. Dennoch war es bis CANTOR nicht gelungen, die Menge C ıne Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen oder auf

[1] Zur Bildung einer Menge vom Ordnungstypus $\eta \cdot \omega$ kann man z. B. von r Tatsache ausgehen, daß die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, ischen 1 und 2, zwischen 2 und 3 usw. jeweils den Ordnungstypus η besitzt, nn die Zahlen der Größe nach geordnet und dabei 0, 1, 2 usw. nicht zu den treffenden Mengen gerechnet werden. Daher besitzt die Menge aller positiven :ionalen Zahlen, ausgenommen die Zahlen 1, 2, 3 usw., den Ordnungstypus ω; dies ändert sich natürlich auch dann nicht, wenn die Zahlen 1, 2, 3 usw. : Menge hinzugerechnet werden.

die gerade Linie rein anschaulich zu charakterisieren, d. h. sie ihrer Anordnung nach vollständig zu beschreiben. Vielfach war man vielmehr dazu gelangt, eine solche Beschreibung für unmöglich zu halten und den Begriff des Kontinuums als einen ursprünglichen anzusehen oder ihn auf den jenseits der Grenzen der Mathematik stehenden Zeitbegriff zurückzuführen, ja sogar ihn ins theologisch-mystische Gebiet zu verweisen[1].

Der naive Betrachter ist zunächst wohl geneigt, die charakteristische Eigenschaft der geordneten Menge aller Punkte auf einer Strecke darin zu erblicken, daß die Punkte überall dicht („unendlich dicht") auf der Strecke gesät sind. Dies ist zweifellos eine Eigenschaft unserer Menge, genügt aber nicht im mindesten zu ihrer Beschreibung. Bedenken wir nur, daß die Menge aller entsprechend angeordneten *rationalen* Punkte zwischen a und b ebenfalls dicht ist! Diese Menge ist im Gegensatz zu C abzählbar, ihre Elemente müssen also zwischen

---

[1] Für die historischen und grundsätzlichen Gesichtspunkte vergleiche man vor allem Cantor [7 V], § 10. Die folgende Stelle daraus, die sich an eine Skizze der Geschichte unseres Problems im Altertum und Mittelalter anschließt, sei hier angeführt:

„. . .Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigentages vertreten finden, wonach das Kontinuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine aprioristische Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre; jeder arithmetische *Determinationsversuch* dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem „Kontinuum" nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff*, sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Mir liegt es sehr fern, diese Streitfragen wieder heraufzubeschwören, auch würde mir zu einer genaueren Besprechung derselben in diesem engen Rahmen der Raum fehlen; ich sehe mich nur verpflichtet, den Begriff des Kontinuums, so logisch nüchtern wie ich ihn auffassen muß und in der Mannichfaltigkeitslehre ihn brauche, hier möglichst kurz und auch nur mit Rücksicht auf die *mathematische* Mengenlehre zu entwickeln. Diese Bearbeitung ist mir aus dem Grunde nicht leicht geworden, weil unter den Mathematikern, auf deren Autorität ich mich gern berufe, kein einziger sich mit dem Kontinuum in dem Sinne genauer beschäftigt hat, wie ich es hier nötig habe."

Naturgemäß ruht Cantors Behandlung des Problems zu einem wesentlichen Teil auf den methodischen Gedanken, die von Forschern wie Cauchy, Bolzano, Weierstrass in die Analysis eingeführt worden sind und sich dort bereits durchgesetzt hatten. — Für das Verhältnis dieser ganzen mathematischen Kontinuitätstheorie zur *Erfahrung* vergleiche man etwa das fünfte Kapitel von Russell [7].

In neuester Zeit, etwa seit Beginn dieses Jahrhunderts und namentlich im letzten Jahrzehnt, sind freilich erneut ernstliche und bis heute nicht restlos geklärte Bedenken erhoben worden, die sich gegen den *Begriff* des Kontinuums als der fertigen Gesamtheit aller reellen Zahlen (Punkte) richten und damit auch Cantors Betrachtung entscheidend treffen. Hierfür ist auf § 14 (besonders S. 237ff.) zu verweisen.

a und b unvergleichlich viel dünner gesät sein als die Elemente von C.

Nun können wir die geordnete Menge C ihrer Anordnung nach in der folgenden Weise etwas genauer beschreiben: Eine Teilmenge von C ist die Menge R aller ihrer Größe nach angeordneten rationalen Zahlen (bzw. rationalen Punkte) zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$; wir wollen dabei $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$ selbst nicht zur Teilmenge R rechnen, wodurch wir erreichen, daß sich η als der Ordnungstypus von R ergibt. Diese Teilmenge, die zwar unendlich, aber abzählbar ist, hat die Eigenschaft, daß zwischen irgend zwei Elementen der Menge C stets Elemente der Teilmenge R gelegen sind; in der Tat liegen ja, wie in der Fußnote auf S. 149 gezeigt wurde, zwischen irgend zwei verschiedenen reellen Zahlen stets rationale Zahlen. Ferner ist C stetig (vgl. die Fußnote auf S. 160) und enthält ein erstes Element c und ein letztes c. Die geordnete Menge C läßt sich also durch Feststellung der folgenden drei Eigenschaften beschreiben:

1. Die geordnete Menge C ist stetig[1];
2. sie enthält sowohl ein erstes als auch ein letztes Element;
3. sie enthält eine abzählbare Teilmenge R derart, daß zwischen je zwei Elementen von C stets mindestens ein Element der Teilmenge R liegt; oder kurz: in C ist eine abzählbare Teilmenge dicht gelegen. (Demnach ist im besonderen C, ebenso wie R, auch dicht.)

Durch diese drei Eigenschaften, die den auf S. 151 angeführten Eigenschaften des Ordnungstypus η in gewisser Weise analog sind, ist die Menge C in bezug auf ihren Ordnungstypus nun auch *vollständig* beschrieben. Mit anderen Worten: jede geordnete Menge — gleichviel ob Teilmenge von M oder nicht —, welche die drei Eigenschaften besitzt, ist unserer Menge C ähnlich; diese Eigenschaften enthalten also eine in bezug auf die Anordnung *erschöpfende* Charakterisierung des Linearkontinuums. Namentlich sind, da die drei Eigenschaften unabhängig sind von der besonderen Wahl der Intervallendpunkte $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$, abgeschlossene Intervalle von verschiedener Länge stets einander ähnlich, wie sich freilich auch direkt, entsprechend wie in Beispiel 4 auf S. 130 (vgl. auch Abbildung 4 auf S. 51), ergibt. Der Ordnungstypus der Zahlen- oder Punktmenge C, den man kurz den *Ordnungstypus des beiderseits begrenzten Linearkontinuums* nennen kann, wird mit Θ bezeichnet; der Ordnungstypus Θ ist also restlos bestimmt durch die drei angeführten Eigenschaften, von denen

[1] Man kann an die Stelle von „stetig" auch „perfekt" (vgl. nachstehend S. 159) setzen, ohne daß sich dadurch etwas an den im nächsten Absatz angeführten Tatsachen ändert. CANTOR hat mit „perfekt" operiert (vgl. indes die Fußnote 1 auf S. 158). — Vgl. (zu Eigenschaft 3) auch etwa KURATOWSKI [3], bes. S. 214.

übrigens keine entbehrt werden kann. CANTORS Beweis dieser grundlegenden Tatsache soll hier wenigstens in den Grundzügen noch entwickelt werden (CANTOR [12I], S. 510—512).

Ist K eine ganz beliebige geordnete Menge, die im Verein mit einer abzählbaren Teilmenge N unsere drei Eigenschaften besitzt und deren erstes Element $\bar{k}$, deren letztes $\bar{\bar{k}}$ ist, so wollen wir vor allem aus der Teilmenge N das Element $\bar{k}$ bzw. $\bar{\bar{k}}$ bzw. beide entfernt denken, falls sie etwa von vornherein in N enthalten sein sollten; die so veränderte Menge N hat dann weder ein erstes noch ein letztes Element. Überdies ist N wegen Eigenschaft 3 (von K) dicht; N besitzt also die drei auf S. 151 aufgezählten Eigenschaften und hat demnach den Ordnungstypus η, den auch die Teilmenge R von C besitzt. Φ sei eine beliebige, aber von nun an bestimmte ähnliche Abbildung zwischen den Mengen R und N; durch Φ wird dann jedes in N vorkommende Element von K einer gewissen zu R gehörigen Zahl von C, d. h. einer rationalen Zahl zwischen $\bar{c}$ und $\bar{\bar{c}}$, zugeordnet und umgekehrt. Ist dagegen k ein nicht zu N gehöriges Element von K, so betrachten wir den Schnitt in N (nicht etwa in K!), dessen erste Hälfte alle und nur diejenigen Elemente von N enthält, die in K dem Element k vorangehen; diesem Schnitt entspricht vermöge der Abbildung Φ ein Schnitt $\mathfrak{S}$ in der Menge R und damit auch ein eindeutig zugehöriger Schnitt in der Menge C (nämlich der, dessen erste Hälfte diejenigen Elemente von C und nur sie enthält, die irgendwelchen — ohnehin zu C gehörigen — Elementen der ersten Hälfte des Schnittes $\mathfrak{S}$ in R vorangehen). Dieser Schnitt in C wird wegen der Stetigkeit von C durch eine bestimmte reelle Zahl c von C erzeugt; eben diese reelle Zahl ordnen wir dem Element k von K zu. Daß diese Zuordnung *umkehrbar* eindeutig ist, erkennen wir leicht, indem wir die Umkehrung in folgender Weise direkt angeben: ist eine reelle Zahl c aus C vorgelegt, so betrachten wir den zu c gehörigen Schnitt in der Menge R, dessen erste Hälfte also von denjenigen rationalen Zahlen von R gebildet wird, welche kleiner sind als c; diesem Schnitt entspricht vermöge der Abbildung Φ ein gewisser Schnitt in der Menge N und somit ein zugehöriger Schnitt in der Menge K, der — da K eine stetige Menge ist — durch ein einziges bestimmtes Element k von K erzeugt wird; das so festgelegte Element k ist dann der reellen Zahl c zuzuordnen. Die hierdurch hergestellte Abbildung zwischen den geordneten Mengen C und K ist schließlich ähnlich; davon überzeugt man sich, wenn zwei beliebige reelle Zahlen c_1 und c_2 von C (c_1 kleiner als c_2) gegeben sind und ihnen die Elemente k_1 und k_2 von K entsprechen, durch den Nachweis, daß ganz ebenso, wie c_1 zu der ersten Hälfte des durch c_2 erzeugten Schnittes in C gehört, auch k_1 in der ersten Hälfte des durch k_2 erzeugten Schnittes in K vorkommt, so daß wirklich in K gilt: $k_1 \prec k_2$.

Man erkennt an Hand der Definition des Ordnungstypus Θ, daß die Ordnungstypen Θ, $\Theta + \Theta = \Theta \cdot 2$, $\Theta \cdot 3$, ... $\Theta \cdot \omega$ usw. alle voneinander verschieden sind. Denn da jede Menge vom Ordnungstypus Θ ein erstes und ein letztes Element besitzt, weist z. B. jede Menge vom Ordnungstypus $\Theta + \Theta$ „in der Mitte" einen Sprung auf, während im Kontinuum wie in jeder stetigen Menge keine Sprünge vorkommen. Ebenso erhält man, wenn man in einer Menge vom Ordnungstypus Θ ein Element fortläßt, eine Menge von einem anderen Ordnungstypus; es entsteht dann nämlich, wenn der fortgelassene Punkt nicht gerade einer der beiden Endpunkte ist, wie in Beispiel 3 auf S. 146 eine „Lücke", die die Menge wiederum der Stetigkeit beraubt. Dagegen

verliert eine Menge vom Ordnungstypus η durch Weglassung eines einzelnen Element keine der drei auf S. 151 angeführten Eigenschaften, behält also ihren Ordnungstypus bei.

Eine ausführliche und leicht verständliche Schilderung des Ordnungstypus des Kontinuums (wie auch der Ordnungstypen ω und η) findet man bei HUNTINGTON [4].

5. Häufungspunkt und daran anschließende Begriffsbildungen. War in den Begriffsbildungen der Definitionen 1 und 2 und den darauf gestützten Beispielen und Anwendungen die *Ordnungsbeziehung* der maßgebende und leitende Gesichtspunkt, so wollen wir jetzt einige ganz andere Begriffe in bezug auf Punktmengen einführen, die sich wesentlich auf den Begriff der *Entfernung* auf der Zahlengeraden gründen[1]. Diese neuen Begriffe gelten also unverändert auch für die Punktmengen in mehrdimensionalen Räumen, insbesondere für diejenigen in der Ebene und im dreidimensionalen Raum, da hier der Begriff der Entfernung gleichfalls unmittelbar sinnvoll ist; wir werden uns indes nach wie vor auf die linearen Punktmengen beschränken. Man beachte, daß durch die Ausschaltung des Ordnungsbegriffs die nächstfolgenden Ausführungen einen Charakter haben, der grundverschieden ist von dem des bisherigen Inhalts dieses Paragraphen!

Definition 3. Unter einer *Umgebung*[2] (genauer: d-Umgebung) eines Punktes P auf der Zahlengeraden versteht man die Menge derjenigen Punkte der Punktmenge M, deren Entfernung von P kleiner ist als eine gegebene positive Größe d (Strecke bzw. positive reelle Zahl). Ein Punkt P heißt *Häufungspunkt* einer Punktmenge N

---

[1] CANTOR hat gerade in seiner letzten und abschließenden einschlägigen Veröffentlichung [12 I] nicht nur den Begriff „dicht", sondern, wie zuweilen in Vergessenheit gerät, auch die im folgenden entwickelten Begriffe (abgeschlossen, insichdicht usw.) auf die Ordnungsbeziehung gegründet und noch die 2. Auflage des vorliegenden Buchs war ihm hierin gefolgt. Die mehr grundsätzlich als praktisch abweichende Art, in der die folgenden Definitionen vorgehen, hat sich indes durch ihre hohe Bedeutung für die Anwendungsgebiete mehr und mehr durchgesetzt. Dagegen schien es nicht bloß aus historischen Gründen, sondern namentlich für die Anwendungen in den Nrn. 3 und 4 zweckmäßig, die Definition 1 (und 2) in dem ursprünglichen, auch von HAUSDORFF [4] beibehaltenen Sinne CANTORS zu belassen, welcher auf die Theorie der geordneten Mengen zugeschnitten ist.

[2] Man kann die Umgebung auch ohne Benutzung des Entfernungsbegriffs einführen, nämlich als ein P enthaltendes (offenes) Intervall. Obgleich ein solches metrikfreies Verfahren an sich vorzuziehen ist, wird für den Anfänger die obige Definition anschaulicher sein. — Hervorgehoben sei noch zum Nachfolgenden, daß der Begriff des Häufungspunktes und die darauf gestützten Begriffsbildungen nicht absoluten, sondern relativen Charakter tragen, nämlich abhängig sind von der als Bezugssystem dienenden Punktmenge, dem „Raum"; bei dem elementaren Charakter dieses Paragraphen, der nur einer ersten und vorläufigen Orientierung dienen will, wird von jener Relativität durchweg abgesehen, nämlich ein für allemal die Ausgangsmenge M als „Raum" zugrunde gelegt.

(d. h. einer beliebigen Teilmenge von M), wenn sich in *jeder* (noch so engen) Umgebung von P (kurz: „*in der Nachbarschaft* von P") mindestens ein von P verschiedener Punkt der Punktmenge N befindet.

In den Beispielen von Nr. 2 (S. 145 ff.) ist demnach jeder beliebige Punkt der jeweils betrachteten Menge N auch ein Häufungspunkt von N. Indes braucht ein *Häufungspunkt* einer Menge N nicht auch ein *Punkt* von N zu sein, d. h. nicht notwendig zu N als Element zu gehören; z. B. hat die Menge $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ den einzigen Häufungspunkt 1, der der Menge nicht angehört. Dagegen besitzt die Menge aller *ganzzahligen* Punkte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ von M offenbar überhaupt keine Häufungspunkte.

In jeder (noch so engen) Umgebung eines Häufungspunktes P der Punktmenge N (d. h. in jeder d-Umgebung, wie klein auch d sein möge) liegen unendlichviele Punkte von N. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur die Größe d in geeigneter Weise immer kleiner und kleiner werden zu lassen; ist z. B. P_1 ein (durch Definition 3 gesicherter) Punkt der d-Umgebung von P und wird die Entfernung zwischen P und P_1 mit d_1 bezeichnet, so muß in der d_1-Umgebung von P (um so mehr also in der d-Umgebung) ein von P_1 verschiedener Punkt P_2 liegen, usw.

Definition 4. Unter der *Ableitung* N' einer Punktmenge N versteht man die Menge aller Häufungspunkte von N. Ist N' eine Teilmenge von N, d. h. ist jeder Häufungspunkt von N auch ein Punkt von N, so heißt die Menge N *abgeschlossen*; ist andererseits N eine Teilmenge der Ableitung N', d. h. ist jeder Punkt von N zugleich ein Häufungspunkt von N, so heißt die Menge N *insichdicht*. Schließlich kann es vorkommen, daß eine Punktmenge N mit ihrer Ableitung zusammenfällt, d. h. daß N gleichzeitig abgeschlossen und insichdicht ist; dann nennt man N eine *perfekte* Punktmenge.

Eine Punktmenge N braucht weder abgeschlossen noch insichdicht zu sein, da im allgemeinen (so z. B. für die oben erwähnte Menge $N = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$) weder N' Teilmenge von N noch umgekehrt N Teilmenge von N' sein wird. Eine endliche Menge N und allgemeiner eine Menge N ohne Häufungspunkte (wie die Menge aller ganzzahligen Punkte) ist übrigens stets abgeschlossen, da ihre Ableitung die Nullmenge und somit Teilmenge *jeder* Menge ist. Infolge der völlig verschiedenen Grundlage, auf der die Definitionen 1 und 2 einerseits (Ausgangspunkt die Anordnung!), 3 und 4 andererseits (Ausgangspunkt die Entfernung!) sich aufbauen, weichen die Begriffe einer „dichten" und einer „insichdichten" Menge wesentlich voneinander ab; nicht nur gibt es (Beispiel 4 auf S. 161 ff.) insichdichte Mengen, die nicht dicht sind, sondern es kann auch eine im Sinn der Definition 1 „dichte" Menge dennoch nicht insichdicht sein (vgl. Aufgabe 8, S. 165).

6. Beispiele. 1. N sei (wie in Beispiel 1 auf S. 145f.) ein Intervall, d. h. die Menge aller Punkte zwischen zwei festen Punkten P_1 und P_2 unserer Geraden. Wenn die Endpunkte P_1 und P_2 zu N gerechnet werden, so ist N eine nicht nur insichdichte, sondern auch abgeschlossene, also perfekte (und ferner stetige) Menge. Daß nämlich jeder Punkt von N gleichzeitig Häufungspunkt von N ist, leuchtet unmittelbar ein; aus der Theorie der reellen Zahlen bzw. aus dem CANTOR-DEDEKINDschen Axiom für die Punkte einer Geraden (Fußnoten auf S. 144f. und 143) folgt aber auch, daß jeder Häufungspunkt von N dieser Punktmenge angehört. Ist ferner $N_1|N_2$ irgendein Schnitt in N, so daß alle Punkte von N_1 links von allen Punkten von N_2 liegen, so gibt es, wie die Anschauung nahezulegen scheint[1], auf der Geraden einen einzigen Grenzpunkt Q zwischen den Teilmengen N_1 und N_2, der also zur Menge N und somit entweder zu N_1 oder zu N_2 gehört; Q erzeugt den Schnitt $N_1|N_2$, da jeder links von Q gelegene Punkt zu N_1, jeder rechts von Q gelegene Punkt zu N_2 gehört. Der Schnitt $N_1|N_2$ ist also weder ein Sprung noch eine Lücke, d. h. die Menge N ist auch stetig. Da die nämlichen Überlegungen auf die Menge M *aller* Punkte unserer Geraden anwendbar sind, so ist auch diese Punktmenge perfekt und stetig.

Läßt man dagegen die Endpunkte P_1 und P_2 des Intervalls oder auch nur éinen von ihnen fort, so verliert die Menge die Eigenschaft, abgeschlossen (und somit auch perfekt) zu sein; denn P_1 und P_2 sind ja Häufungspunkte der neuen Menge, gehören ihr aber nicht an. Man bezeichnet daher ein Intervall mit beiden Endpunkten als *abgeschlossenes Intervall*, während ein Intervall, dem beide Endpunkte fehlen, ein offenes Intervall genannt wird.

2. Ist N wie in Beispiel 2 (S. 146) die Menge aller rationalen Punkte zwischen P_1 und P_2, wo P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte der Geraden bedeuten, so ist diese Menge nicht nur dicht, sondern auch insichdicht, da in der Nachbarschaft jedes rationalen Punktes unendlich viele weitere rationale Punkte liegen. Dagegen ist N nicht abgeschlossen. In der Tat liegen z. B. in der Nachbarschaft des Punktes $\sqrt{2}$ der Menge M, der nach Beispiel 5 (S. 148) der Menge N nicht angehört,

[1] Diese Tatsache, die unserer Anschauung vom Wesen einer „kontinuierlichen" geraden Linie zu entsprechen scheint, ist geometrisch nicht *beweisbar*, sondern der Ausdruck des mehrfach erwähnten geometrischen Axioms, das sich mit Benutzung der Ausdrucksweise von Definition 2 so aussprechen läßt: M weist keine Lücken auf. Dagegen wird die entsprechende Tatsache für die Menge der reellen Zahlen *beweisbar*, falls man durch Definition den Begriff der reellen Zahl entsprechend weit faßt, so weit nämlich, daß sich die obige Tatsache für die Menge aller reellen Zahlen (ev. zwischen zwei festen Zahlen) nachweisen läßt (vgl. Fußn. auf S. 144f. sowie etwa die Darstellung bei KNOPP [1], 1. Kapitel, oder bei LOEWY [1], 3. Kapitel). Betrachtet man also die gerade Linie nicht eigentlich als geometrisches Gebilde, sondern als Abbild der Gesamtheit der reellen Zahlen (Zahlengerade), so wird die obige Tatsache in dem angegebenen Sinne beweisbar.

unendlichviele rationale, also zu N gehörige Punkte; um sich davon zu überzeugen, kann man etwa von der Dezimalbruchentwicklung $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ ausgehen und dann in jeder noch so engen Umgebung des Punktes $\sqrt{2}$ rationale Punkte dadurch finden, daß man nach hinreichend vielen Stellen rechts vom Komma die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ abbricht; der so entstehende endliche Dezimalbruch bestimmt einen rationalen Punkt der gewünschten Art und bei Abbruch an noch späteren Stellen erhält man weitere solche Punkte. Der (irrationale) Punkt $\sqrt{2}$ ist also Häufungspunkt der Menge N. Das nämliche gilt offenbar von sämtlichen zwischen P_1 und P_2 gelegenen irrationalen Punkten; da sie alle nach der Definition von N dieser Menge nicht angehören, so ist N nicht abgeschlossen. Die Bezeichnung „abgeschlossen" erklärt sich ähnlich wie die mit ihr in enger Beziehung stehende Bezeichnung „Lücke" (vgl. Beispiel 5 auf S. 148 ff.) dadurch, daß eine Menge N von der hier betrachteten Art gewissermaßen nach der Vervollständigung verlangt, die ihr durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte (hier: der irrationalen Punkte) zuteil werden könnte; durch solche Vervollständigung entsteht eine Menge (hier: das abgeschlossene Intervall zwischen P_1 und P_2), die keine gleichartige Ergänzung mehr verträgt.

3. N sei eine unendliche Menge von Punkten auf unserer Geraden, unter denen jeder von dem nächsten gleich weit entfernt sei; N kann also z. B. als die Menge der „ganzzahligen" Punkte $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ betrachtet werden. Die Menge ist weder dicht noch auch insichdicht, da keiner ihrer Punkte Häufungspunkt der Menge ist. Dagegen ist N eine abgeschlossene Menge; denn da N überhaupt keine Häufungspunkte hat, so ist die Ableitung $N' = 0$ und daher Teilmenge von N. Ist ferner $N_1|N_2$ irgendein Schnitt in N, so enthält die Teilmenge N_1 einen letzten Punkt P_1, ebenso die Teilmenge N_2 einen ersten Punkt P_2, nämlich den unmittelbar auf P_1 folgenden Punkt von N. Kein Schnitt in N ist also eine Lücke, vielmehr jeder ein Sprung; die Menge ist somit nicht stetig.

4. Endlich soll noch ein Beispiel einer Punktmenge N angeführt werden, die zwar insichdicht und abgeschlossen, also perfekt, nicht aber dicht oder stetig ist; diese Menge ist sogar „*nirgends dicht*", d. h. innerhalb *jedes* Intervalls auf dem in Betracht kommenden Teile (von 0 bis 9) der Zahlengeraden gibt es Teilintervalle, in denen kein einziger Punkt der Menge N liegt, oder (was hier auf dasselbe hinauskommt) zwischen je zwei beliebigen Punkten der Menge N gibt es weitere (eventuell mit jenen zusammenfallende) Punkte P_1 und P_2 von N, so daß die Teilmenge aller *zwischen* P_1 und P_2 gelegenen Punkte *von* N völlig leer ist.

$0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ 1 \quad 2\ 2\tfrac{1}{3}\ 2\tfrac{2}{3}\ 3 \quad 6\ 6\tfrac{1}{3}\ 6\tfrac{2}{3}\ 7 \quad 8\ 8\tfrac{1}{3}\ 8\tfrac{2}{3}\ 9$

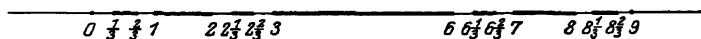



Abb. 13.

Diese der Anschauung nicht leicht zugängliche Punktmenge N wollen wir, um eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen, folgendermaßen erklären in einer sehr speziell aussehenden, der Sache nach aber höchst allgemeinen Art (vgl. Abb. 13): Wir

fassen auf unserer geraden Linie zunächst die Strecke vom Punkte 0 bis zum Punkte 9 ins Auge. Das mittlere Drittel dieser Strecke, also die Strecke von 3 bis 6, möge auf irgendeine Weise (etwa durch starkes Ausziehen) markiert werden; es bleiben also die Strecke von 0 bis 3 und diejenige von 6 bis 9 unmarkiert. Auf diesen beiden unmarkierten Strecken soll wiederum je das mittlere Drittel markiert werden, also die Strecken von 1 bis 2 und von 7 bis 8; unmarkiert bleiben dann vier Strecken zurück, nämlich von 0 bis 1, von 2 bis 3, von 6 bis 7 und von 8 bis 9. Abermals möge auf diesen vier unmarkierten Strecken je das mittlere Drittel markiert werden, d. h. die Strecken von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$, von $2\frac{1}{3}$ bis $2\frac{2}{3}$, von $6\frac{1}{3}$ bis $6\frac{2}{3}$ und von $8\frac{1}{3}$ bis $8\frac{2}{3}$, so daß acht unmarkierte Strecken übrigbleiben. Dieses Verfahren wollen wir *unbegrenzt* fortgesetzt denken; bei jedem folgenden Schritt soll also auf jeder Strecke, die beim vorhergehenden Schritt noch unmarkiert geblieben ist, das mittlere Drittel markiert werden. Nach gedanklicher Vollendung dieses Prozesses *wollen wir unter N die geordnete Punktmenge verstehen, die erstens die beiderseitigen Endpunkte aller markierten Strecken und zweitens alle nicht auf markierten Strecken gelegenen Punkte zwischen den Punkten* 0 *und* 9 *unserer Geraden (diese beiden Punkte eingeschlossen) enthält.*

Diese Menge ist zunächst *nirgends* dicht. Es seien nämlich P_1 und P_2 irgend zwei Punkte unserer Punktmenge N; P_1 liege links von P_2. Es kann der Fall sein, daß P_1 und P_2 die beiden Endpunkte einer und derselben markierten Strecke sind; dann liegt zwischen P_1 und P_2 kein weiterer Punkt von N. In jedem anderen Fall dagegen liegen zwischen beiden Punkten sicher mehrere (sogar unendlichviele) markierte Strecken. Denn das Teilungsverfahren, das wir zur Herstellung der Menge N anwandten, erstreckt sich auf jedes Stück unserer Geraden zwischen 0 und 9, das nicht völlig durch eine markierte Strecke ausgefüllt ist; die Länge der jeweils entstehenden markierten Strecken nimmt mit der Fortsetzung des Teilungsverfahrens unbegrenzt ab. Denken wir uns daher genügend viele Schritte des Verfahrens gemacht, so werden zwischen P_1 und P_2 mehrere markierte Strecken zu liegen kommen (deren Zahl übrigens durch die weitere Fortsetzung des Teilungsverfahrens noch unbegrenzt vermehrt wird). Sind Q und R die beiden (zu N gehörigen) Endpunkte *irgendeiner* zwischen P_1 und P_2 gelegenen markierten Strecke (wobei auch Q mit P_1 oder R mit P_2 zusammenfallen kann), so liegt zwischen Q und R kein Punkt von N (nach der Definition von N); die Punktmenge N ist also zwischen den (ganz beliebig angenommenen) Punkten P_1 und P_2 *nicht* dicht, wie diese — leicht zu verschärfende — Betrachtung zeigen sollte.

Dagegen ist die Menge N insichdicht. Ein beliebiger Punkt P von N kann nämlich höchstens éiner markierten Strecke als Endpunkt angehören; auf der dieser Strecke entgegengerichteten Seite von P — bzw., falls P nicht Endpunkt einer markierten Strecke ist, auf jeder der beiden Seiten von P — müssen aber gemäß der Definition von N innerhalb jeder noch so engen Umgebung von P jedenfalls markierte Strecken anfangen, deren Ausgangspunkte also Elemente von N sind. In der Nachbarschaft des Punktes P liegen also sicher weitere Punkte von N, d. h. jeder Punkt von N ist gleichzeitig Häufungspunkt von N.

Daß N nicht dicht und dennoch insichdicht ist, liegt wesentlich daran, daß zwar wohl in der Nachbarschaft eines jeden Punktes von N ein weiterer Punkt von N liegt (und daher sogar unendlichviele weitere Punkte von N), daß dies aber unter Umständen nur nach der éinen Richtung hin gilt. Ist nämlich P z. B. der linksseitige Endpunkt einer markierten Strecke, so ist die Menge in der Richtung von P aus nach rechts hin nicht dicht, sondern P besitzt einen unmittelbar nachfolgenden Punkt: den rechtsseitigen Endpunkt der betreffenden markierten Strecke. Das Umgekehrte gilt für die rechtsseitigen Endpunkte markierter Strecken. Für die Eigenschaft einer Menge, insichdicht zu sein, ist solche einseitige Dichtigkeit hinreichend; nicht aber für die Eigenschaft, dicht zu sein. (Die grundsätz-

liche Verschiedenheit der Ausgangspunkte für die Definitionen 1 und 3/4 spielt in diesem Fall keine Rolle.)

Um endlich zu zeigen, daß unsere Punktmenge N abgeschlossen ist, bemerken wir vor allem, daß jeder Häufungspunkt unserer Punktmenge N sicher ein Punkt des (abgeschlossenen) Intervalls von 0 bis 9 auf der Geraden ist. Denn jeder Punkt von N ist um so mehr Punkt des Intervalls, und die Häufungspunkte des Intervalls gehören nach Beispiel 1 auf S. 160 dem Intervall an. Ein Häufungspunkt von N kann andererseits nicht im Innern einer der markierten Strecken liegen; denn da eine markierte Strecke, abgesehen von ihren Endpunkten, keinen Punkt von N enthält, so ist für einen Punkt Q im Innern der Strecke eine genügend enge Umgebung frei von Punkten aus N, also Q keinesfalls Häufungspunkt von N. Jeder Häufungspunkt P von N ist also ein *nicht im Innern einer markierten Strecke* gelegener Punkt des abgeschlossenen Intervalls von 0 bis 9, d. h. nach der Definition von N: P gehört der Punktmenge N an, die somit abgeschlossen und daher auch perfekt ist.

Es sei noch ohne Beweis vermerkt, daß diese merkwürdige Punktmenge N — wie übrigens jede perfekte Punktmenge — die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Die Menge aller markierten Strecken zwischen den Punkten 0 und 9 ist zwar gleichfalls unendlich, aber nur abzählbar, wie man leicht erkennt. Punktmengen dieser Art sind zuerst von H. J. St. SMITH, in arithmetischer Form bald darnach von CANTOR (SMITH [1], S. 147f; CANTOR [7V], S. 590) und seitdem vielfach behandelt worden.

7. Schlußbemerkung über die Theorie der Punktmengen und ihre Anwendungen. Zum Abschluß dieses Paragraphen sei bemerkt: Wir haben uns in den ersten Nummern (1—4) mit linearen Punktmengen hauptsächlich in dem Sinne beschäftigt, daß wir sie als Beispiele zu den im vorigen Paragraphen behandelten *geordneten* Mengen auffaßten, und haben dabei die Begriffsbildungen bevorzugt, welche es CANTOR ermöglichten, die über die Grenzen der Mathematik hinaus interessierende Frage nach der Natur bzw. dem Ordnungstypus des Linearkontinuums zu beantworten. Mit alledem ist aber noch nicht einmal andeutungsweise die ungeheure Bedeutung gekennzeichnet, die die Theorie der Punktmengen seit CANTORS ersten Arbeiten mehr und mehr gewonnen hat; diese Theorie ist nicht nur zum wichtigsten Anwendungsgebiet der Mengenlehre, sondern zu einer der wesentlichsten mathematischen Disziplinen überhaupt geworden, namentlich zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel auf den verschiedensten Gebieten der Analysis wie auch der Geometrie (vgl. W. H. YOUNG [2]). Schon CANTOR hat neben seinen Arbeiten über die *abstrakten Mengen*, die den Gegenstand der §§ 3—9 sowie 11—12 dieses Buches ausmachen, eine Reihe von Sätzen über insichdichte, abgeschlossene und perfekte *Punktmengen* aufgestellt und bewiesen; Sätze, die erst durch die gleichsam unendliche Scharfsichtigkeit ermöglicht werden, zu der uns die Brille der Mengenlehre befähigt. Auch andere, für die methodische Untersuchung der Punktmengen wesentliche Begriffsbildungen stammen von CANTOR; mit weiteren, die in der Folge von entscheidender Bedeutung wurden, hat er gerungen, wenn auch noch ohne vollen Erfolg.

Bei den einschlägigen Betrachtungen kommt keineswegs nur die Auffassung der Punktmengen als *geordneter* Mengen zur Geltung, sondern gerade auch Betrachtungen, die von der Ordnungsbeziehung absehen und dem Begriff der „Menge schlechthin" andere Grundbegriffe (wie den der Umgebung) zur Seite stellen, gewinnen eine besondere Bedeutung (vgl. die Definitionen 3 und 4 auf S. 158f.). Ebenso werden neben den linearen natürlich auch die ebenen Punktmengen sowie die in den Räumen von drei und mehr Dimensionen gelegenen in Betracht gezogen. Namentlich innerhalb der Theorie der reellen Funktionen hat diese mengentheoretische Betrachtungsweise wahre Triumphe gefeiert und hier sogar z. B. den klassischen (von RIEMANN endgültig begründeten) Integralbegriff zugunsten eines sozusagen verfeinerten Integralbegriffs (LEBESGUE) in den Hintergrund gedrängt.

Für das Studium dieser Anwendungsgebiete der Mengelehre, denen es an modernen Darstellungen nicht mangelt und deren Behandlung in dem vorliegenden, der „abstrakten" Mengenlehre gewidmeten Buch nicht beabsichtigt ist, werde der Leser auf die einschlägigen Lehrbücher verwiesen, etwa auf BAIRE [2], BOREL [1]—[3], CARATHÉODORY [1], HAHN [2], HAUSDORFF [3] und [4], HOBSON [2], KAMKE [1], LEBESGUE [1] und) [2], PIERPONT [1], SCHLESINGER-PLESSNER [1], DE LA VALLÉE-POUSSIN [2], W. H. and GR. CH. YOUNG [1][1], ferner auf die enzyklopädischen Stoffsammlungen in SCHOENFLIES [1] und [8] sowie in ROSENTHAL-BOREL [1], schließlich auf die mehr allgemein gehaltenen und historischen Schilderungen SCHOENFLIES [4] und W. H. YOUNG [2].

Aufgaben. 1. Man zeige, daß $\eta^2 = \eta$!

2. Man entnehme der ersten Hälfte des für den Ordnungstypus η geführten Beweises die folgenden beiden Tatsachen: Jede geordnete abzählbare Menge läßt sich als geordnete Teilmenge einer Menge vom Ordnungstypus η auffassen; jede dichte Menge enthält eine Teilmenge vom Ordnungstypus η.

3. Es gibt nur 4 verschiedene Ordnungstypen von abzählbaren dichten Mengen, nämlich η, $1 + \eta$, $\eta + 1$, $1 + \eta + 1$. Beweis!

4. Man führe den die *Ähnlichkeit* der Mengen C und K betreffenden Schluß des Beweises auf S. 157 vollständig aus!

5. Man zeige an Hand von Beispielen, daß sowohl beim Ordnungstypus η wie bei Θ keine der je drei zugehörigen Eigenschaften entbehrt werden kann, wenn eine vollständige Festlegung bezweckt werden soll! (Bei Θ für die dritte Eigenschaft nicht ganz leicht einzusehen.)

6. Man versuche sich über die Natur des Ordnungstypus Θ^2 ein Urteil zu bilden!

---

[1] Als das erste eigentliche Lehrbuch der Theorie der Punktmengen (einschl. der Elemente der abstrakten Mengenlehre) ist dieses Werk des englischen Forscherehepaares von besonderer Bedeutung gewesen.

7. Welches ist die Ableitung a) der Menge aller rationalen Punkte, b) eines offenen (d. h. ohne seine Endpunkte genommenen) Intervalls?

8. Eine dichte Menge braucht nicht insichdicht zu sein. Man zeige dies an Hand der Punktmenge N, die außer den rationalen (oder auch allen) Punkten zwischen 0 und 1 sowie zwischen 3 und 4 — die Grenzen jeweils ausgeschlossen — noch den Punkt 2 enthält, und man mache sich den inneren Grund klar, der mit der Verschiedenheit der Ausgangspunkte bei den Definitionen 1 und 3|4 zusammenhängt!

9. Man zeige, daß die in Beispiel 4 auf S. 161 ff. angeführte perfekte, nirgends dichte Menge unendlichviele Sprünge, aber keine Lücken aufweist!

10. Man beweise, daß allgemein eine abgeschlossene Punktmenge keine Lücken besitzt!

11. Man überzeuge sich, daß der in Beispiel 4 auf S. 161 ff. angeführten Menge auf der Zahlengeraden diejenige Zahlenmenge entspricht, die bei Darstellung der reellen Zahlen durch triadische Brüche (d. h. Grundzahl 3 statt der bei den Dezimalbrüchen verwendeten Grundzahl 10, vgl. S. 110) diejenigen triadischen Entwicklungen enthält, in denen nach dem Komma nur die Ziffern 0 und 2 auftreten, nicht aber die Ziffer 1 (während vor dem Komma die Zahlen 0, 2, 6, 8 stehen)! (Z. B. wird Punkt 1 durch die triadische Entwicklung 0,222 .... dargestellt, vgl. S. 44 oben.)

§ 11. Allgemeine Theorie der wohlgeordneten Mengen. Von den endlichen Mengen.

1. Grundbegriffe und Grundtatsachen. Unter den geordneten Mengen, mit denen wir uns in den letzten beiden Paragraphen beschäftigt haben, gibt es spezielle Mengen, die durch die besondere — wenn man will: besonders einfache — Art der Anordnung ihrer Elemente bemerkenswert sind und die man als „wohlgeordnet" bezeichnet. Im Reiche der wohlgeordneten Mengen herrschen besonders einfache Verhältnisse, die in vielen Hinsichten an die uns wohlvertrauten Eigenschaften der gewöhnlichen Zahlenreihe erinnern. Dementsprechend werden wir in den Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen eine Klasse „unendlicher Zahlen" kennenlernen, die viele Eigenschaften der endlichen Zahlen aufweisen und uns daher einen weniger fremden Eindruck machen, als ihn die unendlichen Kardinalzahlen und namentlich die Ordnungstypen unendlicher geordneter Mengen zunächst erwecken mögen.

Ist schon hiermit ein besonderes Eingehen auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen hinreichend gerechtfertigt, so werden gewisse Eigenschaften dieser Mengen doppelt bedeutungsvoll dadurch, daß sie sich auf *ganz beliebige* Mengen übertragen lassen. Im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts ist nämlich der strenge Nachweis der schon von

CANTOR mit Sicherheit vermuteten Tatsache gelungen, daß die Elemente jeder beliebigen (geordneten oder überhaupt nicht geordneten) Menge sich zu einer wohlgeordneten Menge umordnen bzw. anordnen lassen; dieser Nachweis gestattet uns, wichtige Vereinfachungen für die Theorie der unendlichen *Kardinalzahlen* herzuleiten. Da insofern die Lehre von den Kardinalzahlen zum Teil — mindestens dem Wesen nach — abhängig ist von der Theorie der wohlgeordneten Mengen und ihrer Ordnungstypen, so kann man ernstlich daran denken, diese früher als die Kardinalzahlen zu behandeln; doch sprechen für den von uns eingeschlagenen Weg andere, namentlich auch didaktische Erwägungen.

Wir sind zu Beginn des § 9 davon ausgegangen, daß die Kardinalzahlen der Mengenlehre zwar eine Verallgemeinerung des Begriffs der endlichen Zahl als *Anzahl* darstellen, daß man aber, um der Bedeutung der endlichen Zahlen für den *Zählprozeß*, d. h. der Verwendung der Zahl als *Ordnungszahl* gerecht zu werden, auch die Reihenfolge der Elemente in einer geordneten Menge beachten muß; das hat uns zu den Ordnungstypen als Verallgemeinerungen der endlichen Ordnungszahlen geführt. Der Zählprozeß ist jedoch von weit speziellerer Art, als es dem Ordnungstypus einer beliebigen geordneten unendlichen Menge entspricht. So beginnt das Zählen namentlich stets mit einem *ersten*, d. h. zuerst gezählten Ding; ferner folgt beim Zählprozeß jedem gezählten Ding, das nicht etwa überhaupt das letzte ist, ein weiteres Ding als *unmittelbarer Nachfolger*, d. h. auf n-tens folgt sofort $(n+1)$-tens. Von beiden Eigenschaften ist bei beliebigen Ordnungstypen keine Rede. Z. B. gibt es in einer nach dem Typus $^*\omega$ oder nach dem Typus η geordneten Menge kein erstes Element; und in einer „dichten“ Menge (S. 144), z. B. in der Menge aller rationalen oder aller reellen Zahlen in der gewöhnlichen Reihenfolge, besitzt kein Element einen unmittelbaren Nachfolger, sondern zwischen irgend zwei Elementen liegen immer noch unendlichviele andere. Um den gewöhnlichen Zählprozeß in das Gebiet des Unendlichen hinein fortzuführen, bedarf man demnach einer Spezialisierung des Begriffs des Ordnungstypus, also einer Beschränkung auf geordnete Mengen von besonderen Anordnungseigenschaften. Die Erkenntnis von der Bedeutung einer derartigen speziellen Klasse von Ordnungstypen und geordneten Mengen hat zu den frühesten und folgenreichsten Errungenschaften CANTORS gehört, der zu diesem Zweck von „wohlgeordneten“ Mengen und von „Ordnungs*zahlen*“ spricht (CANTOR [7 V], §§ 2f.; [12 II], § 12). Diese Begriffsbildung gehört zu den weitesttragenden der Mathematik überhaupt und hat sich weit über die Grenzen der Mengenlehre und selbst der Analysis hinaus bis in das Reich der Arithmetik und Algebra als fruchtbar, ja sogar als unentbehrlich erwiesen.

An die Spitze stellen wir:

Definition 1. Eine geordnete Menge M heißt wohlgeordnet, wenn jede von der Nullmenge verschiedene Teilmenge von M (im besonderen also auch M selbst) ein *erstes* Element enthält.

Ist a ein beliebiges Element der wohlgeordneten Menge M, so sei M' die Teilmenge aller auf a folgenden Elemente m von M (d. h. die Teilmenge derjenigen Elemente m, für die $a \prec m$ gilt); sollte a etwa das letzte Element von M sein, so ist natürlich $M' = 0$. Nach der Definition der wohlgeordneten Menge besitzt die Teilmenge M', wenn sie von 0 verschieden ist, ein erstes Element b; auch für dieses gilt natürlich $a \prec b$. Dann gibt es kein Element c in M, das zwischen a und b läge, also die Beziehungen $a \prec c \prec b$ erfüllte; denn c müßte, weil auf a folgend, zur Teilmenge M' gehören, kann aber dann doch deren erstem Element b nicht vorangehen. Wörtlich dieselben Schlüsse ergeben sich, wenn man statt von einem einzigen Element a vielmehr von einer beliebigen Teilmenge der wohlgeordneten Menge M ausgeht; man erhält dann das erste unter denjenigen Elementen von M, die sämtlichen Elementen der Teilmenge nachfolgen — vorausgesetzt, daß nachfolgende Elemente überhaupt vorhanden sind. Es gilt also:

Satz 1. *In einer wohlgeordneten Menge M gibt es zu jedem Element von M, ausgenommen das etwaige letzte — und allgemeiner zu jeder Teilmenge von M, deren sämtlichen Elementen überhaupt noch ein Element von M nachfolgt — ein einziges unmittelbar nachfolgendes Element.*

Hiernach besitzt eine wohlgeordnete Menge nicht bloß ein erstes, sondern auch ein zweites, drittes, ..., n-tes Element, falls die Menge nicht schon nach weniger als n Schritten erschöpft ist.

Beispiele wohlgeordneter Mengen sind zunächst alle endlichen (geordneten)[1] Mengen, ferner die Menge aller natürlichen Zahlen in der gewöhnlichen Reihenfolge der Größe nach; denn in jeder Menge von natürlichen Zahlen gibt es ja eine kleinste Zahl. Auch die Menge aller rationalen Zahlen in der auf S. 31 f. gegebenen Anordnung ist wohlgeordnet, wie überhaupt jede *abgezählte* Menge (d. h. jede Menge, die der Menge der ihrer Größe nach angeordneten natürlichen Zahlen ähnlich ist) wohlgeordnet ist; dies gilt aber keineswegs von jeder *abzählbaren* Menge, eine solche braucht ja überhaupt nicht geordnet zu sein. Auch eine nicht abgezählte unendliche Menge kann wohlgeordnet sein; so ist die Menge aller ganzen Zahlen nicht nur in der abgezählten Anordnung $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ wohlgeordnet, sondern auch z. B. in der nicht abgezählten Anordnung:

$$\{0, 1, 2, 3, \dots -1, -2, -3, \dots) .$$

Ebenso ist die Menge aller positiven rationalen Zahlen z. B. auch in der folgenden, nicht abgezählten Anordnung wohlgeordnet:

$$\{1, 2, 3, \dots \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \dots \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, \dots \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, \dots, \dots\}.$$

[1] Vgl. die Bemerkung in Beispiel 1 von S. 128.

Eine andere wohlgeordnete Menge ist die folgende (nicht abgezählte) Menge:

$$\{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{7}{16}, \tfrac{15}{32}, \ldots \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots 1\}.$$

Nicht wohlgeordnet ist dagegen beispielsweise die Menge aller ganzen Zahlen in der natürlichen Reihenfolge

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

da diese Menge ebensowenig wie z. B. die Teilmenge der negativen Zahlen ein erstes Element besitzt. Auch die Menge aller rationalen oder reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (oder zwischen irgendwelchen anderen Grenzen oder ohne Grenzen) ist nicht wohlgeordnet, wenn man die Zahlen der Größe nach ordnet; z. B. enthält die Teilmenge aller rationalen bzw. reellen Zahlen, die größer sind als $\frac{1}{2}$, kein erstes (kleinstes) Element, weil zwischen $\frac{1}{2}$ und jeder (um noch so wenig) größeren Zahl immer noch rationale bzw. reelle Zahlen liegen.

Unmittelbar aus der Erklärung der wohlgeordneten Mengen fließt (bei Übertragung der Ordnung einer Menge auf deren Teilmengen) der Satz:

Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet.

Um diesem Satz allgemeinste Gültigkeit zu sichern, bezeichnet man formal *auch die Nullmenge als wohlgeordnet,* da sie ja als Teilmenge jeder Menge gilt; diese Festsetzung steht mit Definition 1 im Einklang und wird sich weiterhin als nützlich erweisen. Ferner folgt in Verbindung mit dem Begriff der Ähnlichkeit sofort:

Jede geordnete Menge, die einer wohlgeordneten Menge ähnlich ist, ist selbst wohlgeordnet.

Eine charakteristische Eigenschaft der wohlgeordneten Mengen können wir leicht und anschaulich aussprechen, wenn wir uns der folgenden Ausdrucksweise bedienen, die sich ohne Änderung auch auf beliebige geordnete (nicht wohlgeordnete) Mengen ausdehnen läßt:

Definition 2. Eine Teilmenge A der (wohl)geordneten Menge M heißt ein Anfangsstück von M, wenn mit einem beliebigen Element a von A gleichzeitig auch jedes in M *vor* a stehende Element der Teilmenge A angehört. Im besonderen heißt die Teilmenge A aller derjenigen Elemente von M, die einem festen Element m von M vorangehen, ein Abschnitt von M oder genauer: der durch m bestimmte Abschnitt von M.

Hiernach ist auch die Nullmenge ein Anfangsstück und ein Abschnitt jeder wohlgeordneten Menge M, nämlich der durch das erste Element von M bestimmte Abschnitt. Jede Menge ist ein Anfangsstück von sich selbst. Ein Abschnitt eines Abschnitts von M ist wiederum ein Abschnitt von M; Entsprechendes gilt für die Anfangsstücke.

Aus Definition 2 folgt unmittelbar sogar für beliebige geordnete Mengen, daß ein Abschnitt immer auch ein Anfangsstück ist. Indes

gilt im allgemeinen keineswegs die Umkehrung. Z. B. ist für die geordnete Menge

$$\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

die Teilmenge aller ungeraden Zahlen zwar ein Anfangsstück, nicht aber ein Abschnitt; denn es gibt hier keine Zahl, der alle ungeraden Zahlen *und nur diese* vorangehen. Ebenso ist für die geordnete Menge aller Punkte der Zahlengeraden z. B. die Teilmenge, die einen beliebigen festen Punkt und alle links davon gelegenen Punkte enthält, kein Abschnitt, wohl aber ein Anfangsstück.

Die hervorzuhebende Eigenschaft der wohlgeordneten Mengen liegt demgegenüber in folgender Tatsache:

Satz 2. *Jedes von M selbst verschiedene Anfangsstück A der wohlgeordneten Menge M ist ein Abschnitt von M, wird also durch ein Element von M bestimmt* (*und umgekehrt*).

Wegen der Natur eines Anfangsstückes müssen nämlich die nicht zu A gehörigen Elemente von M notwendig sämtlichen Elementen von A *nachfolgen*. Daher gibt es nach Satz 1 ein einziges auf sämtliche Elemente des Anfangsstücks A *nächstfolgendes* Element m von M (nämlich das erste Element der zu A „komplementären" Teilmenge von M). Dann ist A der durch m bestimmte Abschnitt von M. Denn jedes Element dieses Abschnitts muß, da es nach der Definition von m nicht sämtlichen Elementen von A nachfolgen kann, entweder selbst ein Element von A sein oder in M einem Element von A vorangehen; es ist aber auch im letzteren Fall ein Element von A, da A ein Anfangsstück von M sein sollte. Daß A keine weiteren (dem durch m bestimmten Abschnitt nicht zugehörigen) Elemente enthalten kann, ist die unmittelbare Folge der Definition von m.

2. Die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen. Bevor wir weitere Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen entwickeln und namentlich an den Begriff des Abschnittes weitreichende Schlußketten anknüpfen, wollen wir sogleich den Vorzug der wohlgeordneten Mengen kennenlernen, der innerhalb der allgemeinen Theorie im Mittelpunkt steht und die überragende Bedeutung der wohlgeordneten Mengen auch für die Theorie der ungeordneten Mengen begründet: den Vorzug der Vergleichbarkeit. Sollten die nächsten Überlegungen dem einen oder anderen Leser als schwierig erscheinen, so beginne er etwa sogleich bei Satz 3 und hole den folgenden Beweis erst gegen Ende des Paragraphen nach[1]!

---

[1] Die wesentlichen Anregungen zu der in dieser Nummer angewandten Methode verdanke ich Herrn PLESSNER. Andersartige Herleitungen der Vergleichbarkeit findet man bei CANTOR [12 II], BAIRE [2], W. H. YOUNG [1], HESSENBERG [3] (S. 58ff.) und (unter Verwendung der Ordnungszahlen) bei HAUSDORFF [3] und [4].

Sind M und N einander ähnliche wohlgeordnete Mengen, so muß offenbar durch eine ähnliche Abbildung zwischen beiden Mengen das erste Element der einen Menge dem ersten der anderen zugeordnet werden (vgl. S. 128 unten). Ebenso leuchtet ein — was im folgenden nicht benutzt und nur zur Erhöhung der Anschaulichkeit angeführt wird —, daß die ins Auge gefaßte ähnliche Abbildung zwischen M und N jedenfalls folgende Eigenschaft besitzt: sind m und n einander zugeordnete Elemente beider Mengen und sind $\overline{M}$ bzw. $\overline{N}$ die durch m bzw. n bestimmten Abschnitte von M bzw. N, so enthält $\overline{N}$ alle diejenigen Elemente von N und nur sie, die vermöge der ähnlichen Abbildung den Elementen des Abschnittes $\overline{M}$ entsprechen. Man kann das auch dahin umkehren, daß n gerade dasjenige Element von N ist, das auf sämtliche den Elementen von $\overline{M}$ zugeordneten Elemente von N unmittelbar nachfolgt.

Ohne den Beweis für diese sehr anschauliche Tatsache anzuführen, wollen wir sie nur als Leitstern für die Angabe einer Zuordnungsregel bei beliebigen (nicht mehr als ähnlich vorausgesetzten) wohlgeordneten Mengen benutzen; einer Regel, die uns unmittelbar die allgemeine Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen liefern wird.

M und N seien also beliebige wohlgeordnete Mengen. Wir ordnen dann soweit als möglich jedem Element m von M durch folgende Doppelregel je ein einziges Element n von N zu, das wir das *Bild von m in N* nennen:

A) dem ersten Element von M werde das erste Element von N zugeordnet;

B) es bedeute m ein beliebiges Element von M, ferner $\overline{M}$ den durch m bestimmten Abschnitt von M, und es sei für sämtliche Elemente des Abschnitts $\overline{M}$ die Zuordnung je eines Bildes in N schon erfolgt; die Menge dieser Bilder heiße $\overline{N}$. Wenn dann überhaupt noch ein Element von N den sämtlichen Elementen der Teilmenge $\overline{N}$ nachfolgt, so werde das ihnen gemäß Satz 1 *nächstfolgende* Element n von N dem Element m von M als Bild zugeordnet.

Man beachte, daß Regel B) auch versagen kann; nicht jedem Element von M ordnet sie notwendig ein Bild in N zu. Dagegen ist gemäß Regel B) die Menge der Elemente von M, denen überhaupt Bilder in N entsprechen, jedenfalls ein *Anfangsstück von M* (hierin ist immer auch M eingeschlossen); denn durch B) wird ja zu m nur dann ein Bild definiert, wenn schon alle vor m stehenden Elemente Bilder besitzen.

Bevor wir die Eigenschaften dieser grundlegenden Zuordnung allgemein untersuchen, wollen wir uns eine grobe Vorstellung von ihr verschaffen, indem wir die ersten Elemente der Menge M ins Auge fassen.

Während das erste Element m_0 von M nach Regel A) das erste Element n_0 von N zum Bild hat, suchen wir das Bild des zweiten Ele-

ments m_1 nach Regel B). Der durch m_1 bestimmte Abschnitt von M ist die Menge $\overline{M} = \{m_0\}$, deren einzigem Element m_0 schon n_0 als Bild entspricht; also ist $\overline{N} = \{n_0\}$. Auf die Elemente von $\overline{N}$ (d. h. auf n_0) folgt in N unmittelbar das zweite Element n_1 von N, das also nach B) als Bild von m_1 zu gelten hat. Ebenso findet man, daß dem dritten Element von M das dritte Element von N als Bild entspricht usw., allgemein dem k-ten das k-te (k beliebige natürliche Zahl), falls nicht M oder N schon nach weniger als k Schritten erschöpft ist. Besitzen beide Mengen unendlichviele Elemente und ist M bzw. N nicht etwa schon erschöpft durch die Teilmenge M_0 bzw. N_0, die das erste, zweite, dritte Element usw. enthält, so folgt nach Satz 1 unmittelbar darauf ein weiteres Element, das mit m_ω bzw. n_ω bezeichnet sei. Um das Bild von m_ω zu suchen, übernehmen wir aus dem Vorstehenden die Tatsache, daß die Bilder aller Elemente des durch m_ω bestimmten Abschnitts $\overline{M} = M_0$ von M gerade sämtliche Elemente der Menge N_0 sind, also $\overline{N} = N_0$ wird; nach B) ist also das auf N_0 nächstfolgende Element n_ω von N_0 das Bild von m_ω.

Nunmehr zu einer scharfen und allgemeinen Zergliederung unserer Doppelregel übergehend, weisen wir für sie zwei grundlegende Eigenschaften nach. Hierbei bezeichnet stets M' ein (sonst beliebiges) Anfangsstück von M, zu dessen sämtlichen Elementen gemäß unserer Regel Bilder in N existieren, und N' die Menge all dieser Bilder; wir nennen M' kurz ein *abbildbares Anfangsstück* und N' die *zugehörige Bildermenge*, die also Teilmenge von N ist.

I. *Sind m und $\overline{m}$ Elemente von M', n und $\overline{n}$ ihre Bilder in N', so folgt aus $m \prec \overline{m}$ (in M) stets $n \prec \overline{n}$ (in N) und umgekehrt. Unsere Regel stellt also eine ähnliche Abbildung zwischen jedem abbildbaren Anfangsstück von M und der zugehörigen Bildermenge her.*

In der Tat folgt nach Regel B) das Bild $\overline{n}$ von $\overline{m}$ all den Elementen aus N nach, die Bilder eines Elements des durch $\overline{m}$ bestimmten Abschnittes von M sind; zu diesen Elementen aus N gehört auch n (als Bild von m), so daß wirklich $n \prec \overline{n}$. Zwei verschiedenen Elementen von M' entsprechen also wiederum zwei verschiedene Elemente von N', d. h. die Zuordnung zwischen M' und N' ist *umkehrbar* eindeutig und ähnlich.

II. *Die zu irgendeinem abbildbaren Anfangsstück M' von M gehörige Bildermenge N' ist ihrerseits ein Anfangsstück von N.*

Den Beweis führen wir in zwei Schritten. Zunächst werde *vorausgesetzt*, daß die nachzuweisende Tatsache schon für jeden *Abschnitt* von M' bekannt sei, daß also die zu jedem solchen Abschnitt gehörige Bildermenge ein Anfangsstück von N darstelle; wir *folgern* daraus die nämliche Tatsache für das ganze Anfangsstück M' selbst. Bei diesem ersten Schritt unterscheiden wir zwei Fälle:

α) Besitzt erstens M' ein *letztes* Element m, so entsteht durch dessen Fortlassung ein Abschnitt M'' von M'. Die Bilder der Elemente von M'' bilden nach der gemachten Voraussetzung ein Anfangsstück N'' von N; nach Regel B) ist dann gerade das auf die Elemente von N'' nächstfolgende Element n das Bild von m. Durch die Aufnahme von n in die Menge N'' entsteht aber wiederum ein Anfangsstück N' von N, das nun die Bilder *aller* Elemente von M' enthält, wie zu zeigen war.

β) Besitzt zweitens M' kein letztes Element, so hat man, wenn n das Bild eines beliebigen Elementes m von M' bezeichnet, sich zum Beweis von II gemäß dem Begriff des Anfangsstücks nur davon zu überzeugen, daß jedes *vor* n in N vorkommende Element ebenfalls Bild eines gewissen Elementes von M' ist. Zu diesem Nachweis werden wir in M' gewissermaßen noch ein Stück über m hinausgehen, nämlich bis zu einem späteren Element $\overline{m}$; wir erreichen so, daß m sich schon in einem (nämlich dem zu $\overline{m}$ gehörigen) *Abschnitt* von M' befindet, und können dann vermöge dieser Vorverlegung die gewünschte Tatsache direkt aus der Voraussetzung entnehmen, die wir im vorletzten Absatz für die Abschnitte von M' gemacht haben.

Die Durchführung dieses Gedankens gestaltet sich folgendermaßen: Da M' kein letztes Element hat, so gibt es in M' jedenfalls noch ein auf m nachfolgendes Element $\overline{m}$; dem durch $\overline{m}$ bestimmten Abschnitt von M', der u. a. das Element m enthält, entspricht aber nach der gemachten Voraussetzung als Bildermenge jedenfalls ein Anfangsstück $\overline{N}$ von N, das u. a. auch das Element n (als Bild von m) enthält. Die Bildermenge $\overline{N}$ enthält schließlich (als Anfangsstück) mit dem Element n gleichzeitig auch jedes diesem vorangehende Element von N, d. h. jedes derartige Element ist gleichfalls Bild eines Elementes von M', wie behauptet.

Als zweiter und letzter Schritt zum Beweis von II ist also nur noch zu zeigen, daß wirklich die Bilder der Elemente jedes *Abschnitts* von M' ein Anfangsstück von N ausmachen; dann ist ja nach dem Bewiesenen auch die Menge N' der Bilder *aller* Elemente von M' ein Anfangsstück von N. Enthielte M' nun überhaupt Elemente m, so daß dem durch m bestimmten Abschnitt von M' eine Bildermenge gegenüberstände, die nicht Anfangsstück von N wäre, so sei $m = m_0$ das *erste* derartige Element der wohlgeordneten Menge M' (oder M) und M_0' der durch m_0 bestimmte Abschnitt von M'. Da dann allen Abschnitten von M_0' als Bildermengen nach Annahme lauter Anfangsstücke von N entsprechen, so ist für $M' = M_0'$ wiederum die Voraussetzung erfüllt, von der oben (im letzten Absatz der vorigen Seite) die Rede war; also müßte nach dem im ersten Schritt Bewiesenen auch der Menge M_0' als Bildermenge ein Anfangsstück von N zugehören, womit die Existenz eines Elements $m = m_0$ der bezeichneten Art widerlegt und somit II vollends bewiesen ist.

Auf Grund der Hilfssätze I und II gelangen wir nun unmittelbar zur Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen. Wir verstehen nämlich wiederum unter M und N zwei ganz beliebige wohlgeordnete Mengen. Dann sei vor allem in Erinnerung gebracht, daß die Menge M' *aller* überhaupt abbildbaren Elemente von M ein Anfangsstück von M — also ein „abbildbares Anfangsstück" — darstellt (vgl. die an Regel B) angeschlossene Bemerkung); nach II ist daher auch die Menge N' *aller Bilder* ein Anfangsstück von N. *Ferner sind die wohlgeordneten Mengen M' und N' nach I einander ähnlich.*

Es sind nun zwei Fälle möglich: *Entweder* fällt das Anfangsstück M' mit der ganzen Menge M zusammen ($M' = M$), die somit auf ein Anfangsstück N' von N ähnlich abgebildet wird. Dann lassen sich noch die beiden Unterfälle unterscheiden, daß erstens auch N' mit der ganzen Menge N zusammenfallen kann ($N' = N$), so daß M und N selbst einander ähnlich sind, oder zweitens N' verschieden von N und somit als Anfangsstück von N auch ein Abschnitt von N ist (nach Satz 2); dann ist $M \simeq N'$, d. h. M einem Abschnitt von N ähnlich. In diesem zweiten Unterfall erweist sich bei der geschilderten Zuordnung also N als die umfassendere Menge; nach Durchlaufung aller Originalelemente von M bleiben noch Elemente in N übrig, die nicht mehr als Bilder brauchbar sind, die vielmehr den sämtlichen (in N' vereinigten) Bildern aller Elemente von M nachfolgen. *Oder* aber (zweiter Hauptfall) das Anfangsstück M' ist von M verschieden, also nach Satz 2 ein Abschnitt von M. Dann ist aber unter allen Umständen die zugehörige Bildermenge N' identisch mit der ganzen Menge N, also N einem Abschnitt M' von M ähnlich. Denn wäre N' nur ein Abschnitt von N, so hätte nach B) das den Abschnitt N' von N bestimmende Element n aus N als das Bild des den Abschnitt M' von M bestimmenden Elementes m aus M zu gelten, d. h. die Mengen M' bzw. N' wären (mindestens) um die ihnen nicht angehörigen Elemente m bzw. n zu vergrößern, entgegen der zu Beginn des vorigen Absatzes gemachten Annahme über M' und N'. Unter Koordinierung der beiden Unterfälle des ersten Hauptfalls mit dem zweiten Hauptfall können wir alle drei Möglichkeiten übersichtlich in dem folgenden Schema unterbringen:

	$N' = N$	N' Abschnitt von N
$M' = M$	$M \simeq N$	M ähnlich einem Abschnitt von N
M' Abschnitt von M	N ähnlich einem Abschnitt von M	

Der rein gedanklich noch in Betracht kommende vierte Fall, daß M' von M *und* N' von N verschieden wären, ist nach dem Gesagten auf Grund unserer Zuordnungsregel ausgeschlossen. Wir erhalten demnach:

Satz 3. (Hauptsatz 1 der Theorie der wohlgeordneten Mengen.) *Zwei wohlgeordnete Mengen sind entweder einander ähnlich oder eine von ihnen ist einem Abschnitt der andern ähnlich.*

Um die Bedeutung dieses Satzes recht zu würdigen, müssen wir ihn namentlich im Lichte eines Problems betrachten, das mit Ordnung und wohlgeordneten Mengen überhaupt nichts zu tun hat, das uns vielmehr in der Theorie der Äquivalenz und der Kardinalzahlen (§ 6) beschäftigte und damals einer befriedigenden Lösung nicht zugeführt werden konnte. Bei der Vergleichung von Mengen hinsichtlich ihrer Kardinalzahlen stellten wir (S. 71) ein analoges Schema möglicher Fälle auf Grund logischer Disjunktion auf wie auf der vorigen Seite. Auch damals ließen sich die drei ersten Fälle vollständig erledigen, und zwar der erste (dem jetzigen Fall $M \simeq N$ entsprechende) Fall im Sinn der Äquivalenz der beiden Mengen M und N. Dagegen blieb der vierte Fall offen und ungeklärt, der Fall nämlich, daß M keiner Teilmenge von N und N keiner Teilmenge von M äquivalent sein sollte; dieser Fall würde die *Unvergleichbarkeit* der beiden Mengen hinsichtlich ihrer Kardinalzahlen bedeuten und somit zwei verschiedene Kardinalzahlen auftreten lassen, von denen keine kleiner wäre als die andere.

Wenigstens für wohlgeordnete Mengen scheidet nun glücklicherweise jene vierte Möglichkeit auf Grund des Satzes 3 ganz aus (während wir die Frage für beliebige Mengen im nächsten Paragraphen nochmals aufnehmen).

Es seien nämlich M und N zwei beliebige wohlgeordnete Mengen. Sind M und N ähnlich, so sind sie (vgl. S. 127) um so mehr äquivalent, ihre Kardinalzahlen also gleich. Im anderen Fall ist nach Satz 3 die eine der beiden Mengen (etwa M) einem Abschnitt der anderen (N) ähnlich. Daß M einem Abschnitt von N ähnlich ist, besagt im besonderen, daß M einer Teilmenge von N äquivalent ist; von den vier auf S. 71 aufgezählten Möglichkeiten kommen also in diesem Fall nur die erste und die dritte in Betracht, d. h. die Kardinalzahl von M ist entweder gleich derjenigen von N oder kleiner als sie (wie dies auch aus Satz 5 auf S. 76 folgt). Wir erhalten so den

Satz 4. (Hauptsatz 2 der Theorie der wohlgeordneten Mengen.) *Wohlgeordnete Mengen sind in bezug auf ihre Kardinalzahlen stets vergleichbar: die Kardinalzahlen zweier wohlgeordneter Mengen sind entweder gleich oder eine von ihnen ist kleiner als die andere. Sind nämlich M und N wohlgeordnete Mengen und ist M einem Abschnitt von N ähnlich, so ist die Kardinalzahl von M gleich oder kleiner als die Kardinalzahl von N.*

3. Addition und Multiplikation. Ordnungszahlen. Nach Feststellung der in Satz 3 ausgedrückten wichtigsten Eigenschaft der wohlgeordneten Mengen wollen wir jetzt diese Mengen (und ihre Ordnungstypen)

auch in anderen Hinsichten, sozusagen auf ihre Einzelzüge, näher untersuchen, ohne dabei übrigens Satz 3 zu benutzen, den wir erst im nächsten Paragraphen heranziehen. Wir beginnen beim *Rechnen* mit wohlgeordneten Mengen.

Zu Ende des § 9 (Definition 3 auf S. 137) haben wir eine Methode kennengelernt, um aus einer geordneten Menge M, deren Elemente selbst lauter geordnete und paarweise elementefremde Mengen A, B, C usw. sind, durch eine naturgemäße Ordnung der Vereinigungsmenge eine „geordnete Summe" der Mengen A, B, C usw. zu bilden. Die Vermutung liegt nahe und soll jetzt bewiesen werden, daß diese geordnete Summe S von selbst *wohlgeordnet* ist, falls das nämliche nicht nur von den einzelnen Summanden A, B, C usw., sondern auch von der geordneten Menge M gilt, die jene Summanden als Elemente umfaßt. Der einfachste Spezialfall hiervon, an dem sich der Leser den nachstehenden Beweis zunächst einmal verdeutliche, liegt vor, wenn die Menge M nur zwei Elemente A und B (oder allgemeiner nur endlichviele Elemente) enthält.

Um zu zeigen, daß die geordnete Summe S wohlgeordnet ist, hat man nach Definition 1 nachzuweisen, daß in jeder beliebigen Teilmenge S_0 von S ein erstes Element vorkommt. Es werde nochmals daran erinnert, daß für die Anordnung zweier Elemente a und b von M, die zu verschiedenen Summanden, etwa zu A und B, als Elemente gehören, die Reihenfolge von A und B in der Menge M maßgebend sein sollte (S. 137). In der beliebigen Teilmenge S_0 von S können nun Elemente aus verschiedenen, wenn auch nicht notwendig aus allen Summanden A, B, C usw. vorkommen; die Menge derjenigen Summanden, die überhaupt einen Beitrag von Elementen zu S_0 liefern, ist jedenfalls eine Teilmenge der wohlgeordneten Menge M *aller* Summanden und enthält daher ein erstes Element, das E heiße. In S_0 tritt also mindestens ein Element von E auf, aber kein Element aus einem der Summanden, die in M vor E stehen. Ebenso muß es unter den in S_0 vorkommenden Elementen von E wiederum ein erstes e_0 geben, weil diese Elemente eine Teilmenge der wohlgeordneten Menge E ausmachen. Dann ist aber, wie aus der Anordnungsregel für die Summe S hervorgeht, e_0 das erste Element der Teilmenge S_0 von S. S ist hiermit als wohlgeordnet erwiesen, d. h. es gilt:

Satz 5. *Ist M eine wohlgeordnete Menge von paarweise elementefremden wohlgeordneten Mengen und wird deren Vereinigungsmenge im Sinne der Definition 3 von S. 137 geordnet, so ist diese geordnete Summe von selbst wohlgeordnet. Insbesondere ist also die geordnete Summe von zwei oder endlichvielen wohlgeordneten Mengen stets eine wohlgeordnete Menge.*

Um die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen gegenüber anderen Ordnungstypen hervorzuheben, bezeichnet man sie als Ordinalzahlen oder Ordnungszahlen, im besonderen die Ordnungstypen *unendlicher* wohlgeordneter Mengen als unendliche oder transfinite Ordnungszahlen. Jede wohlgeordnete Menge M besitzt also eine eindeutig bestimmte Ordnungszahl μ, die gleichzeitig die Ordnungszahl jeder zu M ähnlichen Menge ist, während die Ordnungszahl jeder

zu M nicht ähnlichen Menge von μ verschieden ist. Wie die anderen Ordnungstypen werden auch die Ordnungszahlen in der Regel durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet. Die Ordnungszahlen stellen eine naturgemäße Verallgemeinerung der endlichen Zahlen in Rücksicht auf den *Zählprozeß* dar, mit den Eigenschaften, wie sie auf S. 166 als wünschenswert verlangt worden sind. Wir sprechen vorläufig von Ordnungszahlen nur in unmittelbarer Beziehung zu den Mengen, deren Ordnungstypen sie sind; die eingehende Behandlung der Ordnungszahlen an und für sich bleibt dem nächsten Paragraphen vorbehalten.

Bei einer *endlichen*[1] Menge entsprechen Kardinalzahl, Ordnungstypus und Ordnungszahl einander umkehrbar eindeutig; sie werden daher einheitlich, nämlich durch die natürlichen Zahlen, bezeichnet. In der Tat können ja die Elemente einer endlichen Menge ohne weiteres angeordnet, die Menge also in eine geordnete Menge verwandelt werden; und wie immer diese Ordnung vorgenommen wird, stets entsteht eine Menge vom nämlichen Ordnungstypus, der daher durch die Kardinalzahl (d. i. in diesem Fall die Anzahl der Elemente der Menge im gewöhnlichen Sinn) bezeichnet werden kann (S. 123). Da weiter jede geordnete endliche Menge wohlgeordnet ist, so ist der Ordnungstypus gleichzeitig eine (endliche) Ordnungszahl. (Daß natürlich dennoch Kardinalzahl und Ordnungszahl auch bei endlichen Mengen *begrifflich* verschieden sind, braucht wohl kaum betont zu werden; die Aussage „die Menge $\{1, 2, 3\}$ enthält drei Elemente" ist sicher begrifflich verschieden von der Aussage „die Menge enthält ein erstes, ein zweites und ein drittes Element".)

Ganz anders ist die Sachlage bei *unendlichen* Mengen. Da es für die Äquivalenzeigenschaften einer Menge auf eine etwaige Anordnung ihrer Elemente nicht ankommt und jede Menge sich selbst äquivalent ist, gehört zu jeder (unendlichen oder endlichen) Menge eine einzige Kardinalzahl. Die Elemente jeder unendlichen Menge lassen sich aber, wenn überhaupt (S. 195 und 319 f.), dann auf mannigfache Weise anordnen, d. h. man kann aus der nämlichen Menge eine Fülle verschiedener geordneter Mengen bilden; im allgemeinen werden verschiedene dieser aus der nämlichen Menge hervorgehenden geordneten Mengen auch verschiedene Ordnungstypen besitzen. Endlich kann es sein — das ist sogar, wie sich zeigen wird (S. 195), *stets* der Fall —, daß sich unter diesen geordneten Mengen auch wohlgeordnete befinden; deren Ordnungstypen sind dann gleichzeitig Ordnungszahlen. Ist z. B. die Menge aller natürlichen Zahlen gegeben, so ist $\mathfrak{a}$ ihre Kardinalzahl. Von den verschiedenen *geordneten* Mengen, die sich aus dieser Menge bilden lassen, seien hier nur einige wenige angegeben:

---

[1] Man verstehe „endlich" vorläufig etwa im naiven Sinn (S. 22). Über die Verhältnisse bei anderer Deutung vgl. S. 182 und 321.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{\ldots, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, $\{1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots\}$, $\{\ldots, 6, 4, 2 \ldots, 5, 3, 1\}$, $\{1, 3, 5, \ldots\ldots, 6, 4, 2\}$, $\{\ldots, 5, 3, 1, 2, 4, 6, \ldots\}$,

$$\{1, 5, 9, \ldots 2, 6, 10, \ldots 3, 7, 11, \ldots 4, 8, 12, \ldots\};$$

endlich die (aus dem quadratischen Anordnungsschema der natürlichen Zahlen in Beispiel 1 auf S. 138 hervorgehende) geordnete Menge:

$$\{1, 2, 4, 7, \ldots; 3, 5, 8, 12, \ldots; 6, 9, 13, 18, \ldots; 10, 14, 19, 25, \ldots; \ldots\}.$$

Die Ordnungstypen dieser acht geordneten Mengen sind der Reihe nach (vgl. S. 135ff.):

$$\omega, \ {}^*\omega, \ \omega\cdot 2, \ {}^*\omega\cdot 2, \ \omega + {}^*\omega, \ {}^*\omega + \omega, \ \omega\cdot 4, \ \omega\cdot\omega.$$

Unter den acht geordneten Mengen sind endlich die erste, dritte, siebente und achte wohlgeordnet, d. h. die Ordnungstypen ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 4$, $\omega \cdot \omega$ sind unendliche Ordnungszahlen, die übrigen dagegen nicht; z. B. ist die fünfte der angeschriebenen Mengen nicht wohlgeordnet, weil in ihr die Teilmenge der geraden Zahlen kein erstes Element besitzt (im Gegensatz zur entsprechenden Teilmenge der dritten Menge).

Die hier und im folgenden angewandte Addition und Multiplikation der Ordnungszahlen bedarf keiner besonderen Erklärung, da diese Operationen in dem (in § 9, S. 134ff. definierten) Rechnen mit Ordnungstypen von selbst mit enthalten sind. Für dieses Rechnen ziehen wir aus Satz 5 (durch Übergang von den wohlgeordneten Mengen zu ihren Ordnungszahlen) die Folgerung:

Satz 6. *Eine Summe von Ordnungszahlen ist, falls die Summanden in wohlgeordneter Anordnung auftreten, wiederum eine Ordnungszahl. Daher stellt namentlich jede Summe von endlichvielen Ordnungszahlen und jedes Produkt zweier (oder endlichvieler) Ordnungszahlen eine Ordnungszahl dar.*

Die letzte Aussage des Satzes 6 erhält man, wenn man entsprechend wie auf S. 139 eine Summe von lauter *gleichen* (in wohlgeordneter Folge auftretenden) Ordnungszahlen ins Auge faßt. Bezeichnet man weiter, unter μ eine beliebige Ordnungszahl verstehend, die Ordnungszahl $\mu \cdot \mu$ mit μ^2, dann $\mu^2 \cdot \mu$ mit μ^3 usw., allgemein $\mu^n \cdot \mu$ mit μ^{n+1}, so steht man beim einfachsten Fall der Potenzierung von Ordnungszahlen, nämlich dem, wo der Exponent eine *endliche* Ordnungszahl ist; von der Ausdehnung auf den Fall gewisser unendlicher Exponenten wird auf S. 189f. die Rede sein.

Daß die Addition und die Multiplikation von Ordnungszahlen (wie von Ordnungstypen überhaupt) nicht kommutativ ist, das Resultat vielmehr im allgemeinen von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren abhängt, wurde schon in § 9 (S. 135 und 139f.) an Beispielen illustriert, die der Leser nochmals nachschlage. Im übrigen sei für die Arithmetik im Bereich der transfiniten Ordnungszahlen

namentlich auf JACOBSTHAL [1] und [2] verwiesen, wo statt der Herleitung von den Mengen vielmehr formale Gesichtspunkte für die Einführung maßgebend sind, unter Voranstellung der transfiniten Induktion (S. 191 f.) als methodisches Werkzeug.

4. Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen und ihrer Abschnitte. Eine unmittelbare Folge der Definition des Abschnittes ist:

Satz 7. *Zwei Abschnitte der nämlichen wohlgeordneten Menge sind entweder miteinander identisch oder einer von ihnen ist ein Abschnitt des anderen.*

In der Tat: ist die Menge M wohlgeordnet und wird der durch das Element a aus M bestimmte Abschnitt von M mit A, der durch das Element b aus M bestimmte Abschnitt mit B bezeichnet, so ist entweder a mit b identisch oder in der Anordnung der Elemente von M steht a vor b oder b vor a. Im ersten Fall sind die Abschnitte A und B identisch; im zweiten gehört a und um so mehr jedes a vorangehende Element aus M dem Abschnitt B an, d. h. A ist ein Abschnitt von B; im dritten Fall ist ebenso B ein Abschnitt von A.

Satz 7 kann als ein ganz elementarer Spezialfall des Satzes 3 aufgefaßt werden. Er drückt für den besonderen Fall, daß zwei wohlgeordnete Mengen A und B als Abschnitte einer und derselben Menge darstellbar sind und somit jedenfalls „im Anfang" die nämlichen Elemente aufweisen, die Tatsache der Vergleichbarkeit von A und B aus, welche von Satz 3 ganz allgemein behauptet wird. Man kann denn auch zum Beweise des Satzes 3 zunächst von Satz 7 ausgehen.

Wie wir sahen, ist ω eine unendliche Ordnungszahl. Darüber hinaus erkennen wir aber sofort, daß *jede unendliche wohlgeordnete Menge abgezählte Teilmengen, d. h. solche von der Ordnungszahl ω besitzt.* Denn ist z. B. m_0 das erste Element der wohlgeordneten Menge M, so enthält M nach Satz 1 auf S. 167 ein einziges auf m_0 unmittelbar folgendes Element m_1, ebenso ein auf m_1 folgendes m_2, ein nächstes m_3 usw.; dieses Verfahren, bei dem zu jedem Element sein Nachfolger herausgegriffen wird, kann ohne Ende fortgesetzt werden, da M unendlich sein sollte (vgl. das — nicht so gesetzmäßig festgelegte — Verfahren von S. 26 oben). Die Menge der so herausgegriffenen Elemente $\{m_0, m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ ist aber eine Teilmenge von M und besitzt die Ordnungszahl ω, womit unsere Behauptung als richtig erwiesen ist. Wir können sie nun schärfer so ausdrücken:

Satz 8. *Jede unendliche wohlgeordnete Menge M läßt sich — und zwar offenbar nur auf eine einzige Art — als geordnete Summe in der Form $M = M_0 + M_1$ schreiben, worin das Anfangsstück M_0 abgezählt, d. h. vom Ordnungstypus ω ist (und die wohlgeordnete Menge M_1 evtl. auch die Nullmenge sein kann).*

M sei eine unendliche wohlgeordnete Menge und $M = M_0 + M_1$ ihre Darstellung gemäß Satz 8, so daß sämtliche Elemente von M_1

denen von M_0 nachfolgen. Nun läßt sich die wohlgeordnete Menge M_0 auf eine eigentliche Teilmenge M_0' ähnlich abbilden durch die Vorschrift, daß jedem Element von M_0 das ihm nachfolgende zugeordnet werden soll; M_0' enthält dann alle Elemente von M_0 mit Ausnahme des ersten m_0, das gleichzeitig auch das erste Element der ursprünglichen Menge M ist. Ordnet man noch jedes Element von M_1 sich selber zu und bezeichnet $M_0' + M_1$ mit M', so erhält man (vgl. S. 26) eine ähnliche Abbildung der beliebigen unendlichen wohlgeordneten Menge M auf die eigentliche Teilmenge M' von M, wobei gewisse (sogar unendlichviele) Elemente von M je ihrem *Nachfolger* entsprechen. Solche Abbildungen sind also für unendliche wohlgeordnete Mengen stets möglich. Ist z. B. M die wohlgeordnete Menge $\{1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots\}$, so wird $M_0 = \{1, 3, 5, \ldots\}$, $M_1 = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $M_0' = \{3, 5, 7, \ldots\}$ und $M' = \{3, 5, 7, \ldots 2, 4, 6, \ldots\}$; die betreffende ähnliche Abbildung zwischen M und M' läßt sich dann folgendermaßen andeuten:

$$\begin{array}{llllllll} M: & 1 & 3 & 5 \ldots & 2 & 4 & 6 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ M': & 3 & 5 & 7 \ldots & 2 & 4 & 6 & \ldots \end{array}$$

Demgegenüber gilt der folgende von Zermelo stammende Satz, der für die wohlgeordneten Mengen charakteristisch ist (vgl. Hessenberg [3], S. V):

Satz 9. *Niemals kann bei irgendeiner ähnlichen Abbildung einer wohlgeordneten Menge M auf eine Teilmenge N ($N = M$ selbst nicht ausgeschlossen) der Fall vorkommen, daß ein Element m von M einem Element n von N zugeordnet ist, das ihm in der Menge M vorangeht.* Oder positiv: *Das Bildelement n in der Teilmenge folgt dem Originalelement der ursprünglichen Menge in dieser stets nach, sofern nicht beide Elemente identisch sind.*

Gibt es nämlich zu einer beliebig gegebenen Abbildung Elemente m in M, deren Bild n vor m in M steht, so bilden diese Elemente m eine von 0 verschiedene Teilmenge, in der es wegen der Grundeigenschaft der wohlgeordneten Mengen ein erstes Element geben muß. Es sei also a das *erste* Element von M, dem ein ihm vorangehendes b zugeordnet ist; b gehört sowohl zu N wie zu M. Entspricht dann weiter dem Element b von M das (in N wie auch in M enthaltene) Element c, so wird, wenn die Abbildung zwischen M und N ähnlich sein soll, die in M geltende Beziehung $b \prec a$ die Beziehung $c \prec b$ in N nach sich ziehen; daher gilt $c \prec b$ auch in M. Es wird also b durch die Abbildung dem ihm in M vorangehenden Element c von N zugeordnet. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung, wonach das (auf b nachfolgende) Element a von M das *erste* Element mit dieser Eigenschaft sein sollte. Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß bei unserer Ausgangsannahme die gegebene Abbildung keinesfalls ähnlich sein kann.

Man beachte, wie wesentlich sich dieser Beweis darauf stützt, daß jede wie immer geartete Teilmenge von M ein *erstes* Element aufweist!

Wir haben hier wie auch schon beim Beweis des Satzes 3 — nämlich beim zweiten Schritt zum Nachweis des Hilfssatzes II, siehe S. 172 — eine charakteristische (im Kern indirekte) Beweismethode der Theorie der wohlgeordneten Mengen vor uns. Sie besteht darin, daß zwecks Nachweises der Unmöglichkeit einer gewissen Eigenschaft für die Elemente einer wohlgeordneten Menge zunächst angenommen wird, es gebe Elemente von der fraglichen Eigenschaft; dann muß nach Definition 1 in der Teilmenge aller derartigen Elemente ein *erstes* existieren, d. h. ein erstes Element von der fraglichen Eigenschaft; für dieses *besondere* Element ist meist die Unmöglichkeit der Eigenschaft leicht nachzuweisen auf Grund der Tatsache, daß alle vorangehenden Elemente sie *nicht* besitzen. Dann kann die Menge also überhaupt kein Element von der fraglichen Eigenschaft enthalten. Der Nachdruck des ganzen Verfahrens liegt bei der — auf Grund der Wohlordnung möglichen — Auswahl eines besonderen Elementes unter allen etwa möglichen von der betreffenden Eigenschaft.

Satz 9 zeigt gleich vielen Sätzen über wohlgeordnete Mengen ein ausgesprochen *unsymmetrisches* Gepräge, insofern als aus dem ihm vorangestellten Beispiel hervorgeht, daß der umgekehrte Fall bei wohlgeordneten Mengen sehr wohl auftreten kann (bei unendlichen sogar immer auftritt). Diese Unsymmetrie ist notwendig; sie liegt an der Unsymmetrie des *Begriffs* der wohlgeordneten Menge, deren Teilmengen je ein *erstes* (nicht etwa auch ein letztes) Element aufweisen müssen.

Mittels des Satzes 9 kann man viele weitere Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen elementar herleiten, ohne die tieferliegende Vergleichbarkeit (Satz 3) zu benutzen; einige unter ihnen heben wir in den folgenden Sätzen hervor.

Satz 10. *Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.*

Es sei nämlich A ein beliebiger Abschnitt der wohlgeordneten Menge M und a das Element von M, durch das der Abschnitt A (im Sinn der Definition 2) bestimmt ist und das daher allen Elementen des Abschnittes nachfolgt. Dann können M und A nicht ähnlich sein; denn durch eine ähnliche Abbildung zwischen beiden wohlgeordneten Mengen würde das Element a von M jedenfalls einem Element von A, d. h. einem ihm in M vorangehenden Element zugeordnet, was nach Satz 9 unmöglich ist.

Satz 11. *Eine wohlgeordnete Menge kann nur auf eine einzige Weise auf sich selbst oder auf eine ähnliche Menge ähnlich abgebildet werden.*

Bei einer ähnlichen Abbildung der wohlgeordneten Menge M auf sich selbst muß nämlich entweder jedes Element sich selbst zugeordnet sein oder es muß Elemente geben, die vorangehenden Elementen entsprechen; der letztere Fall würde dem Satze 9 widersprechen und ist daher ausgeschlossen, es gibt also nur die erstgenannte, die

„identische“ Abbildung. Daher kann eine wohlgeordnete Menge M auch nicht auf zwei verschiedene Arten auf eine *andere* Menge N ähnlich abgebildet werden; denn durch Kombination der beiden Abbildungen (Zuordnung je zweier dem nämlichen Element von N entsprechender Elemente von M zueinander) könnte man eine ähnliche Abbildung von M auf sich selbst herstellen, bei der *nicht jedes* Element von M sich selbst entspricht.

Die Eigenschaft des Satzes 11 ist aber nicht etwa *charakteristisch* für die wohlgeordneten Mengen; z. B. kann man auch die geordnete Menge

$$\{-1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \cdots 0 \cdots, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

nur mittels der identischen Abbildung ähnlich auf sich selbst abbilden. Vgl. auch Aufgabe 6 auf S. 184.

5. Über die endlichen Mengen und die natürlichen Zahlen. Zum Abschluß dieses Überblicks über die wichtigsten Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen sei bemerkt, daß vom Boden dieser Theorie aus auch ein Weg zur Begründung der Theorie der endlichen Mengen und der gewöhnlichen endlichen (natürlichen) Zahlen führt.

In folgerichtiger Weise bezeichnet man nämlich als *doppelt wohlgeordnet* eine geordnete Menge, deren Teilmengen sämtlich sowohl ein *erstes* wie ein *letztes* Element besitzen[1]. Diese Definition beseitigt die Unsymmetrie, die auf Grund der Definition 1 von S. 167 die ganze Theorie der wohlgeordneten Mengen durchzieht (vgl. besonders Satz 9), und es erscheint im ersten Augenblick verlockend, den Teil der Mengenlehre näher zu studieren, der die doppelt wohlgeordneten Mengen behandelt. Indes kann man zeigen, daß nicht nur jede endliche Menge zu einer doppelt wohlgeordneten Menge angeordnet werden kann (vgl. S. 128), sondern daß auch umgekehrt jede doppelt wohlgeordnete Menge endlich ist. Die Theorie der doppelt wohlgeordneten Mengen beschränkt sich also auf die Lehre vom Endlichen; aus ihr läßt sich die Arithmetik der natürlichen Zahlen ohne besondere Schwierigkeit ableiten, so namentlich der Satz von der umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen endlichen Kardinalzahlen und endlichen Ordnungszahlen (vgl. S. 123) und der (z. B. auf S. 152f. benutzte) Satz von der vollständigen Induktion, wonach eine Menge, die die kleinste endliche Zahl (1 bzw. 0) enthält und der gleichzeitig mit irgendeiner Zahl stets auch die nächstgrößere angehört, *alle* endlichen Zahlen umfaßt[2].

---

[1] Fordert man für jede Teilmenge nur die eine *oder* die andere Eigenschaft, d. h. betrachtet man die Mengen, von denen jede Teilmenge ein erstes oder ein letztes Element besitzt, so erhält man eine (nur geringfügige) Verallgemeinerung der wohlgeordneten Mengen; vgl. STECKEL [1].

[2] Wegen des Verhältnisses dieses „Satzes“ zum Begriff der natürlichen Zahl selbst, besonders in der axiomatischen Prägung durch PEANO und PIERI, vergleiche man PADOA [4].

Auf das hiermit angeschnittene Problem der *Begründung der Theorie der natürlichen Zahlen und endlichen Mengen unter dem Gesichtswinkel der allgemeinen Mengenlehre* gehen wir hier nicht näher ein (vgl. auch S. 320ff.); der sich hierfür interessierende Leser werde auf GRELLING [1] und ZERMELO [4] sowie auf die zusammenfassenden Darstellungen bei TARSKI [4] und FRAENKEL [10] (S. 141—147 und 159—161) verwiesen, wo weitere Literatur angeführt ist. Nur einige Bemerkungen allgemeiner Art mögen hier noch Platz finden. Die anschauliche und scheinbar einer Zergliederung nicht mehr bedürftige („induktive") Vorstellung von der Endlichkeit einer Menge geht auf den Begriff der natürlichen Zahl (vollständige Induktion) zurück (vgl. S. 22). Will man also die Lehre von den endlichen Mengen aus der allgemeinen Mengenlehre herleiten, so kann dies nur dann einen Sinn versprechen, wenn die Mengenlehre ihrerseits unabhängig von den natürlichen Zahlen begründet wird; das ist bei der bisherigen Entwicklung in diesem Buche, die sich im wesentlichen an CANTOR anschloß, jedenfalls nicht der Fall. Übrigens braucht man für den vorliegenden Zweck nicht die Mengenlehre als Ganzes heranzuziehen; es genügt die einfachsten Grundbegriffe (Menge, Teilmenge, evtl. Ordnung usw.) zu benutzen und auf sie dann eine Definition zu gründen, wonach eine Menge endlich heißen soll, wenn sie sich „doppelt wohlordnen" läßt. Diesen Gedanken findet man in ganz elementarer Weise z. B. im ersten Abschnitt des Lehrbuchs WEBER-EPSTEIN [1] durchgeführt (vgl. auch noch ENRIQUES [3]); wesentlich ist dabei die anschaulich unmittelbar einleuchtende Tatsache, daß *jede Ordnung* einer endlichen Menge von selbst eine *Wohlordnung* ist (vgl. S. 128 und 166).

Indes ist die doppelt wohlgeordnete Menge nicht der einzig mögliche Ausgangspunkt für eine derartige Theorie der endlichen Mengen und Zahlen. Man kann auf mannigfache Weise eine andere Definition der Endlichkeit zugrunde legen und von ihr aus eine entsprechend andere Theorie der endlichen Mengen entwickeln, wobei sich schließlich natürlich immer die nämlichen Ergebnisse zeigen müssen. Je nach den Gesichtspunkten, unter denen man die Einfachheit einer solchen Theorie beurteilt — Anschaulichkeit der Definition, elementarer Charakter der in die Definition eingehenden Begriffe, Einfachheit der Beweise usw. —, wird man der einen oder anderen Definition den Vorzug geben. Es ist bemerkenswert, daß die nächst der induktiven Kennzeichnung der endlichen Mengen älteste und am meisten verbreitete Definition, nämlich die (erste) DEDEKINDsche (S. 24), den meisten neueren Definitionen an Einfachheit in einem objektiven und geradezu ausschlaggebenden Sinne unterlegen ist (vgl. S. 298 und 320f.), was vor allem an ihrem negativen Charakter liegt. Es gibt übrigens trotz der elementaren Natur des Begriffs „endliche Menge" auf diesem Gebiete eine Reihe noch ungelöster Probleme (vgl. FRAENKEL [10] a. a. O.), namentlich solche, die mit dem „Auswahlprinzip" (S. 283) zusammenhängen.

Wenn man die elementare Theorie der endlichen Mengen nicht bloß für sich allein entwickeln und zum Aufbau der Arithmetik benutzen will, sondern sie als ein Teilgebiet der allgemeinen Mengenlehre aufzufassen und systematisch in diesen Rahmen hineinzustellen wünscht, so erhebt sich die Frage, ob ein solches Verfahren sachlich gerechtfertigt erscheint oder überhaupt ohne Zirkelschluß möglich ist. In der ersteren Richtung regt sich das (freilich von Geschmacksmomenten abhängige oder psychologisch-didaktisch gefärbte) Bedenken, die einfachen Tatsachen der Arithmetik auf die so viel schwierigeren und abstrakteren der Mengenlehre zu gründen; die Erwägung also, ob man mit Fug und Recht das Reich der allgemeinen Mengen erschließt und kennenlernt, ohne die Unterscheidung zwischen Endlichem und Unendlichem vorauszusetzen oder überhaupt definiert zu haben, und gewissermaßen gegen Ende der Entdeckungsreise diesen Unterschied begrifflich festlegt, um dann in einer bescheidenen Ecke des unabsehbaren Gebietes den endlichen Mengen und den natürlichen Zahlen zu begegnen. Dieser namentlich von POINCARÉ betonte Gesichtspunkt ist schon deshalb nicht maßgebend, weil es ja nicht darum geht, die natürlichen Zahlen auf diese Art erst „einzuführen“ oder zu „begründen“, sondern um ihre systematische Einordnung in einen größeren Zusammenhang. In der zweitgenannten Beziehung fragt es sich, ob nicht überhaupt schon jeder Aufbau der Mengenlehre den Begriff der endlichen Zahl ausdrücklich oder verhüllt voraussetzt. Hierbei ist überdies noch zu unterscheiden, ob man beim Aufbau der Mengenlehre nur die Benutzung der *allgemeinen* Theorie der natürlichen Zahlen zu vermeiden wünscht, oder ob man etwa sogar auch auf die Eigenschaften *spezieller natürlicher Zahlen* (namentlich der kleinsten: 1, 2, 3) zunächst verzichten zu müssen und zu können glaubt und solche Zahlen nach Bedarf unabhängig zu definieren versucht.

In bezug auf diese Fragen ist das letzte Wort noch nicht gesprochen. Die Zweifler, zu denen beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft auch der Verfasser sich rechnet, können sich vor allem auf POINCARÉ berufen (vgl. [5], 2. und 3. Kapitel, sowie die in § 14 genannte intuitionistische Literatur, worunter SKOLEM [3], Nr. 7, hervorgehoben sei). Aber auch die positiven Verfechter einer derartigen Begründung der Zahlenlehre haben ganz gewiß nicht geringere Autoritäten, von DESCARTES bis FREGE und ZERMELO, auf ihrer Seite (vgl. auch S. 321 und 378f. sowie WEYL [7], S. 38). Für die Stellungnahme der Forschung (besonders auch der philosophischen) zu diesen und verwandten Fragen sei verwiesen auf die Ausführungen und Literaturangaben bei BETSCH [1], BRUNSCHVICQ [1], CASSIRER [1], COUTURAT [1] und [2], HESSENBERG [7], MOLLERUP [2], MÜLLER [1], NATORP [1], RUSSELL [5], STAMMLER [1].

Aufgaben. 1. Man zeige, daß eine geordnete Menge dann und nur dann wohlgeordnet ist, wenn bei jeder Darstellung von M als geordneter Summe zweier Summanden $M = M_1 + M_2$ (M_2 verschieden von 0) M_2 ein erstes Element besitzt (m. a. W. wenn jedes von M verschiedene Anfangsstück von M gleichzeitig ein Abschnitt von M ist)!

Man erhält so eine (die Aussage von Satz 2 enthaltende) neue *Definition* der wohlgeordneten Menge, die an die Stelle der Definition 1 gesetzt werden kann.

2. Man zeige ebenso, daß die wohlgeordneten Mengen sich als diejenigen geordneten Mengen definieren lassen, welche keine Teilmengen vom Ordnungstypus $*\omega$ (invers zu ω) besitzen!

3. Sind m und n zwei einander entsprechende Elemente der ähnlichen wohlgeordneten Mengen M und N, so ist der durch m bestimmte Abschnitt von M ähnlich dem durch n bestimmten Abschnitt von N (vgl. S. 170). Man beweise diese sehr einfache Tatsache und mache sich klar, daß man von ihr in naturgemäßer Weise zu der Zuordnungsregel geführt wird, die den Grundgedanken des Beweises von Satz 3 ausmacht!

4. In jeder Menge A von *Abschnitten* einer wohlgeordneten Menge gibt es einen kleinsten Abschnitt, d. h. einen solchen, der Durchschnitt sämtlicher Elemente von A ist. Beweis und Gegenbeispiel für Abschnitte einer *nicht* wohlgeordneten Menge!

5. N sei eine beliebige (nicht notwendig geordnete), M eine wohlgeordnete Menge und es mögen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) N enthält das erste Element von M;

b) wenn N alle irgendeinem Element m von M vorangehenden Elemente von M enthält, so enthält N stets auch m selbst als Element.

Man zeige, daß dann N *alle* Elemente von M enthält, und untersuche die Beweise des laufenden Paragraphen auf Stellen, wo diese grundlegende Tatsache bzw. ihre Herleitung verwendet wird!

6. Man überzeuge sich, daß im Gegensatz zur Tatsache des Satzes 11 z. B. zwischen (gleichen oder verschiedenen) geordneten Mengen vom Ordnungstypus η sogar unendlichviele verschiedene ähnliche Abbildungen möglich sind, und man verdeutliche sich den tieferen Grund dieses Gegensatzes!

7. Man beweise die Sätze 10 und 11 (ohne Benutzung des Satzes 9) mit Hilfe der Bemerkung, daß für jede ähnliche Abbildung zwischen zwei wohlgeordneten Mengen die Zuordnungsregeln A) und B) von S. 170 erfüllt sind!

8. Man versuche, unter Zugrundelegung je einer der drei auf S. 181 f. erwähnten Definitionen der endlichen Menge (induktive Kennzeichnung, Dedekinds Definition, endlich = doppelt wohlgeordnet) jeweils die beiden anderen als beweisbare Sätze abzuleiten!

9. Man mache sich die untereinander sehr verschiedenen Schwierigkeiten klar, die je nach Wahl der einen oder anderen unter jenen drei

Definitionen der Endlichkeit mit dem Beweis des folgenden sehr einfach scheinenden (und im Grund — vgl. S. 108 — der Kombinatorik angehörigen) Satzes verbunden sind: Ist M eine endliche Menge, so ist auch die Potenzmenge $\mathfrak{U}M$, d. h. die Menge aller verschiedenen Teilmengen von M, eine endliche Menge.

§ 12. Ordnungszahlen und Alefs. Die Wohlordnung beliebiger Mengen und ihre Bedeutung.

1. Die Größenanordnung der Ordnungszahlen. Für die Ordnungszahlen, d. h. die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen, ist die *Gleichheit* (wie für die Ordnungstypen überhaupt) dadurch erklärt, daß die Ordnungszahlen ähnlicher Mengen (und nur solcher) als gleich gelten. Wir führen nunmehr auch eine *Größenanordnung* der Ordnungszahlen ein:

Definition 1. Ist die wohlgeordnete Menge M einem Abschnitt der wohlgeordneten Menge N ähnlich, so heißt die Ordnungszahl μ von M kleiner als die Ordnungszahl ν von N, umgekehrt ν größer als μ; in Zeichen: $\mu < \nu$ und gleichbedeutend $\nu > \mu$.[1]

Hiernach ist *eine beliebige Ordnungszahl μ stets kleiner als die Ordnungszahl $\mu + 1$*, oder genauer: *$\mu + 1$ ist die nächstgrößere Ordnungszahl zu μ*; denn eine Menge von der Ordnungszahl $\mu + 1$ besitzt offenbar stets ein letztes Element und der durch dieses bestimmte Abschnitt ist von der Ordnungszahl μ.

Aus Definition 1 gewinnen wir eine Größenanordnung der Ordnungszahlen, ganz wie wir in § 6 eine Anordnung der Kardinalzahlen nach ihrer Größe durchgeführt haben; nur ist die Größenanordnung der Ordnungszahlen, wie wir bald sehen werden, sehr viel durchsichtiger, als die der Kardinalzahlen bisher erschien. Wir haben uns vor allem davon zu überzeugen, daß die gegebene Erklärung der Größenanordnung der Ordnungszahlen die drei (auf S. 125 angeführten) Eigenschaften besitzt, die man von jeder Anordnungsbeziehung vorauszusetzen pflegt.

Sind M und N zwei *ähnliche* wohlgeordnete Mengen, so ist nach Satz 10 des vorigen Paragraphen keinesfalls die eine (etwa N) einem Abschnitt der andern ähnlich; also kann die Ordnungszahl von N, die *gleich* derjenigen von M ist, nicht gleichzeitig *kleiner* sein als letztere (1. Eigenschaft von S. 125). Ist ferner A einem Abschnitt der wohlgeordneten Menge B und B einem Abschnitt der wohlgeordneten Menge C ähnlich, so ist offenbar auch A einem Abschnitt von C ähnlich; auf die Ordnungszahlen übertragen, besagt dies: ist die Ordnungszahl von A kleiner als diejenige von B und diese wiederum kleiner als die von C,

[1] Diese Bezeichnungen und Zeichen für die Größenanordnung der *Ordnungszahlen* sind also dieselben wie die in § 6 für die Größenanordnung der *Kardinalzahlen* eingeführten. Verwechslungen sind hieraus nicht zu befürchten (außer etwa bei *endlichen* Kardinal- und Ordnungszahlen, wo es nichts ausmacht).

so ist auch die Ordnungszahl von A kleiner als diejenige von C (3. Eigenschaft, Transitivität der Anordnung). Die nämliche Überlegung zeigt endlich, wenn wir C mit A zusammenfallen lassen, daß eine Ordnungszahl nicht gleichzeitig kleiner *und* größer als die nämliche andere Ordnungszahl sein kann (2. Eigenschaft, Asymmetrie der Anordnung); denn das würde besagen, daß A einem Abschnitt von B und B einem Abschnitt von A, also A einem Abschnitt von sich selbst ähnlich wäre, entgegen dem erwähnten Satz 10. Die Größenanordnung der Ordnungszahlen nach Definition 1 besitzt also jene drei Eigenschaften.

Vor allem aber ist wie für jede Ordnungsbeziehung (vgl. Definition 1 des § 9, S. 125) auch für unsere Größenanordnung der Ordnungszahlen erforderlich, daß von je zwei verschiedenen Ordnungszahlen *stets* eine die kleinere sei; dies ist gerade das Ziel, das wir im entsprechenden Falle der Größenanordnung der *Kardinalzahlen* vergebens anstrebten (S. 71 und 76). Im vorliegenden Fall ist das Ziel bereits erreicht durch Satz 3 des vorigen Paragraphen, wonach von zwei wohlgeordneten Mengen, die einander nicht ähnlich sind, éine einem Abschnitt der anderen ähnlich ist, also jene eine kleinere Ordnungszahl besitzt als diese. Es wird damit klar, weshalb jener Satz 3 auch als der „Satz von der Vergleichbarkeit" bezeichnet wird; er drückt die *ausnahmslose Vergleichbarkeit je zweier Ordnungszahlen* aus (die durch Satz 7 des vorigen Paragraphen nur unter der Bedingung gesichert wäre, daß die beiden zu vergleichenden Ordnungszahlen kleiner sind als eine und dieselbe dritte Ordnungszahl). Satz 3 des vorigen Paragraphen läßt sich nunmehr so ausdrücken:

Satz 1. *Zwei verschiedene Ordnungszahlen sind stets vergleichbar, d. h. eine von ihnen ist kleiner als die andere.*

Der Leser überzeugt sich leicht, daß die aus Definition 1 folgende Anordnung der *endlichen* Ordnungszahlen mit der gewöhnlichen Größenanordnung der natürlichen Zahlen (und also auch derjenigen der endlichen Kardinalzahlen) übereinstimmt. Z. B. besitzt der Abschnitt $\{1\}$ der wohlgeordneten Menge $\{1, 2\}$ die Ordnungszahl 1, der Abschnitt $\{1, 2\}$ der Menge $\{1, 2, 3\}$ die Ordnungszahl 2, d. h. die Ordnungszahl 1 ist kleiner als 2, 2 kleiner als 3 usw. Die Ordnungszahl 0 entspricht dem durch das erste Element einer beliebigen wohlgeordneten Menge bestimmten Abschnitt, d. h. der Nullmenge, und ist somit die kleinste Ordnungszahl.

Weiter folgt aus Definition 1, daß *ω die kleinste unendliche Ordnungszahl* ist. M bedeute nämlich irgendeine unendliche wohlgeordnete Menge und $M = M_0 + M_1$ sei die Darstellung von M gemäß Satz 8 auf S. 178, so daß M_0 das Anfangsstück von der Ordnungszahl ω ist; dann ist M_0 entweder mit M identisch oder ein Abschnitt von M. Ist nämlich M_0 von M verschieden, so sei a das erste Element der von 0 verschiedenen Menge M_1; M_0 ist dann der durch a bestimmte Abschnitt von M. Demnach ist ω nach Definition 1 entweder (im Fall

$M_0 = M$) selbst die Ordnungszahl von M oder kleiner als sie, wie dies unsere Behauptung ausdrückt.

Offenbar ist nicht nur jeder Abschnitt einer abgezählten Menge M_0 endlich, sondern es läßt sich auch umgekehrt jede geordnete endliche Menge als Abschnitt einer derartigen Menge M_0 auffassen, d. h. jede endliche Ordnungszahl ist kleiner als ω; das besagt in Verbindung mit dem Ergebnis des vorigen Absatzes, daß im Sinn unserer Definition *jede endliche Ordnungszahl kleiner ist als jede unendliche Ordnungszahl.* Von dem tieferliegenden Satz 1 haben wir hierbei keinen Gebrauch gemacht.

2. Das sukzessive Bildungsgesetz der Ordnungszahlen. Wesentlich für die nächsten Überlegungen ist der folgende Satz:

Satz 2. *Ist μ eine beliebige Ordnungszahl und wird die Menge all der Ordnungszahlen, die kleiner als μ sind, nach der Größe der Ordnungszahlen geordnet, so daß sie mit* 0, 1, 2, . . . *beginnt, so ist diese Menge $W(\mu)$ wohlgeordnet und von der Ordnungszahl μ.*

Wünscht man — wie es für viele Anwendungen nützlich ist — Satz 2 so auszusprechen, daß im Vordersatz bei der Erklärung der Menge $W(\mu)$ zunächst μ gar nicht vorkommt, so kann man sich offenbar so ausdrücken: Ist W eine Menge von Ordnungszahlen mit der Eigenschaft, daß gleichzeitig mit irgendeiner Ordnungszahl α aus W auch jede kleinere Ordnungszahl als α in W vorkommt[1], so ist die nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete Menge W wohlgeordnet und die Ordnungszahl μ der Menge W stellt die *nächstgrößere* Ordnungszahl zu den Ordnungszahlen aus W dar (d. h. die *kleinste* Ordnungszahl, die größer ist als jede in W als Element vorkommende Ordnungszahl α). $W = W(\mu)$ ist also die Menge aller Ordnungszahlen bis zu μ ausschließlich.

Für „kleines“ μ trifft die Behauptung des Satzes 2 ganz gewiß zu. Z. B. ist die Menge $W(3) = \{0, 1, 2\}$ von der Ordnungszahl 3; ebenso für beliebige endliche Mengen. (Man erkennt gleichzeitig, daß die formale Zuerkennung des Prädikates „Ordnungszahl“ an die *Null* eine gebieterische Notwendigkeit auch für die allgemeine Geltung des Satzes 2 ist, wie sie sich schon im Hinblick auf Definition 1 als zweckmäßig herausstellte.) Aber auch für $\mu = \omega$ z. B. ist Satz 2 zutreffend; denn da ω nach S. 186 die kleinste unendliche Ordnungszahl ist, stellt $W(\omega)$ die Menge aller endlichen Ordnungszahlen in der gewöhnlichen Reihenfolge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dar; die Ordnungszahl dieser Menge ist aber in der Tat ω. Ähnlich für $\omega + 1$ usw.

---

[1] Die kürzere Ausdrucksweise; „Ist W ein beliebiges Anfangsstück der Menge aller (nach ihrer Größe angeordneten) Ordnungszahlen“ ist deshalb nicht angängig, weil gegen die Zusammenfassung aller Ordnungszahlen zu einer Menge Bedenken bestehen, wie wir noch sehen werden (S. 212).

Der allgemeine Beweis des Satzes 2, den wir jetzt führen wollen, steht in engster Beziehung zum Beweise des grundlegenden Satzes 3 vom vorigen Paragraphen (S. 170ff.); es ist im wesentlichen die dort verwandte Zuordnungsregel, die uns auch hier zum Ziele führt. Man kann denn auch, wenn man in der Theorie der wohlgeordneten Mengen sogleich mit Ordnungszahlen operieren will, den vorliegenden Satz 2 zum Beweise jenes allgemeineren Satzes 3 von der Vergleichbarkeit (und somit des hier vorausgegangenen Satzes 1) heranziehen (so z. B. bei HAUSDORFF [3] und [4]). Unter diesen Umständen ist hervorzuheben, daß der nachstehende Beweis den Satz 1 und seine Herleitung nicht benutzt.

Es sei M eine beliebige wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl μ, während $W(\mu)$ die Menge aller Ordnungszahlen, die kleiner als μ sind, bezeichne. Da je zwei Ordnungszahlen aus $W(\mu)$ nach Satz 7 des vorigen Paragraphen vergleichbar sind, so kann und soll $W(\mu)$ nach der Größe der darin enthaltenen Ordnungszahlen geordnet werden, so daß die in $W(\mu)$ geltende Ordnungsbeziehung $\alpha \prec \beta$ gleichwertig ist mit der im Sinn der Definition 1 gemachten Aussage $\alpha < \beta$. Wir weisen die durch Satz 2 behauptete Ähnlichkeit zwischen den (jedenfalls geordneten) Mengen M und $W(\mu)$ dadurch nach, daß wir eine ähnliche Abbildung zwischen ihnen angeben. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst überhaupt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen beider Mengen, um dann nachzuweisen, daß diese Zuordnung ähnlich ist. a sei ein beliebiges Element von M. Um die ihm zuzuordnende Ordnungszahl von $W(\mu)$ anzugeben, bezeichnen wir den durch a bestimmten Abschnitt von M mit A, seine Ordnungszahl mit α; nach Definition 1 ist dann α kleiner als μ, also α ein Element von $W(\mu)$. *Diese Ordnungszahl α von $W(\mu)$ soll dem Element a von M zugeordnet werden.* Dann entspricht gemäß dieser Festsetzung auch umgekehrt jeder Ordnungszahl α von $W(\mu)$, d. h. jeder Ordnungszahl $\alpha < \mu$, eindeutig ein Element a der Menge M (die die Ordnungszahl μ besitzen sollte). Denn nach Definition 1 besagt $\alpha < \mu$, daß α die Ordnungszahl einer einem Abschnitt von M ähnlichen Menge — oder einfacher: die Ordnungszahl eines Abschnittes A von M — darstellt. Ist ein solcher Abschnitt A durch das Element a bestimmt, so ist a nach der obigen Festsetzung ein der Ordnungszahl α von $W(\mu)$ entsprechendes Element von M; ein zweites, von a verschiedenes derartiges Element kann in M nicht vorkommen, weil ein solches nach Satz 7 des vorigen Paragraphen einen zu A *nicht* ähnlichen Abschnitt von M bestimmen würde. Schließlich ist die so hergestellte Abbildung zwischen M und $W(\mu)$ *ähnlich*. Denn sind a und b zwei Elemente von M, A und B die durch sie bestimmten Abschnitte und α und β deren Ordnungszahlen, so folgt aus $a \prec b$ nach Satz 7 und dem Beweis dazu, daß A ein Abschnitt von B, also nach Definition 1 $\alpha < \beta$ ist; diese Betrachtung läßt sich offenbar umkehren. $W(\mu)$ ist also in der Tat wohlgeordnet und von der Ordnungszahl μ, wie Satz 2 es behauptet.

Wir können hiernach die Elemente einer beliebigen wohlgeordneten Menge M sämtlich durch „Indizes" bezeichnen, also in der Form m_α schreiben, wobei der Index α nicht nur wie sonst in der Mathematik die natürlichen Zahlen, sondern alle endlichen und unendlichen Ordnungszahlen bis zur Ordnungszahl von M ausschließlich durchläuft. Man hat zu diesem Zweck als Index jedes Elements von M die Ordnungszahl zu wählen, die ihm bei der soeben hergestellten Ab-

bildung zugeordnet wurde. Damit ist eine Art „Normaldarstellung" jeder wohlgeordneten Menge:

$$\{m_0, m_1\ m_2, \ldots m_\omega, m_{\omega+1}, \ldots m_{\omega\cdot 2}, m_{\omega\cdot 2+1}, \ldots\}$$

ermöglicht, die sich für mancherlei Zwecke als nützlich und anschaulich erweist.

3. Die Reihe der Ordnungszahlen. Transfinite Induktion. Sind alle Ordnungszahlen bis zu „einer gewissen Stelle" bekannt, so hat man, um die nächstgrößere Ordnungszahl μ zu gewinnen, gemäß Satz 2 nur die geordnete Gesamtheit jener Ordnungszahlen als Menge zu betrachten; μ ist dann die Ordnungszahl dieser Menge. Fährt man, mit 0, 1, 2 usw. beginnend, nach diesem einheitlichen sukzessiven Bildungsgesetz unbegrenzt fort, so erhält man die folgende völlig bestimmte Reihe, die gewissermaßen *eine Fortsetzung der gewöhnlichen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus* bedeutet [1] und eine der kühnsten Schöpfungen CANTORS darstellt:

$$0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots \omega\cdot 3, \ldots$$
$$\omega\cdot 4, \ldots\ \omega\cdot m+n, \ldots \omega^2 (=\omega\cdot\omega), \omega^2+1, \ldots \omega^2+\omega, \ldots$$
$$\omega^2+\omega\cdot 2, \ldots \omega^2+\omega\cdot m+n, \ldots \omega^2\cdot 2, \ldots \omega^2\cdot m+\omega\cdot n+p, \ldots$$
$$\omega^3, \omega^3+1, \ldots \omega^n, \ldots$$
$$\omega^n+\omega^{n-1}\cdot m_{n-1}+\omega^{n-2}\cdot m_{n-2}+\cdots+\omega\cdot m_1+m_0, \ldots$$

Hierbei bedeuten die Summanden und Faktoren m, n, p, m_{n-1} usw. ebenso wie die Exponenten n, $n-1$ usw. *endliche* Ordnungszahlen. Die Einführung der Potenzen $\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n$ steht gemäß Satz 2 im Einklang mit der oben (S. 177) gegebenen Definition der Potenzen von Ordnungszahlen mit endlichen Exponenten, wie der Leser unschwer überlegen wird; so hat z. B. die Menge aller der Ordnungszahl ω^2 vorangehenden Ordnungszahlen (die sämtlich von der Form $\omega\cdot m+n$ sind) die Ordnungszahl $\omega\cdot\omega=\omega^2$, weil lauter Abzählungen (festes m, veränderliches n) in abgezählter Reihenfolge (veränderliches m) aufeinander folgen. In einer sinngemäßen, auf Seite 191 noch kurz zu erörternden Verallgemeinerung [2] dieses Potenzbegriffs (auf den Fall

---

[1] Vgl. das CANTOR-Zitat auf S. 3. Auch in philosophischer Betrachtung werden zuweilen die transfiniten Zahlen als natürliche oder sogar notwendige Krönung des Gebäudes der Arithmetik angesehen; siehe z. B. WÄSCHE [1], S. 40 (vgl. auch S. 36).

[2] Für den Zusammenhang mit dem zu Ende von § 9 andeutungsweise erwähnten allgemeinen Potenzbegriff siehe HAUSDORFF [3], S. 117ff. (vgl. auch etwa HESSENBERG [4]). Es sei nochmals (vgl. S. 142) hervorgehoben, daß die Potenzierung von Ordnungszahlen etwas ganz und gar anderes bedeutet und bezweckt, als die in § 8 behandelte Potenzierung der Kardinalzahlen. So ist z. B. eine Menge von der Ordnungszahl ω^ω (oder von jeder anderen der oben

unendlicher Ordnungszahlen als Exponenten) legt man der wohlgeordneten Menge *aller* Ordnungszahlen von der oben angeschriebenen Form die Ordnungszahl ω^ω bei und führt das Schema der Ordnungszahlen folgendermaßen unbegrenzt fort:

$$\omega^\omega,\ \omega^\omega+1,\ \ldots\ \omega^\omega+\omega,\ \ldots\ \omega^\omega\cdot n,\ \ldots\ \omega^\omega\cdot\omega=\omega^{\omega+1},\ \omega^{\omega+1}+1,\ \ldots$$
$$\omega^{\omega\cdot n},\ \ldots\ \omega^{\omega^2},\ \ldots\ \omega^{\omega^n},\ \ldots\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}=\varepsilon,\ \varepsilon+1,\ \ldots$$

Die hier mit ε bezeichnete Ordnungszahl hat offenbar die Eigenschaft, daß $\omega^\varepsilon=\varepsilon$; sie ist die erste Ordnungszahl, die man, ausgehend von ω und den endlichen Ordnungszahlen, mittels Addition, Multiplikation und Potenzierung in endlicher Schreibweise nicht mehr darstellen kann; sie erfordert daher eine neue Bezeichnung (ε). CANTOR hat allgemein die Ordnungszahlen ξ, die der Beziehung $\omega^\xi=\xi$ genügen, als *Epsilonzahlen* bezeichnet; hiernach ist ε die kleinste Epsilonzahl.

Diesem Schema der Ordnungszahlen wird schließlich durch den Vergleichbarkeitssatz 1 seine Einzigkeit und volle Bedeutung gesichert, insofern als es wirklich *allen* Ordnungszahlen Raum gibt. Es ist danach ausgeschlossen, daß der unbegrenzt ausgedehnte Stamm, an dem sich die Ordnungszahlen wohlgeordnet aneinander reihen, sich etwa irgendwo nach verschiedenen Ästen gabelte, deren Ordnungszahlen miteinander unvergleichbar wären, oder daß ganz losgelöst vom Hauptstamm sich noch Sondersysteme von Ordnungszahlen vorfänden. So ist der geniale Gedanke aus einer frühen Schaffensperiode CANTORS (vgl. [7 V]), den Zählprozeß über die Folge der endlichen Zahlen hinaus fortzusetzen, von ihm bis zu Ende klar und rein durchgeführt. Ohne daß für Mehrdeutigkeiten und unbestimmte Unendlichkeitsbegriffe Platz oder gar Bedürfnis bliebe, folgt die Fortführung des Zählprozesses an jeder Stelle dem nämlichen, in Satz 2 ausgedrückten Gesetz, wonach die gerade

---

und im folgenden angeführten Ordnungszahlen) abzählbar und nicht etwa von der Kardinalzahl $\mathfrak{a}^\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$ des Kontinuums.

Um z. B. die Menge der natürlichen Zahlen nach der Ordnungszahl $\omega\omega$ anzuordnen, kann man mit HESSENBERG jede Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren darstellen und diese Produkte in erster Linie nach der wachsenden Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Faktoren anordnen; bei gleicher Anzahl der — in der Reihenfolge nach ihrer Größe anzuschreibenden — Faktoren soll, unter Außerachtlassung etwa beiderseits gleicher Faktoren, die *Größe* der zunächst kommenden verschiedenen Faktoren für die Anordnung der Produkte maßgebend sein. Hiernach ergibt sich folgende Anordnung der (abzählbaren!) Menge der natürlichen Zahlen:

1, 2, 3, 5, 7, 11, ... (alle Primzahlen); 4, 6, 10, 14, ...; 9, 15, 21, 33, ...; ...
8, 12, 20, 28, ...; 18, 30, 42, 66, ...; ... 27, 45, 63, 99, ...; ...
16, 24, 40, 56, ...; ...

Man mache sich dieses Bildungsgesetz klar und überzeuge sich zu diesem Zwecke namentlich, daß z. B. die Menge aller der Zahl 2^n hier vorangehenden Zahlen die Ordnungszahl ω^{n-1} besitzt!

fällige Zahl durch die Gesamtheit der ihr vorangegangenen eindeutig bestimmt ist. Weiterhin erlaubt dieser endlose Zählprozeß, die Elemente jeder noch so umfassenden wohlgeordneten Menge, weit über den Typus ω hinaus, gewissermaßen „abzuzählen", sie nämlich einheitlich mit Indizes zu versehen, die dann freilich nicht nur endliche Zahlen, sondern beliebige Ordnungszahlen sind.

Im Sinn unseres bisherigen Mengenbegriffs (S. 4) hätten wir die Gesamtheit *aller* Ordnungszahlen des obigen, endlos fortgesetzt gedachten Schemas (bei der getroffenen Anordnung nach der Größe der Ordnungszahlen) als eine wohlgeordnete Menge aufzufassen; aus welchen Gründen diese Auffassung als unzulässig betrachtet werden muß und wie demgemäß der in § 2 eingeführte Begriff der Menge abzuändern ist, das wird uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

Für die Leser, denen aus der Arithmetik der natürlichen Zahlen das — z. B. in den Beweisen von S. 74f. und 152f. benutzte — Verfahren der „vollständigen Induktion" (auch „Schluß von n auf $n+1$" genannt; vgl. S. 181) nicht fremd ist, sei bemerkt, daß die einfache Natur und Aufeinanderfolge der Ordnungszahlen eine Verallgemeinerung jenes Verfahrens auf beliebige Ordnungszahlen gestattet. Dieses — hier als **transfinite Induktion** bezeichnete — Verfahren besagt, daß eine Behauptung $\mathfrak{B}$ über Ordnungszahlen für *alle* Ordnungszahlen zutrifft, falls sie erstens für die (kleinste) Ordnungszahl 0 richtig ist und zweitens allgemein aus ihrer Gültigkeit für alle Ordnungszahlen bis zu einer beliebigen α (ausschließlich) auch noch ihre Gültigkeit für die Ordnungszahl α selbst folgt. Ist nämlich β *irgendeine* Ordnungszahl, so sei $\overline{W}$ die (wohlgeordnete) Menge derjenigen Ordnungszahlen bis einschließlich β, für die die Behauptung $\mathfrak{B}$ *nicht* zutrifft; $\overline{W}$ ist demnach Teilmenge von $W(\beta+1)$. Dann ist $\overline{W}$ die Nullmenge, d. h. $\mathfrak{B}$ gilt z. B. für β; denn anderenfalls hätte das Anfangselement β_0 von $\overline{W}$, das nach der ersten Bedingung keinesfalls die Zahl 0 ist, entgegen der zweiten Bedingung die Eigenschaft, daß für alle kleineren Ordnungszahlen als β_0 die Behauptung $\mathfrak{B}$ zutrifft. (Man vergleiche hierzu den Satz von Aufgabe 5 auf S. 184!)

Weniger elegant, aber im allgemeinen handlicher für den praktischen Gebrauch stellt sich das Verfahren der transfiniten Induktion dar, wenn man von der folgenden Unterscheidung von zweierlei Ordnungszahlen ausgeht: Eine beliebige Ordnungszahl hat entweder eine unmittelbare Vorgängerin (nächstkleinere Ordnungszahl) oder nicht; wenn wir von 0 absehen, so ist ω die kleinste Ordnungszahl der zweiten Art. Man nennt die Zahlen der zweiten Art (mit Ausnahme von 0) *Limeszahlen* und bezeichnet eine Limeszahl λ auch durch die Schreibweise $\lambda = \lim \alpha_\nu$, wo α_ν die Elemente einer Menge von Ordnungszahlen zu durchlaufen hat, zu denen λ die *nächstgrößere* Ordnungszahl darstellt. Z. B. ist demnach

$$\omega = \lim n = \lim 2n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\omega^\omega = \lim \omega^n = \lim(\omega^n \cdot n_1 + n_2) \quad (n, n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach dieser Vorbereitung kann man, wie leicht ersichtlich, die transfinite Induktion als Beweisverfahren so ausdrücken: Eine Behauptung $\mathfrak{B}$ trifft für *jede* Ordnungszahl zu, wenn

erstens $\mathfrak{B}$ für die Ordnungszahl 0 gültig ist,

zweitens aus der Gültigkeit von $\mathfrak{B}$ für irgendeine Ordnungszahl α stets die Gültigkeit für die nächstfolgende Ordnungszahl $\alpha + 1$ folgt,

drittens aus der Gültigkeit von $\mathfrak{B}$ für alle Zahlen α_ν einer gewissen Menge von Ordnungzahlen stets die Gültigkeit für die Limeszahl $\lim \alpha_\nu$ folgt.

Wie in der Arithmetik der natürlichen Zahlen liegt auch hier die Bedeutung des Induktionsschlusses in seiner Brauchbarkeit nicht nur zur Ermöglichung von *Beweisen*, sondern ebensosehr zur Einführung von *Definitionen*: kann man eine gewisse Eigenschaft $\mathfrak{E}$ für jede Ordnungszahl α mittels Zurückführung auf die Ordnungszahlen, die kleiner als α sind, formulieren und $\mathfrak{E}$ überdies z. B. für die Zahl 0 ausdrücken, so ist damit die Definition von $\mathfrak{E}$ für *alle* Ordnungszahlen getroffen. So läßt sich z. B. die Definition der Potenzierung von Ordnungszahlen, wie sie oben bei der Schreibweise ω^ω usw. zugrunde gelegt worden ist, folgendermaßen induktiv ausdrücken: 1. $\beta^0 = 1$; 2. $\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$; 3. $\beta^{\lim \alpha_\nu} = \lim \beta^{\alpha_\nu}$. Hiermit ist, wie man sich an Beispielen verdeutlicht, die Potenz β^α allgemein, also für beliebige Ordnungszahlen β und α definiert.

Die transfinite Induktion gehört zu denjenigen Verfahren der Mengenlehre, die für die praktische Verwendung auch in anderen Gebieten der Mathematik am wichtigsten sind; innerhalb der Ordnungstheorie kann sich mit ihr wohl kein anderes Verfahren nach dieser Richtung messen. Als ein Beispiel, das zu besonderer historischer Bedeutung und nachhaltiger Wirkung außerhalb der Mengenlehre, nämlich in der Algebra, gelangt ist, sei der Beweis genannt, nach dem jeder gegebene Körper zu einem algebraisch abgeschlossenen erweitert werden kann (STEINITZ [1], §§ 19—21).

4. Alefs. Zu jeder Ordnungszahl μ gehört eine eindeutig bestimmte Kardinalzahl, nämlich die Kardinalzahl einer wohlgeordneten Menge von der Ordnungszahl μ. *Welche* wohlgeordnete Menge hierbei genommen wird, ist gleichgültig, da wohlgeordnete Mengen von der nämlichen Ordnungszahl ähnlich, also um so mehr äquivalent sind. (Z. B. gehört zu der kleinsten unendlichen Ordnungszahl ω die Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen.) Man bezeichnet die Kardinalzahlen unendlicher wohlgeordneter Mengen als *Alefs*; nach Satz 4 auf S. 174 sind die Alefs untereinander ausnahmslos vergleichbar.

Umgekehrt gehört zwar zu jeder *endlichen* Kardinalzahl gleichfalls eine *eindeutig bestimmte* (gleichbezeichnete) Ordnungszahl (S. 167); zu jedem Alef dagegen gehören *unendlichviele verschiedene* Ordnungszahlen. Ist nämlich M eine unendliche wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl μ und der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ und wird zu M ein einziges Element als *letztes* hinzugefügt, so besitzt die dadurch neu entstehende wohlgeordnete Menge die von μ verschiedene Ordnungszahl $\mu + 1$ (S. 185); die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ dagegen bleibt bei einer solchen Hinzufügung unverändert (Satz 6 auf S. 42). Entsprechend gehören zu der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ z. B. auch noch die Ordnungszahlen $\mu + 2$, $\mu + 3$, $\mu + 4$ usw. sowie $\mu + \omega$, $\mu + \omega + 1$ usw., da die Kardinalzahl einer unendlichen Menge sich nach dem eben angeführten Satz durch Hinzufügung abzählbar unendlichvieler Elemente nicht ändert. Man bezeichnet die (nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete) Menge aller zu einem Alef gehörigen Ordnungszahlen als die *Zahlenklasse* dieses Alefs. Eine wichtige Rolle spielt die kleinste zum betreffenden Alef gehörige Ordnungszahl, die *Anfangszahl* der Zahlenklasse.

Geht man in dem Schema aller Ordnungzahlen von der kleinsten unendlichen Ordnungszahl ω aus und bildet man, im Sinne wachsender

Ordnungszahlen fortschreitend, zu jeder Ordnungszahl das zugehörige Alef, so erhält man zwar immer zu unendlichvielen verschiedenen Ordnungszahlen je ein und dasselbe Alef; dennoch gibt es schließlich zu jedem auftretenden Alef und sogar zu jeder beliebigen *Menge* von Alefs ein größeres, und zwar genauer ein *nächstgrößeres*.

Zum Beweis[1] bilde man, wenn $\aleph_\alpha$ ein beliebiges Alef ist bzw. die Alefs der gegebenen Menge durchläuft, die (wohlgeordnete) Menge M aller Ordnungszahlen, deren zugehörige Kardinalzahlen gleich oder kleiner als $\aleph_\alpha$ sind. Die Ordnungszahl μ von M ist nach Satz 2 größer als jede in M vorkommende Ordnungszahl, nämlich gerade die *nächstgrößere* Ordnungszahl. Nach der Definition der Menge M gehört daher zu μ nicht mehr $\aleph_\alpha$ oder ein kleineres Alef als Kardinalzahl, sondern ein größeres Alef. Dieses muß schließlich das auf $\aleph_\alpha$ unmittelbar folgende $\aleph_{\alpha+1}$ sein[2], weil zu jeder kleineren Ordnungszahl als μ höchstens die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ gehören sollte; μ ist die kleinste zu $\aleph_{\alpha+1}$ gehörige Ordnungszahl, also die Anfangszahl der Zahlenklasse von $\aleph_{\alpha+1}$.

Hiernach ist z. B. die (wohlgeordnete) Menge aller verschiedenen Ordnungszahlen von endlichen und abzählbaren Mengen (Kardinalzahl $\leqq \aleph_0$) nicht mehr abzählbar, sondern sie besitzt als Kardinalzahl[3] das zweitkleinste Alef $\aleph_1$, als Ordnungszahl die Anfangszahl der Zahlenklasse von $\aleph_1$. Weiter läßt sich auf Grund der skizzierten Überlegung z. B. $\aleph_\omega$ (siehe unten) erklären als die Kardinalzahl der wohlgeordneten Menge aller Ordnungszahlen, deren zugehörige Kardinalzahl irgendein $\aleph_n$ (n endlich) oder eine endliche Kardinalzahl ist.

Man bezeichnet die sich derart ergebenden Kardinalzahlen der Reihe nach mit $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$, indem man zur Numerierung die Ordnungszahlen als Indizes benutzt; die so geordnete Gesamtheit aller Alefs wäre im Sinn unseres bisherigen Mengenbegriffs wiederum als eine wohlgeordnete Menge anzusprechen, was indes gleichartigen Bedenken begegnet, wie auf S. 191 oben erwähnt. Im besonderen fällt $\aleph_0$, da zu der kleinsten unendlichen Ordnungszahl ω (und zu $\omega + 1$, $\omega + 2$ usw.) gehörig, mit der uns wohlbekannten Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen zusammen. Geht in der Reihe der Alefs die Kardinalzahl $\aleph_\mu$ der Kardinalzahl $\aleph_\nu$ voran, d. h. ist die Ordnungszahl μ kleiner als die Ordnungszahl ν, so ist natürlich $\aleph_\mu$ auch im Sinne der Größenordnung der Kardinalzahlen (S. 65) kleiner als $\aleph_\nu$, wie folgende Überlegung noch ausdrücklich zeige: Ist A eine

---

[1] Man könnte zum Beweis auch den Satz 1 des § 8 heranziehen.

[2] Die Frage, ob $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ oder nicht, ist bis heute nicht nur für $\alpha = 0$ (Kontinuumproblem, vgl. S. 67 und 300 f.), sondern für sämtliche Alefs ungelöst. Vgl. hierzu auch LINDENBAUM-TARSKI [1], S. 313 f.

[3] Dagegen besitzt die Menge aller verschiedenen Ordnungs*typen* von (endlichen und) abzählbaren, *wie immer geordneten* Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ oder $2^{\aleph_0}$, die möglicherweise (vgl. die vorige Fußnote) größer ist als $\aleph_1$.

wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl α und der Kardinalzahl $\aleph_\mu$, B eine wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl β und der Kardinalzahl $\aleph_\nu$, so muß, wenn $\aleph_\mu$ in der Reihe der Alefs vor $\aleph_\nu$ steht, auch α in der Reihe der Ordnungszahlen vor β stehen, also α kleiner sein als β. Das besagt, daß A einem Abschnitt der wohlgeordneten Menge B ähnlich, um so mehr also einer Teilmenge von B äquivalent ist. Daher kann nach Satz 5 auf S. 76 A nur entweder eine kleinere oder die nämliche Kardinalzahl besitzen wie B, und da $\aleph_\mu$ von $\aleph_\nu$ verschieden sein sollte, ist in der Tat $\aleph_\mu$ kleiner als $\aleph_\nu$.

Es würde für den Rahmen dieser Darstellung zu weit führen, näher auf die von CANTOR geschaffene Theorie der Ordnungszahlen und der Alefs einzugehen, die HILBERT geradezu als „die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit" bezeichnet (HILBERT [9], S. 167). Auch die vorangehenden, das Schema der Ordnungszahlen und das der Alefs betreffenden Ausführungen sollten nur eine andeutende Übersicht über die Verhältnisse und nicht eine systematische Entwicklung geben. Der Leser findet ausführliche Darstellungen außer bei CANTOR [7 V] und [12 II] namentlich in den Büchern von HESSENBERG [3], HAUSDORFF [3] bzw. [4] und SCHOENFLIES [8] (in letzterem mit besonderer Rücksicht auf die historische Entwicklung); vgl. ferner die Angaben auf S. 374 f. Für die Arithmetik im Bereich der Alefs, die naturgemäß einfacher ist als die Arithmetik im Bereich der nicht als Alefs vorausgesetzten Mächtigkeiten (§§ 7/8), vergleiche man überdies noch etwa TARSKI [6].

5. Das Problem der allgemeinen Vergleichbarkeit. Der Wohlordnungssatz. Nach diesem Ausblick auf die spezielle Theorie der Ordnungszahlen und Alefs wollen wir nochmals zu der schon im vorigen Paragraphen behandelten *allgemeinen* Theorie der wohlgeordneten Mengen zurückkehren, indem wir den Begriff der Ordnungszahl in diese Theorie einführen. Während der erste Hauptsatz (Satz 3 des vorigen Paragraphen) schon oben in dem neuen Gewand erschien (Satz 1), läßt sich der zweite Hauptsatz (Satz 4 auf S. 174) nunmehr so ausdrücken:

Satz 3. *Wohlgeordnete Mengen sind nicht nur in bezug auf ihre Ordnungszahlen, sondern auch in bezug auf ihre Kardinalzahlen stets vergleichbar. Sind nämlich M und N wohlgeordnete Mengen und ist die Ordnungszahl von M kleiner als die Ordnungszahl von N, so ist die Kardinalzahl von M gleich oder kleiner als die Kardinalzahl von N (während bei Gleichheit der Ordnungszahlen um so mehr die Kardinalzahlen übereinstimmen).*

Die Umkehrung dieses Satzes ergibt offenbar: sind M und N wohlgeordnete Mengen und ist die Kardinalzahl von M kleiner (größer) als die von N, so ist um so mehr die Ordnungszahl von M kleiner (größer) als die von N. Dagegen kann bei gleicher Kardinalzahl von M und N —

ja sogar bei völliger Übereinstimmung dieser beiden wohlgeordneten Mengen in bezug auf ihre Elemente, abgesehen von der Ordnung — die Ordnungszahl von M immer noch gleich, kleiner oder größer sein als die von N (vgl. S. 177).

Der für *wohlgeordnete* Mengen somit ausgeschlossene Fall der *Unvergleichbarkeit* zweier Mengen oder zweier Kardinalzahlen (vgl. S. 76) beunruhigt uns indes nach wie vor für ungeordnete oder auch für geordnete, nur nicht gerade *wohl*geordnete Mengen. Das ist der Grund, weshalb CANTOR und seine Nachfolger die Bezeichnung „Mächtigkeit" der näherliegenden „Kardinalzahl" vorzogen; man trug Bedenken, mathematischen Objekten, die sich bezüglich ihrer „Größe" nicht einer ausnahmslosen Rangordnung fügen zu wollen schienen, den Ehrennamen einer „Zahl" zuzuerkennen. Nur die Alefs, die Mächtigkeiten der wohlgeordneten Mengen, für die der letzte Satz jedes Bedenken beseitigt, sollten als Kardinalzahlen bezeichnet werden.

Hier klaffte also im Gebäude der Mengenlehre noch eine tiefe Lücke zwischen den wohlgeordneten Mengen, deren Gesetze mit aller wünschenswerten Einfachheit und Einheitlichkeit geregelt waren, und allen anderen (geordneten oder ungeordneten) Mengen, für die eine so grundlegende Frage wie die nach der Vergleichbarkeit ihrer Mächtigkeiten offen blieb. Es lag nahe, die Überbrückung der Kluft sich in der Weise zu denken, daß man versuchte, entweder zu beliebigen Mengen äquivalente wohlgeordnete Mengen zu bilden oder, was wesentlich dasselbe bedeutet, beliebige Mengen durch geeignete Anordnung bzw. Umordnung ihrer Elemente selbst zu wohlgeordneten zu gestalten, kurz sie „wohlzuordnen". Dann hätte man mit einem Schlag den Ertrag der Theorie der wohlgeordneten Mengen, vor allem den zweiten Hauptsatz, für alle Mengen nutzbar gemacht. Dieser Weg hatte denn in der Tat CANTOR seit seiner ersten Beschäftigung mit diesen Fragen vorgeschwebt; gangbar gemacht wurde er aber erst 1904 durch ZERMELOS Beweis des entscheidenden Schrittes[1], den wir aussprechen als

Wohlordnungssatz. *Jede Menge kann wohlgeordnet (d. h. in die Form einer wohlgeordneten Menge gebracht) werden.*

Am nächstliegenden scheint es, zum Beweise dieses Satzes folgenden Gedankengang anzuführen: Man greife aus der beliebig gegebenen Menge ein beliebiges Element heraus, aus der übrigbleibenden Teilmenge ein zweites, aus der restlichen Teilmenge ein drittes usw. und setze dieses Verfahren so lange fort, bis die gegebene Menge erschöpft ist. Ordnet man dann die Elemente der gegebenen Menge in der Reihenfolge an, in der sie bei jenem Verfahren herausgegriffen wurden, so erhält man eine wohlgeordnete Menge.

[1] Zur Geschichte des Wohlordnungsproblems (wie auch für JOURDAINS einschlägige Beweisversuche) vergleiche man JOURDAIN [5].

In Rücksicht auf einen derartigen Gedankengang hat CANTOR den Wohlordnungssatz als ein „grundlegendes und folgenreiches, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdiges Denkgesetz" bezeichnet; er hat an der festen Überzeugung von der Wohlordnungsfähigkeit jeder Menge auch dann festgehalten, als (1904) die entgegengesetzte Annahme vor der breitesten mathematischen Öffentlichkeit, dem Internationalen Mathematikerkongreß, erwiesen schien (auf Grund eines sich späterhin als irrig erweisenden Hilfssatzes)[1]. Einen *Beweis* des Wohlordnungssatzes hat er dagegen nicht gegeben. Der obige Gedankengang ist nicht als eigentlicher — auch nur halbwegs strenger — Beweis anzusehen, vor allem deshalb, weil in keiner Weise gezeigt wird, daß durch das angegebene Verfahren mit seinem ominösen, bei mathematischen Prinzipienfragen immer höchst verdächtigen Wörtchen „usw." (das natürlich nicht etwa eine Beschränkung auf abgezählt unendlich-viele Schritte bedeutet) die gegebene Menge wirklich *erschöpft* werden kann. Die Notwendigkeit einer Verschärfung des angegebenen Gedankengangs erhellt auch aus folgendem: er scheint, oberflächlich betrachtet, nicht nur die *Möglichkeit* der Wohlordnung zu erweisen, sondern darüber hinaus zu jeder beliebigen Menge ein *wirkliches Verfahren* zur Wohlordnung anzugeben; dem steht die Tatsache gegenüber, daß die wirkliche *Durchführung* der Wohlordnung bis heute noch nicht einmal bei gewissen einfachsten nichtabzählbaren Mengen gelungen ist (vgl. S. 300 ff.).

Im Jahre 1904 hat ZERMELO in einer kurzen, aber überaus scharfsinnigen Note [1] einen wirklichen *Beweis* des Wohlordnungssatzes geliefert; vier Jahre später ließ er einen weiteren, methodisch besonders bedeutsamen Beweis [2] folgen, der sich einer andersartigen Methode bedient und (im Gegensatz zum ersten Beweis) von den Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen keinen Gebrauch macht, doch immerhin letzten Endes auf dem gleichen Grundgedanken wie der erste Beweis beruht. Das gründliche Durchdenken aller Schlüsse der ZERMELOschen Beweise, vor allem des zweiten, stellt an den Leser ziemlich erhebliche Anforderungen, namentlich wegen der sehr abstrakten Natur der Gedankenfolge. Dennoch soll der historischen und grundsätzlichen Bedeutung wegen (vgl. S. 227, 249, 299) der erste dieser Beweise nachstehend dargestellt, der zweite wenigstens dem Grundgedanken nach skizziert werden. Es wird jedoch das Verständnis der Beweise erleichtern, wenn wir vorher, ohne uns hierbei logische Lückenlosigkeit zum Ziel zu setzen, die Begründung des Wohlordnungssatzes mittels eines anschaulicheren Gedankengangs schildern, der an eine von SCHOENFLIES (im Anschluß an ZERMELO und den Gedanken des vorletzten Absatzes) gegebene Darstellung (SCHOENFLIES [8], S. 172 f.) anknüpft.

---

[1] Vgl. SCHOENFLIES [11], S. 100f.

Es sei M eine beliebig gegebene Menge, die nicht geordnet zu sein braucht. In jeder Teilmenge von M, abgesehen von der hier nicht in Betracht zu ziehenden Nullmenge, denken wir uns je ein einziges völlig beliebiges, aber von nun an festes Element ausgewählt und als das *ausgezeichnete Element* der betreffenden Teilmenge bezeichnet. Dabei werden zu verschiedenen Teilmengen natürlich keineswegs stets verschiedene ausgezeichnete Elemente gehören; im Gegenteil können wir, wenn m ein beliebiges Element von M ist, die Auswahl z. B. mit folgender Festsetzung beginnen: m sei das ausgezeichnete Element aller derjenigen Teilmengen von M, in denen m überhaupt vorkommt. Übrigens erfordert unser Beweis keineswegs, daß die Auswahl der ausgezeichneten Elemente für alle Teilmengen von M durch bestimmte Regeln wirklich getroffen ist; es genügt vielmehr, wenn wir uns die Auswahl als möglich und irgendwie vollzogen vorstellen können. Hiernach geht der Beweis nicht von einer speziellen, sondern von einer beliebigen Auswahl aus und gelangt demgemäß zu *irgendeiner* Wohlordnung, nicht etwa zu einer individuellen; daher kann man den Wohlordnungssatz nur zu Schlüssen über solche Eigenschaften benutzen, die sich auf alle wie immer beschaffenen Wohlordnungen der Menge M beziehen. Auf die grundsätzlichen Fragen, die mit dem „Auswahlprinzip", d. h. der Behauptung von der Möglichkeit der Auswahl verknüpft sind, kommen wir später ausführlich zurück (S. 288 ff.).

Der Vorteil, der einer solchen „gleichzeitigen" Auswahl ausgezeichneter Elemente aus allen Teilmengen von M als Ausgangspunkt zukommt gegenüber der „sukzessiven" Auswahl von Elementen aus gewissen Teilmengen, wie sie oben (S. 195 unten) verwendet wurde, liegt vor allem in dem folgenden, mehr psychologisch als mathematisch zu wertenden Umstand: Oben setzte jeder einzelne Auswahlakt die Gesamtheit aller vorangegangenen Auswahlakte schon voraus, da von ihnen die dem gegenwärtigen Akt zugrunde liegende Teilmenge von M abhängt; es gewinnt so den Anschein, als sei ein sukzessiv wachsender Zeitaufwand für die Auswahlakte erforderlich, womit freilich dem zeitlos zu denkenden Charakter aller mathematischen Schlußfolgen und Operationen nicht Rechnung getragen wird. Die nunmehrige Zugrundelegung einer gleichzeitigen Auswahl aus *allen* Teilmengen von M ist jenem Verfahren zwar nicht in der praktischen Durchführbarkeit überlegen, wird aber vielen als psychologisch faßbarer und anschaulicher erscheinen. Es fällt demgegenüber nicht ins Gewicht, daß wir beim jetzigen, gewissermaßen den Charakter einer Vorratswirtschaft tragenden Verfahren zahlenmäßig *mehr* Auswahlakte als vorhin — also überflüssig viele — benötigen, insofern als nur ein verschwindend kleiner Bruchteil der Teilmengen von M beim Beweis wirklich herangezogen wird (nämlich nur so viele, wie die Mächtigkeit von M angibt, während die Zahl der auf Vorrat bereitgestellten Aus-

wahlakte offenbar der Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ entspricht).

Es sei a das ausgezeichnete Element der Menge M selbst; wir bezeichnen die durch Entfernung von a aus M entstehende Teilmenge mit A. Weiter sei b das ausgezeichnete Element von A, und B die Menge, die aus A durch Weglassung des Elementes b entsteht; dann ist B eine Teilmenge von A wie auch von M selbst; wir können M als Vereinigungsmenge der (wohl)geordneten Menge $\overline{B} = \{a, b\}$ und der Menge B auffassen. Ferner soll N die Bezeichnung einer vorläufig noch nicht bestimmten *geordneten* Menge sein, von der wir zunächst nur festsetzen, daß sie a zum ersten Element und b zum zweiten Element besitzen soll. In gleicher Weise fortfahrend bezeichnen wir das ausgezeichnete Element von B mit c, die durch Entfernung von c aus B entstehende Menge — eine Teilmenge von M — mit C und bestimmen die geordnete Menge N einen Schritt weiter durch: $N = \{a, b, c, \ldots\}$; dann ist M die Vereinigungsmenge der Mengen $\overline{C} = \{a, b, c\}$ und C, von denen $\overline{C}$ übrigens wohlgeordnet ist. Dieses Verfahren denken wir uns beliebig fortgesetzt, etwa bis wir zu einer gewissen Teilmenge R von M gelangt sind, deren ausgezeichnetes Element s ist. Wir bezeichnen dann die Teilmenge von R, die durch Entfernung von s aus R hervorgeht und die gleichzeitig eine Teilmenge der ursprünglichen Menge M ist, mit S (und ihr ausgezeichnetes Element mit t). Von der geordneten Menge N kennen wir in diesem Augenblick die „ersten Elemente" bis s einschließlich, d. h. das Element s und alle ihm vorangehenden Elemente; bezeichnen wir die Teilmenge von N, die s und alle vorangehenden Elemente enthält und die uns daher völlig bekannt ist, mit $\overline{S}$, so erkennen wir, daß $\overline{S} = \{a, b, c, \ldots s\}$ nicht nur eine geordnete, sondern sogar eine *wohlgeordnete* Menge ist. Zudem überzeugen wir uns auf Grund der Vorschrift unseres Verfahrens, daß die ursprünglich gegebene Menge M sich als die Vereinigungsmenge der wohlgeordneten Menge $\overline{S}$ und der (nicht notwendig geordneten) Menge S betrachten läßt, in Formel: $M = \overline{S} + S$; jedes Element von M gehört nämlich entweder — wenn es ausgezeichnetes Element irgendeiner der bisher aufgetretenen Teilmengen $A, B, C, \ldots R$ ist — zu $\overline{S}$ oder (im anderen Fall) zu S. Jedem einzelnen Schritt unseres Verfahrens entspricht eindeutig eine Ordnungszahl, nämlich die Ordnungszahl der gerade ermittelten wohlgeordneten Teilmenge von N (im gegenwärtigen Moment die Ordnungszahl von $\overline{S}$). Umgekehrt entsprechen auch den „ersten" Ordnungszahlen je eindeutig bestimmte Schritte unseres Verfahrens; so entspricht z. B. der Ordnungszahl 1 bzw. 2 (als der Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge $\{a\}$ bzw. $\{a, b\}$) der erste bzw. zweite Schritt. Genau in derselben Art, wie wir die Reihe der Ordnungszahlen unbegrenzt fortsetzen konnten, wird dies bis zu

einer gewissen Grenze auch für unser Verfahren und für die mit ihm verknüpfte Bestimmung einer wohlgeordneten Teilmenge von N gelten[1].

Diese Grenze aber, von der an wir den Ordnungszahlen keine Fortsetzung unseres Verfahrens mehr zuordnen können, kann nur dadurch erreicht werden, daß sich die gegebene Menge M infolge der sukzessiven Entnahme ausgezeichneter Elemente als erschöpft erweist. Schärfer ausgedrückt: stellt sich bei einem bestimmten Schritt die gegebene Menge M, als Vereinigungsmenge einer wohlgeordneten und einer beliebigen Menge (entsprechend der obigen Beziehung $M = \overline{S} + S$) aufgefaßt, in folgender Form dar: $M = \overline{V} + V$ ($\overline{V}$ wohlgeordnet, V beliebig), so kann die Nichtfortsetzbarkeit des Verfahrens nur daran liegen, daß V *die Nullmenge ist*, also überhaupt kein Element enthält. In der Tat: enthält V noch Elemente und bezeichnen wir das ausgezeichnete Element von V mit w, die durch Entfernung von w aus V entstehende Teilmenge mit W und die wohlgeordnete Menge, die aus $\overline{V}$ durch Hinzufügung von w nach allen Elementen von $\overline{V}$ hervorgeht, mit $\overline{W}$, so ist M als Vereinigungsmenge von $\overline{W}$ und W darstellbar; wir können also unser Verfahren, solange die Nullmenge nicht erreicht ist, stets noch weiter fortsetzen und mit der Ordnungszahl von $\overline{W}$ eine größere Ordnungszahl als die bisherigen erreichen. (Diese beliebige Fortsetzbarkeit des Verfahrens entspricht dem nämlichen eindeutigen Bildungsgesetz, auf Grund dessen wir gemäß Satz 2 die Reihe der Ordnungszahlen schrittweise bilden und unbegrenzt fortsetzen konnten.) Wenn also, wie vorausgesetzt, unser Verfahren nichtfortsetzbar geworden ist, so enthält die an der Grenze des Verfahrens auftretende Menge V überhaupt kein Element; die Beziehung $M = \overline{V} + V$ lautet $M = \overline{V}$. Da endlich $\overline{V}$ eine wohlgeordnete Menge ist (mit der wir jetzt die bisher nicht völlig bestimmte Menge N identifizieren können und wollen), so haben wir die beliebig gegebene Menge M als eine wohlgeordnete Menge N dargestellt, also das Ziel des Wohlordnungssatzes erreicht.

Auf die Einwendungen, die gegen den Wohlordnungssatz erhoben worden sind, soll in den §§ 14—16 (S. 227, 249 und 299ff.) eingegangen werden; dabei wird auch der Unterschied zwischen der *wirklichen Herstellung* einer Wohlordnung einer gegebenen Menge und der *bloßen Möglichkeit* der Wohlordnung, wie sie der Wohlordnungssatz behauptet, deutlich hervortreten. Hier sei in bezug auf die Bedeutung der Wohlordnung nur noch bemerkt, daß der Wohlordnungssatz keineswegs allein für das Gebiet der Mengenlehre von Wichtigkeit ist; in verschiedenen (arithmetischen wie analytischen) Gebieten der Mathematik gibt es wichtige Fragen, deren Beantwortung sich nur unter Benutzung des Wohlordnungssatzes ermöglichen läßt, vor allem, weil vielfach

---

[1] Gegen diese Heranziehung der „Reihe der Ordnungszahlen", die bei ZERMELO vermieden wird, sind gewisse Einwände möglich; vgl. S. 212.

erst durch ihn das Verfahren der vollständigen Induktion (S. 191f.) ermöglicht wird. Dieser Satz muß daher, auch abgesehen von dem besonderen Reiz der Mengenlehre, in eine Reihe mit den wichtigsten und berühmtesten mathematischen Lehrsätzen gestellt werden.

6. Beweis des Wohlordnungssatzes. Nach der vorangehenden Betrachtung wird es auch dem weniger geübten Leser nicht mehr allzu schwer fallen, das volle Verständnis für den *ersten* ZERMELO*schen Beweis* des Wohlordnungssatzes zu finden, der jetzt in aller Ausführlichkeit dargestellt werden soll. Der zweite Beweis ZERMELOS ist zwar grundsätzlich einfacher (und auch in gewissem Sinn bedeutungsvoller), insofern als er im Gegensatz zu dem nachstehend dargestellten ersten Beweis die Theorie der Ordnung (und erst recht die der Wohlordnung) nicht heranzieht, sondern mit einigen wenigen der allgemeinsten und begrifflich einfachsten Grundbegriffe der Mengenlehre auskommt. Vom didaktischen Standpunkt aus steht dem indes als Nachteil gegenüber, daß der zweite Beweis, der namentlich von DEDEKINDS Kettentheorie Gebrauch macht, ein weit abstrakteres und darum schwierigeres Gepräge zeigt; vgl. dazu S. 205ff.

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Zunächst zwei in der Mengenlehre vielfach übliche Bezeichnungen, die wir bisher ohne Umständlichkeit vermeiden konnten, die aber für den folgenden Beweis sehr nützlich sind.

Ist N eine Teilmenge der Menge M, so bezeichnen wir die Menge aller nicht in N vorkommenden Elemente von M durch

$$M - N,$$

in naturgemäßer Analogie zur Bedeutung des Minuszeichens in der Arithmetik. Es ist also z. B. stets $M - 0 = M$; ist m ein Element aus M, so bedeutet $M - \{m\}$ die Menge aller von m verschiedenen Elemente aus M. Die früher (S. 96) berührte Tatsache, daß eine vernünftige Subtraktion zwischen den Kardinalzahlen sich nicht allgemein erklären läßt, wird durch diese (auf Mengen und zwar auf den Fall einer *Teilmenge* N beschränkte) Schreibweise nicht berührt.

Ferner kennzeichnen wir die Tatsache, daß A ein Abschnitt einer wohlgeordneten Menge M ist, durch

$$A \prec M.$$

Wir verwenden also das sonst für die Anordnungsbeziehung in geordneten Mengen gültige Zeichen $\prec$; ein Mißverständnis wird sich nicht ergeben, um so mehr als die hier eingeführte Bezeichnung ja nur für (wohlgeordnete) *Mengen* M und A in Betracht kommt (und übrigens, wenn man an die Ordnungszahlen von A und M denkt, gemäß Definition 1 ganz naheliegend erscheinen wird).

Nachstehend bezeichnet M die durch den folgenden Beweis als wohlordnungsfähig zu erweisende Menge. Wir wollen, wie in der vorangegangenen Beweisskizze, für alle von 0 verschiedenen Teilmengen von M (M selbst eingeschlossen) *eine Auswahl je eines ausgezeichneten Elements jeder Teilmenge* getroffen denken. Der mit dem allgemeinen Funktionsbegriff der Mathematik (vgl. S. 105) vertraute Leser wird die Gesamtheit dieser Auswahlakte als eine Funktion auffassen, die jeder Teilmenge von M (d. h. jedem Elemente von $\mathfrak{U}M$) außer 0 ein in ihr enthaltenes Element als Funktionswert eindeutig — übrigens keineswegs umkehrbar eindeutig — zuordnet; die unabhängige Veränderliche durchläuft die Teilmengen,

die abhängige deren ausgezeichnete Elemente. Dieser Sachverhalt führt uns dazu, den Fall, daß n das ausgezeichnete Element der Teilmenge N von M ist, zu bezeichnen durch die Schreibweise

$$n = f(N);$$

mit f wird hier die Funktion oder Regel („Auswahlfunktion") angedeutet, die jeder Teilmenge N das ausgezeichnete Element n von N zuweist. Natürlich sind zu einer gegebenen Menge M verschiedene Auswahlfunktionen denkbar, unter denen eine beliebige fortan zugrunde zu legen ist; die Ermittlung überhaupt einer Auswahlfunktion kann wesentlichen Schwierigkeiten begegnen, während es, sobald eine solche vorliegt, ein leichtes ist, weitere Auswahlfunktionen anzugeben.

Als letzte Vorbereitung stellen wir dem zu führenden Beweis die folgende Definition von ZERMELO voran:

Definition. Ist M eine beliebige geordnete oder nicht geordnete Menge, so heißt eine *Teilmenge* Γ von M *eine Gammafolge von* M, wenn

erstens Γ geordnet, und zwar wohlgeordnet ist (ohne Rücksicht auf die Nichtordnung oder eine etwaige Ordnung von M) und

zweitens für jeden Abschnitt A von Γ, der durch das Element a aus Γ bestimmt sei, gilt:

$$f(M - A) = a.$$

Der Begriff der Gammafolge[1] hängt also von der willkürlich zugrunde gelegten Auswahlfunktion ab. Die erste dieser Bedingungen bedarf keiner Erläuterung. In der zweiten stellt der Abschnitt A der wohlgeordneten Menge Γ, die selbst eine Teilmenge von M ist, wiederum eine Teilmenge von M dar. Während Γ eventuell *sämtliche* Elemente von M umfassen kann, ist dies für A natürlich unmöglich, der Natur eines Abschnitts wegen; z. B. kommt das den Abschnitt A bestimmende Element a von Γ (und von M) in A nicht vor. $M - A$ ist daher eine von 0 verschiedene Teilmenge von M; daß ihr ausgezeichnetes Element a gerade das den Abschnitt A bestimmende Element von Γ sei und somit a in Γ den sämtlichen Elementen von A unmittelbar nachfolge, ist die charakteristische Bedingung, die die Gammafolgen unter allen wohlgeordneten Teilmengen von M auszeichnet.

Als Beispiele seien die einfachsten Gammafolgen angeführt. Setzen wir $A = 0$, d. h. betrachten wir den durch das erste Element m_0 einer Gammafolge Γ bestimmten Abschnitt, so folgt $m_0 = f(M - 0) = f(M)$; wir erhalten so das Ergebnis: *Das erste Element jeder Gammafolge von M ist das ausgezeichnete Element der Menge M selbst.* Daher ist z. B. die Menge $\{m_0\}$, die nur dieses ausgezeichnete Element von M enthält, eine Gammafolge; ebenso die Menge $\{m_0, m_1\}$, die nach m_0 noch $m_1 = f(M - \{m_0\})$ enthält. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens (gemäß der zweiten Definitionseigenschaft der Gammafolgen) erhält man, vorausgesetzt daß M eine unendliche Menge ist, unendlichviele endliche Gammafolgen $\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$; hierbei bedeutet für jeden Index k stets m_k das ausgezeichnete Element der Menge $M - \{m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$. Man schließt aus der Definition unmittelbar, daß *jede* Gammafolge mit diesen Elementen m_0, m_1 usw. der Reihe nach beginnen muß, und erkennt danach leicht den Zusammenhang des Begriffs der Gammafolge mit der vorher gegebenen Begründung des Wohlordnungssatzes.

---

[1] Der Ausdruck „Folge" soll eine kurze Bezeichnung für „wohlgeordnete Menge" darstellen. Trotz der Bequemlichkeit dieses Ausdrucks wurde hier sonst von seiner Verwendung abgesehen, und zwar in Rücksicht auf seinen spezielleren Gebrauch außerhalb der Mengenlehre (im Sinn von „abgezählte Menge", nur ohne die Bedingung, daß die einzelnen Elemente alle verschieden sein sollen).

Wir gehen nun zum Beweis dafür über, daß die beliebig gegebene Menge M sich wohlordnen läßt, und zerlegen ihn in vier Teile 1. bis 4., von denen jeder dem Nachweis einer an die Spitze des Teiles gestellten Behauptung gewidmet ist.

1. *Von zwei verschiedenen Gammafolgen Γ_1 und Γ_2 von M ist éine ein Abschnitt der anderen.*

Beweis: Da jede Gammafolge eine wohlgeordnete Menge ist, muß nach Hauptsatz 1 (S. 174) jedenfalls eine der Mengen Γ_1 und Γ_2 einem Abschnitt der anderen *ähnlich* sein, wenn nicht gar beide einander ähnlich sind. Es sei also etwa

$$\Gamma_1 \simeq \Gamma_2' \leqq \Gamma_2 .$$

Fassen wir den zu Γ_1 ähnlichen Abschnitt Γ_2' von Γ_2 (allenfalls mit Γ_2 zusammenfallend) näher ins Auge, so erkennen wir, daß er „im Anfang" sogar völlig mit Γ_1 übereinstimmt; denn beide Mengen haben, wie jede Gammafolge (siehe oben), $m_0 = f(M)$ zum ersten Element, ebenso $m_1 = f(M - \{m_0\})$ zum zweiten usw. Wenn bei der (nach Satz 11 von S. 180 übrigens eindeutig bestimmten) ähnlichen Abbildung zwischen Γ_1 und Γ_2' überhaupt einmal zwei *verschiedene* Elemente einander zugeordnet sind, d. h. wenn beide Mengen nicht ganz und gar miteinander zusammenfallen, so muß es unter den Elementen der wohlgeordneten Menge Γ_1 ein erstes a_1 geben, das bei jener ähnlichen Abbildung einem *anderen* Element a_2 von Γ_2' zugeordnet ist. Da dann alle einander entsprechenden, *vor* a_1 bzw. a_2 in Γ_1 bzw. Γ_2' stehenden Elemente paarweise übereinstimmen, ist der durch a_1 bestimmte Abschnitt A_1 von Γ_1 identisch mit dem durch a_2 bestimmten Abschnitt A_2 von Γ_2' (oder also von Γ_2). Aus $A_1 = A_2$ folgt aber (nach der zweiten Eigenschaft der Gammafolgen) für die Gammafolgen Γ_1 und Γ_2:

$$a_1 = f(M - A_1) = f(M - A_2) = a_2 ;$$

das widerspricht der Voraussetzung, wonach a_1 und a_2 voneinander verschieden sein sollten. Die Annahme, daß überhaupt Paare *verschiedener* einander zugeordneter Elemente aus Γ_1 und Γ_2' existieren (und daher ein erstes solches Paar), muß also fallen gelassen werden; die wohlgeordneten Mengen Γ_1 und Γ_2' sind somit nicht nur ähnlich, sondern miteinander identisch, d. h. Γ_1 ist wirklich, falls überhaupt von Γ_2 verschieden, ein Abschnitt von Γ_2.

Das Prinzip des vorstehenden Beweises ist offenbar folgendes: Gleich nach der Definition der Gammafolgen wurde oben unter Anführung von Beispielen gezeigt, daß alle Gammafolgen von M mit den nämlichen Elementen $m_0, m_1, \ldots, m_n$ beginnen; dieser im „Anfang" vorhandene einheitliche Bau der Gammafolgen erweist sich auf Grund einer schon im vorigen Paragraphen (vgl. S. 180 sowie Aufgabe 5 auf S. 184) wiederholt angewandten Beweismethode als nicht nur im Anfang, sondern *durchgehends* zutreffend, d. h. so weit, wie die betrachtete Gammafolge überhaupt reicht.

2. *Die Gesamtheit der Elemente aller Gammafolgen der Menge M kann so geordnet werden, daß die dadurch entstehende geordnete Menge Σ wohlgeordnet ist und daß überdies die Menge Σ je zwei ihrer Elemente a_1 und a_2 stets in der nämlichen Reihenfolge enthält, in der diese Elemente in irgendeiner Gammafolge von M, die a_1 und a_2 umfaßt, auftreten.* Etwas anders ausgedrückt: Bildet man, ohne Rücksicht auf die in den Gammafolgen herrschende Ordnung, die Vereinigungsmenge aller Gammafolgen (gemäß Definition 2 des § 7, S. 80 f.), so kann diese Vereinigungsmenge so geordnet werden, daß die Ordnungsbeziehungen, wie sie in jeder beliebigen Gammafolge gelten, unverändert erhalten bleiben; diese Ordnung ist überdies von selbst eine Wohlordnung.

Durchführung und Beweis: Wir bilden zunächst die (ungeordnete) Vereinigungsmenge S aller Gammafolgen. Um ihr eine Ordnung aufzuprägen, bedenken wir, daß nach der Definition der Menge S von irgend zwei Elementen a_1

und a_2 dieser Menge jedes (mindestens) einer Gammafolge angehören muß, etwa a_1 der Gammafolge Γ_1 und a_2 der Gammafolge Γ_2. Nach 1. sind diese beiden Gammafolgen entweder identisch, oder eine (etwa Γ_1) ist ein Abschnitt der anderen (Γ_2). Da Γ_2 auch alle Elemente jedes Abschnitts von sich enthält, gehören in jedem Falle a_1 und a_2 einer und derselben Gammafolge Γ_2 an. Wir setzen nun fest: Für die Elemente a_1 und a_2 von S soll in dieser Menge $a_1 \prec a_2$ oder $a_2 \prec a_1$ gelten, je nachdem in der Gammafolge Γ_2 $a_1 \prec a_2$ oder $a_2 \prec a_1$ gilt. Die so aus S entstehende geordnete Menge werde mit Σ bezeichnet.

Diese Festsetzung erscheint zunächst weitgehend willkürlich und vieldeutig, insofern als die Gammafolge Γ_2, die für die Ordnung von a_1 und a_2 in Σ maßgebend sein soll, in sehr willkürlicher Weise gewählt war. Wir haben uns also vor allem davon zu überzeugen, daß diese Willkür bedeutungslos ist, d. h. daß in jeder anderen Gammafolge Γ_3, in der a_1 und a_2 überhaupt vorkommen, beide Elemente in derselben Anordnung stehen wie in Γ_2. In der Tat ist nun nach 1. von den beiden Gammafolgen Γ_2 und Γ_3 wiederum eine ein Abschnitt der andern. In einem Abschnitt (wie überhaupt in einer Teilmenge) einer wohlgeordneten Menge gelten aber für die Elemente des Abschnitts stets die gleichen Ordnungsbeziehungen wie in der Menge selbst. Bei der getroffenen Festsetzung finden sich also die Ordnungsbeziehungen, wie sie in *jeder* Gammafolge von M bestehen, in Σ unverändert wieder. — Hieraus ergibt sich: gilt für drei Elemente a, b, c aus Σ nach unserer Festsetzung etwa $a \prec b$, $b \prec c$, so folgt stets $a \prec c$, wie es (vgl. S. 125) für jede Ordnungsbeziehung erfüllt sein muß; denn $a \prec c$ gilt ja auch in jeder Gammafolge, die a, b, c gleichzeitig enthält. Ferner können wir aus der Art der Ordnung in Σ folgern, daß *die Menge aller Elemente von Σ, die einem beliebigen Element a von Σ vorangehen, zusammenfällt mit der Menge aller vor a stehenden Elemente einer beliebigen a enthaltenden Gammafolge Γ* (d. h. mit dem durch a bestimmten Abschnitt von Γ); denn alle dem Element a vorangehenden Elemente von Σ müssen nach der Definition von S in irgendwelchen Gammafolgen vorkommen, und zwar (wegen 1. und der festgesetzten Ordnung in Σ) in jeder a enthaltenden Gammafolge. Das letzte Ergebnis zeigt, daß die Menge Σ wenigstens „im Anfang" wohlgeordnet ist, gleich jeder Gammafolge.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß die getroffene Festsetzung unsere geordnete Vereinigungsmenge Σ zu einer *durchwegs wohlgeordneten* Menge stempelt. Zu diesem Zwecke weisen wir gemäß der Definition der Wohlordnung nach, daß eine beliebige (geordnete) Teilmenge T von Σ ein erstes Element besitzt. Ist t ein beliebiges Element von T, so gehört t (nach der Definition von Σ) mindestens einer Gammafolge Γ an; dann ist nach dem Ende des vorigen Absatzes die Menge aller vor t stehenden Elemente von Σ ein Abschnitt von Γ, also die Menge T_0 aller vor t stehenden Elemente der Teilmenge T von Σ gewiß eine Teilmenge von Γ (nämlich Teilmenge eines Abschnitts von Γ). T_0 hat daher als Teilmenge der (wohlgeordneten) Gammafolge Γ ein erstes Element t_0. Schließlich ist t_0 gleichzeitig das erste Element von T, wie aus der Definition von T_0 (als eines Anfangsstückes von T) hervorgeht; die beliebig gewählte Teilmenge T von Σ hat somit ein erstes Element, d. h. Σ ist wohlgeordnet. — Damit ist der schwierigste (und auch entscheidende) Teil des gesamten Beweises überwunden.

3. *Die durch 2. definierte (wohlgeordnete) Menge Σ ist selbst eine Gammafolge und daher die größte Gammafolge von M.*

Beweis: Die erste Eigenschaft der Gammafolgen, wohlgeordnet zu sein, ist für Σ bereits als erfüllt nachgewiesen. Zur Prüfung hinsichtlich der zweiten Eigenschaft bezeichnen wir einen beliebigen Abschnitt von Σ mit A; wird A durch das Element a von Σ bestimmt, so gehört a nach der Definition von Σ einer Gammafolge Γ an; auch in Γ ist (vgl. 2.) A der durch a bestimmte Abschnitt. Da Γ eine Gammafolge ist, gilt nach der zweiten Eigenschaft jeder solchen: $a = f(M - A)$.

Diese für den beliebig gewählten Abschnitt A von Σ gültige Beziehung zeigt, daß Σ in der Tat eine Gammafolge ist, und zwar die größte überhaupt vorkommende, da Σ alle Elemente sämtlicher Gammafolgen umfassen sollte.

Der Beweis von 3. wie auch des letzten Teiles von 2. beruht ersichtlich darauf, daß Σ „soweit als man will" mit einer geeigneten Gammafolge identifiziert werden kann und von dieser dann die beiden Eigenschaften jeder Gammafolge übernimmt.

4. *Die wohlgeordnete Menge Σ umfaßt alle Elemente von M und stellt daher eine Wohlordnung von M dar.*

Beweis: Wir gehen genau wie am Ende des zuerst skizzierten Beweises des Wohlordnungssatzes vor, überzeugen uns nämlich davon, daß der im Resultat 3. zum Ausdruck kommende Abschluß der Bildung von Gammafolgen seinen Grund nur in der Erschöpfung der Menge M durch Σ haben kann; anderenfalls ließe sich eine noch umfassendere Gammafolge als Σ herstellen. In der Tat: Γ sei eine beliebige Gammafolge von M, die M *nicht* erschöpft, d. h. nicht alle Elemente von M umfaßt. Dann ist die Menge $M - \Gamma$ eine sich nicht auf die Nullmenge reduzierende Teilmenge von M, deren ausgezeichnetes Element wir mit $z = f(M - \Gamma)$ bezeichnen. Bilden wir nun im Sinne der Addition geordneter Mengen die geordnete Summe $\Gamma + \{z\}$, d. h. fügen wir den sämtlichen Elementen von Γ ohne Änderung ihrer Reihenfolge noch z als letztes Element hinzu, so ist auch die Menge $\Gamma + \{z\}$ eine Gammafolge, und zwar eine umfassendere als Γ. Denn $\Gamma + \{z\}$ ist als Summe zweier wohlgeordneter Mengen nach Satz 5 des vorigen Paragraphen (S. 175) selbst wohlgeordnet. Ferner trifft die zweite Eigenschaft der Gammafolgen, die für alle zu Γ gehörigen Elemente von $\Gamma + \{z\}$ schon wegen des Gammafolgencharakters von Γ erfüllt ist, auch für das letzte Element z zu; der durch z bestimmte Abschnitt von $\Gamma + \{z\}$ ist nämlich Γ und wirklich ist ja $f(M - \Gamma) = z$, wie es die zweite Eigenschaft erfordert. Zu jeder *die Menge M nicht erschöpfenden* Gammafolge gibt es also noch umfassendere Gammafolgen; da Σ nach 3. die umfassendste Gammafolge ist, muß sie alle Elemente von M enthalten. Als Teilmenge von M (nach Definition der Gammafolgen) fällt Σ demnach mit der gegebenen Menge M dem Elementebestand nach zusammen und stellt somit in der Tat eine Wohlordnung von M dar.

Es sei im Hinblick auf § 16 noch hervorgehoben, daß in diesem Beweis nur Mengen benutzt werden, deren „Umfang" mit dem Umfang der zu ordnenden Menge M zusammenhängt (Teilmengen von M, wie z. B. Gammafolgen, und Mengen von Teilmengen von M, d. h. Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$). Z. B. entspricht (bei Zugrundelegung einer bestimmten Auswahlfunktion) die in 2. herangezogene Gesamtheit aller Gammafolgen von M ersichtlich einer gewissen Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$. Unbestimmt weite Mengen wie die Gesamtheit aller Ordnungszahlen kommen dagegen nicht vor.

7. Der Vergleichbarkeitssatz. Unter den Folgen des Wohlordnungssatzes ist die wichtigste diejenige, die sich auf die Vergleichbarkeit beliebiger Mengen hinsichtlich ihrer Kardinalzahlen bezieht. Sind nämlich irgend zwei (nicht notwendig geordnete) Mengen gegeben, so können wir sie uns auf Grund des Wohlordnungssatzes in wohlgeordnete Mengen verwandelt denken. Nach dem zweiten Hauptsatz (S. 174) sind dann beide Mengen nicht nur bezüglich ihrer Ordnungszahlen, sondern auch bezüglich ihrer Kardinalzahlen vergleichbar. Der vierte unter den vier Fällen, die wir auf S. 71 hinsichtlich des gegenseitigen Verhaltens zweier Mengen in bezug auf ihre Kardinalzahlen unterscheiden mußten, wird

demnach durch den Wohlordnungssatz ausgeschlossen; vielmehr besteht der folgende einfachere Sachverhalt, der von vornherein zu vermuten war, aber ohne Heranziehung der Wohlordnung nicht bewiesen werden konnte (vgl. S. 76):

Satz von der Vergleichbarkeit beliebiger Mengen. *Zwei beliebige Mengen sind entweder äquivalent oder eine von ihnen besitzt eine kleinere Kardinalzahl als die andere. Von irgend zwei ungleichen Kardinalzahlen ist also* (*ganz ebenso wie von zwei verschiedenen gewöhnlichen Zahlen*) *stets eine kleiner als die andere.*

Hiermit wird das Bedenken hinfällig, aus dem heraus man sich scheute, die Mächtigkeiten als „Zahlen", nämlich als Kardinalzahlen, zu bezeichnen (vgl. S. 195). Jede Mächtigkeit ist ein Alef; es besteht kein Grund mehr, zwischen den Ausdrücken Mächtigkeit, Kardinalzahl und Alef zu unterscheiden. Es ist freilich eine keineswegs von vornherein selbstverständliche, vielmehr zum Nachdenken zwingende Erscheinung, daß eine so sehr im Mittelpunkt der *Kardinalzahltheorie* stehende Tatsache wie die Vergleichbarkeit sich nicht mit den Begriffen und Hilfsmitteln der Kardinalzahltheorie allein herleiten läßt, sondern der Krücken der *Ordnungstheorie* (nämlich des Wohlordnungssatzes) bedarf. Daß dieser Umweg im wesentlichen unvermeidlich ist, bedeutet trotz der größeren Allgemeinheit der Kardinalzahltheorie, die dieser bis heute den Vorrang gesichert hat, ein gewichtiges Argument zugunsten der systematischen Voranstellung der Ordnungstheorie; ein Argument, das nicht nur mathematisch (vgl. den Aufbau der Mengenlehre bei VON NEUMANN [2] und [4]), sondern auch logisch bedeutsam ist.

Im besonderen muß nach dem letzten Satz auch das Kontinuum einer Wohlordnung fähig sein, also die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums unter den Alefs $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ irgendwo vorkommen; *wo* unter ihnen, ist freilich noch nicht geklärt (Kontinuumproblem; vgl. S. 67 und 300 f.); man weiß nur, daß $\mathfrak{c}$ jedenfalls nicht gleich $\aleph_\omega$ ist (J. KÖNIG [1]). Für eine Reihe von Fragen, die von der Lösung des Kontinuumproblems abhängen, werde auf SIERPIŃSKI [5] und die dort angegebene Literatur verwiesen.

Wie schon in § 9 erwähnt wurde und auf S. 316ff. genauer zu erklären sein wird, läßt sich der Begriff der Ordnung völlig auf den der Menge zurückführen. Es gibt also jedenfalls auch einen Weg zum Beweis des Vergleichbarkeitssatzes, der formal die Theorie der Ordnung und Wohlordnung ganz und gar vermeidet; in der Tat ist dazu nicht einmal der volle Umweg über eine den Ordnungsbegriff umgehende Formulierung des Wohlordnungssatzes nötig, sondern man kann Wege einschlagen, die auf eine leichte Abkürzung hinauslaufen. Ein derartiger Beweis, dem natürlich vielmehr grundsätzliche als didaktische Bedeutung zukommt, soll hier noch angeschlossen werden; er ist auf den geübten Leser berechnet und gemäß den Bedürfnissen eines solchen dargestellt. Gleichzeitig führt der nachfolgende Beweis auch in den Gedankenkreis der Kettentheorie (DEDEKIND [2], HESSENBERG [8], ZERMELO [2]; vgl. auch HAUSDORFF [4], S. 56f.) sowie des zweiten ZERMELOschen Beweises des Wohlordnungssatzes ein; es ist wesentlich eine Umformung

dieses grundsätzlich bedeutsamen Beweises, die uns nachstehend direkt zum Vergleichbarkeitssatz gelangen läßt[1].

M und N seien die zwei beliebigen Mengen, deren Vergleichbarkeit nachgewiesen werden soll; es ist also zu zeigen (S. 76), daß M einer Teilmenge von N äquivalent ist oder umgekehrt. Jede Abbildung einer Teilmenge M' von M auf eine Teilmenge N' von N nennen wir im folgenden eine *Teilabbildung* φ zwischen M und N und bezeichnen sie auch durch $N' = \varphi\,(M')$. Offenbar existieren zwischen je zwei (von 0 verschiedenen) Mengen M und N stets Teilabbildungen, z. B. diejenigen, die lediglich éin gewisses Element von M éinem bestimmten Element von N zuordnen. Sind $N' = \varphi\,(M')$ und $N'' = \psi\,(M'')$ zwei verschiedene Teilabbildungen zwischen M und N, so heiße ψ eine *Erweiterung* von φ, wenn erstens M' eine eigentliche Teilmenge von M'' ist und zweitens beide Abbildungen für ihren gemeinsamen Argumentbereich M' übereinstimmende Bilder in N ergeben (so daß auch N' eine eigentliche Teilmenge von N'' ist); wir kennzeichnen die Tatsache, daß ψ eine Erweiterung von φ ist, durch die Schreibweise $\psi \supset \varphi$ (oder gleichbedeutend $\varphi \subset \psi$, „φ Teil von ψ"). Eine Teilabbildung, zu der überhaupt noch eine Erweiterung existiert, heiße *erweiterungsfähig*. Enthält im besonderen M'' nur ein einziges nicht schon in M' vorkommendes Element von M, so werde ψ eine *einfache Erweiterung* von φ genannt.

Eine Menge Φ von Teilabbildungen zwischen M und N soll *monoton* heißen, wenn von je zwei verschiedenen Elementen (Teilabbildungen) aus Φ stets eines eine Erweiterung des andern darstellt, mit anderen Worten: wenn für irgendwelche Elemente φ_1 und φ_2 aus Φ stets eine (und offenbar nur eine) der Beziehungen $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_1 \supset \varphi_2$, $\varphi_1 \subset \varphi_2$ gilt. (Es gibt also, wenn man den Begriff der Ordnung heranziehen will, in einer monotonen Menge eine sozusagen natürliche Reihenfolge der Elemente von engeren zu immer weiteren Teilabbildungen bzw. umgekehrt; daher die Bezeichnung „monoton", zu der man — wie zu diesem ganzen Gedankengang — auch S. 316f. vergleiche[2].) Ein einzelnes Element φ einer Menge Φ von Teilabbildungen zwischen M und N heiße *komparabel in* Φ, wenn es zu jedem Element ψ von Φ in einer der Beziehungen $\varphi = \psi$, $\varphi \supset \psi$, $\varphi \subset \psi$ steht; Φ ist also dann und nur dann monoton, wenn *jedes* Element von Φ in Φ komparabel ist. Schließlich verstehen wir unter der *Resultante* einer gegebenen monotonen Menge Φ von Teilabbildungen zwischen M und N diejenige Teilabbildung, die jedem Element von M, das überhaupt in irgendeiner der Teilabbildungen aus Φ herangezogen wird, das (durch sie alle übereinstimmend definierte) entsprechende Element von N zuordnet.

Offenbar gibt es zu jeder Teilabbildung $N' = \varphi\,(M')$, solange weder $M' = M$ noch $N' = N$, stets noch einfache Erweiterungen; man erhält solche, indem man den Zuordnungsvorschriften von φ noch die Zuordnung zwischen je einem beliebigen Element von $M - M'$ und von $N - N'$ hinzufügt. Wir brauchen demnach zum Beweis des Vergleichbarkeitssatzes nur zu zeigen, daß *es unter allen möglichen Teilabbildungen zwischen M und N mindestens eine gibt, die keiner* (*einfachen*)

---

[1] Die Anregung zu einem derartigen, gewissermaßen unmittelbaren Beweis des Vergleichbarkeitssatzes (mittels des Auswahlprinzips) verdanke ich den Herren H. Prüfer und A. Plessner, die mir unabhängig ihre Beweisanordnungen mitteilten. Aus Gründen, die lediglich mit dem Rahmen der vorangehenden Darstellung zusammenhängen, bin ich im wesentlichen der Anordnung Plessners gefolgt, die sich naturgemäß im Kern mit derjenigen Prüfers berührt.

[2] Die monotonen Mengen von Teilabbildungen lassen sich auffassen als besondere Vertreter einer allgemeineren Art von Mengen: nämlich der Mengen Φ von Teilabbildungen mit der Beschaffenheit, daß jedem Element von M, das in mehreren Teilabbildungen aus Φ herangezogen wird, durch all diese stets das nämliche Element von N zugeordnet wird. Auch der Begriff der Resultante gilt unverändert für derartige allgemeine Mengen.

Erweiterung mehr fähig ist; jede derartige Teilabbildung ordnet dann *jedem* Element einer der gegebenen Mengen umkehrbar eindeutig je ein gewisses Element der anderen zu und bildet somit jene auf eine Teilmenge dieser ab.

Zum Beweis der hervorgehobenen Behauptung legen wir zunächst — ganz wie beim Beweis des Wohlordnungssatzes — eine beliebige, aber von nun an festzuhaltende Auswahl „ausgezeichneter" Teilabbildungen zugrunde, indem wir uns zu jeder erweiterungsfähigen Teilabbildung φ irgendeine bestimmte einfache Erweiterung φ^+ von φ gewählt denken; φ^+ werde auch die Nachfolgerin von φ genannt. Eine Menge Φ von Teilabbildungen zwischen M und N soll eine Kette heißen, wenn

1. eine bestimmte willkürliche Teilabbildung φ_0 in Φ vorkommt[1];
2. gleichzeitig mit irgendeiner *erweiterungsfähigen* Teilabbildung φ aus Φ stets auch die Nachfolgerin φ^+ in Φ vorkommt;
3. zu jeder *monotonen* Teilmenge von Φ stets auch deren Resultante in Φ vorkommt.

Aus dieser Begriffsbildung folgt unmittelbar, daß der Durchschnitt beliebig (endlich oder unendlich) vieler Ketten wiederum eine Kette ist. Es gibt also eine kleinste Kette $\mathfrak{K}$, nämlich den Durchschnitt aller Ketten. Unser Ziel ist der Nachweis, daß $\mathfrak{K}$ *eine monotone Menge ist*; von dieser Feststellung werden wir unmittelbar zu dem gewünschten Ergebnis gelangen. Um jenes Ziel zu erreichen, überzeugen wir uns, daß die Menge der in $\mathfrak{K}$ komparabeln Elemente selbst eine Kette bildet.

In der Tat zeigt sich:

a) Jedes von φ_0 verschiedene Element aus $\mathfrak{K}$ ist eine Erweiterung von φ_0;[2] denn gäbe es in $\mathfrak{K}$ Teilabbildungen, für die das nicht zutrifft, so könnte man sie aus $\mathfrak{K}$ fortlassen, ohne die Kettennatur zu beeinträchtigen, und erhielte so eine eigentliche *Teilmenge* von $\mathfrak{K}$, die immer noch eine Kette wäre — entgegen der Definition von $\mathfrak{K}$. φ_0 ist also komparabel in $\mathfrak{K}$.

b) Ist die beliebige erweiterungsfähige Teilabbildung φ aus $\mathfrak{K}$ komparabel in $\mathfrak{K}$, so gilt das nämliche auch noch für die (in $\mathfrak{K}$ gleichfalls vorkommende) Nachfolgerin φ^+ von φ. Zum Nachweis dieser Behauptung genügt es zu zeigen, daß die Teilmenge $\overline{\mathfrak{K}}$ derjenigen Elemente ψ aus $\mathfrak{K}$, für die $\psi \subseteq \varphi$ oder $\psi \supseteq \varphi^+$ gilt, eine Kette ist; denn nach der Definition von $\mathfrak{K}$ fällt dann $\overline{\mathfrak{K}}$ mit $\mathfrak{K}$ zusammen, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt. Daß nun $\overline{\mathfrak{K}}$ zunächst die Ketteneigenschaften 1. und 3. besitzt, leuchtet ohne weiteres ein. Aber auch Eigenschaft 2. ist erfüllt: ist nämlich $\psi \subset \varphi$ (also ψ jedenfalls erweiterungsfähig), so ist auch noch $\psi^+ \subseteq \varphi$, da wegen der Komparabilität von φ sonst $\psi^+ \supset \varphi$ gelten müßte, was $\psi^+ \supset \varphi \supset \psi$ ergäbe im Widerspruch mit der Definition von ψ^+ (*einfache* Erweiterung von ψ); ist aber $\psi \supseteq \varphi^+$, so ist natürlich umsomehr $\psi^+ \supset \varphi^+$, vorausgesetzt daß ψ^+ überhaupt existiert.

c) Ist $\mathfrak{K}_0$ eine monotone Teilmenge von $\mathfrak{K}$, deren Elemente sämtlich in $\mathfrak{K}$ komparabel sind, so stellt die Resultante φ von $\mathfrak{K}_0$ ein wiederum komparables Element von $\mathfrak{K}$ dar. Zum Beweis hat man nur die Elemente ψ von $\mathfrak{K}$, die Erweiterungen *sämtlicher* Elemente von $\mathfrak{K}_0$ darstellen, von den übrigen zu unterscheiden, d. h. von den Elementen ψ, die entweder selbst oder von denen sogar Erweiterungen in $\mathfrak{K}_0$ vorkommen; erstere sind, soweit von φ verschieden, Erweiterungen von φ, für letztere stellt φ eine Erweiterung dar.

---

[1] Man kann für φ_0 etwa die (uneigentliche) Abbildung der Nullmenge auf sich selbst wählen, oder z. B. die Nachfolgerin dieser Abbildung, die einem bestimmten Element von M ein bestimmtes von N zuordnet.

[2] Das versteht sich offenbar von selbst, falls man φ_0 so wählt, wie in der vorigen Fußnote an erster Stelle angegeben.

Nach a) bis c) bilden die in $\mathfrak{K}$ komparabeln Elemente von $\mathfrak{K}$ eine Kette, die also (gemäß der Definition von $\mathfrak{K}$) mit $\mathfrak{K}$ zusammenfallen muß. $\mathfrak{K}$ ist demnach eine monotone Menge, wie wir zeigen wollten.

Schließlich ist die Resultante φ^* der Kette $\mathfrak{K}$ gemäß der Ketteneigenschaft 3. ein Element von $\mathfrak{K}$. *Diese Teilabbildung φ^* zwischen M und N läßt aber offenbar keine Erweiterung mehr zu;* denn anderenfalls müßte auch die Nachfolgerin von φ^* in $\mathfrak{K}$ auftreten, d. h. φ^* wäre nicht Resultante der Gesamtmenge $\mathfrak{K}$. φ^* ist somit eine Teilabbildung, die sämtlichen Elementen einer der Mengen M und N umkehrbar eindeutig Bilder in der anderen Menge zuordnet, womit der Vergleichbarkeitssatz bewiesen ist.

Aufgaben. 1. Sind α, β, γ Ordnungszahlen, so läßt sich aus $\alpha < \beta$ zwar stets $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ folgern, aber bei Umstellung der Summanden gilt nur noch $\alpha + \gamma \leqq \beta + \gamma$ (Gleichheitszeichen unentbehrlich). Beweis!

2. Sind α und β Ordnungszahlen und ist $\alpha < \beta$, so besitzt die Gleichung $\alpha + \xi = \beta$ stets eine einzige Ordnungszahl ξ als Lösung, während die Gleichung $\xi + \alpha = \beta$ entweder unlösbar sein oder auch mehrere (im allgemeinen sogar unendlichviele) verschiedene Lösungen aufweisen kann. Beweis!

3. Man zeige (vgl. S. 193), daß es zu jeder Menge von Ordnungszahlen weitere Ordnungszahlen gibt, die größer sind als jede Zahl der Menge!

4. Man beweise, daß jede Menge von Ordnungszahlen bzw. Alefs wohlgeordnet ist, falls die Ordnungszahlen bzw. Alefs ihrer Größe nach angeordnet werden!

5. Man zeige (mittels der induktiven Definition der Potenz auf S. 191), daß für jedes endliche n stets $n^\omega = \omega$! (Gegensatz zur Beziehung $n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$!)

6. Man beweise durch transfinite Induktion, daß für Ordnungszahlen stets gilt: $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$!

7. Auf Grund des Beweises des Wohlordnungssatzes ermittle man diejenigen Wohlordnungen der Menge N der natürlichen Zahlen, die je einer der beiden folgenden Auswahlfunktionen für die Teilmengen von N entsprechen:

a) In jeder von 0 verschiedenen Teilmenge von N gilt als ausgezeichnetes Element die Zahl, die den kleinsten (von 1 verschiedenen) Teiler — m. a. W. den kleinsten Primfaktor — besitzt. Kommen hiernach mehrere Zahlen in Betracht, so hat den Vorzug die Zahl, in der jener kleinste Teiler in möglichst niedriger Potenz vorkommt, und unter etwa mehreren hiernach noch gleichberechtigten Zahlen ist die kleinste auszuzeichnen.

b) In jeder von 0 verschiedenen Teilmenge von N gilt als ausgezeichnetes Element die Zahl mit der kleinsten Anzahl von Primfaktoren, wobei jeder Primfaktor so oft zu zählen ist, als er in der Zahl vorkommt. Erscheinen hiernach mehrere Zahlen als gleichberechtigt,

so hat den Vorzug die Zahl, die mit dem kleinsten Faktor beginnt, falls man die Primfaktoren der Größe nach anordnet und für den Vergleich je zweier Zahlen von dem etwa übereinstimmenden Anfang ihrer Faktorenzerlegung absieht.

Man bestimme die Ordnungszahlen der sich so ergebenden Wohlordnungen von N (vgl. zu b) die Fußnote auf S. 190) und mache sich klar, daß man zur Herstellung der Wohlordnung nur je einen (verschwindend kleinen) Bruchteil der durch obige Funktionen ermöglichten Auswahlakte benötigt!

Viertes Kapitel.

Erschütterungen der Grundlagen und ihre Folgen.

§ 13. Die Antinomien der Mengenlehre.

1. Historisches. Als im vorigen Paragraphen (S. 199) von Einwänden die Rede war, die gegen den Wohlordnungssatz erhoben worden sind, mag mancher Leser den Kopf geschüttelt und sich gefragt haben: sind denn Einwände gegen mathematisch bewiesene Sätze möglich, handelt es sich denn in der Mengenlehre, die doch eine mathematische Disziplin ist, um Glaubenssachen und nicht vielmehr um ein durch logisch zwingende Schlüsse errichtetes Gebäude? In dieser Beziehung muß sich der Leser allerdings zunächst mit einer Enttäuschung abfinden: das Gebäude der Mengenlehre, wie wir es in seinen Umrissen bisher kennengelernt haben, ist in der Tat nicht vollständig sicher und unangreifbar zusammengefügt. Wir werden nämlich sehen, daß aus unserem bisherigen Mengenbegriff und seiner Verwendung logische Unstimmigkeiten, die sog. *Antinomien* oder *Paradoxien der Mengenlehre*, hergeleitet werden können — eine Tatsache, die an sich unsere Überlegungen erschüttert. Übrigens erscheinen diese Antinomien der heutigen Generation im allgemeinen vom mathematischen Standpunkt aus verhältnismäßig harmlos; dazu hat außer dem Umstand, daß die Widersprüche keineswegs spezifisch mathematischen Charakter tragen und im Grunde gar nicht so neuartig sind, psychologisch wohl auch stark der Erfolg beigetragen, mit dem man inzwischen die Mengenlehre vor den Antinomien zu bewahren gelernt hat.

Der Widerspruch der Mathematiker, der sich in den ersten Jahren (und selbst Jahrzehnten) des CANTORschen Schaffens aus einem historisch verständlichen Mißtrauen gegenüber dem Unendlichen heraus erhoben hatte, war im letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts allmählich beinahe verstummt, angesichts der unbestreitbar großen Erfolge der jungen Mengenlehre und ihrer sich mehr und mehr systematisch ge-

staltenden Begründung. Da zeigte sich zur Überraschung weitester Kreise um die Jahrhundertwende, daß der Mengenbegriff CANTORs für Antinomien, wie wir sie nachstehend kennenlernen, Raum läßt. Obgleich der Beseitigung dieser Unstimmigkeiten große und keineswegs erfolglose Bemühungen gewidmet wurden, haben doch die Antinomien wie auch andere, z. T. durch sie ausgelöste grundsätzliche Erwägungen seitdem manche, darunter auch ganz hervorragende Mathematiker veranlaßt, mehr oder minder große Teile der Mengenlehre abzulehnen; auch wo ein schlechthin abweisender Standpunkt nicht eingenommen wurde, hat begreiflicherweise das Vorhandensein einer mathematischen Disziplin, die sich logische Blößen gab und in der es vielmehr auf subjektive Überzeugung als auf zwingend begründete Erkenntnis anzukommen schien, großes Unbehagen hervorgerufen.

Die Antinomien schlugen wie ein Gewitter in die eben erst beruhigte mathematische Atmosphäre der Jahrhundertwende hinein und ihre Wirkung war vielfach geradezu niederschmetternd. Zwar hat CANTOR selbst, der um jene Zeit seine Veröffentlichungen bereits abgeschlossen hatte, die Zuversicht auf das siegreiche Durchdringen seiner Ideen niemals aufgegeben. Aber so hervorragende und in mancher Hinsicht ihm geistesverwandte Forscher wie DEDEKIND und FREGE räumten ihre Stellung, indem jener seine bahnbrechende Schrift [2] lange Zeit hindurch nicht mehr neu auflegen ließ, dieser im Anhang seines zweibändigen Hauptwerks [2] (II, S. 253) auf RUSSELLs Bemerkung hin (siehe unten) eine der Grundlagen seines Gebäudes als erschüttert erklärte. Der Siegesflug des Unendlichgroßen schien infolge der Antinomien durch einen jähen Absturz beendet.

Die wichtigsten der Versuche, die zur Rettung der Mengenlehre mit teils radikal-operativen, teils behutsam-konservativen Methoden angestellt worden sind, werden in den nächsten Paragraphen erörtert werden; dabei werden die *besonderen* Steine des Anstoßes, die den einzelnen Kritikern oder Kritikrichtungen eine Reinigung als nötig erscheinen lassen, noch näher hervorzuheben sein. Zunächst sei von den Antinomien die Rede, die für *jeden* mathematischen oder auch philosophischen Standpunkt gebieterisch nach einer Klärung oder Beseitigung verlangen.

2. Die „logischen" Antinomien (RUSSELL, BURALI-FORTI usw.). Bei der historisch und sachlich wichtigsten Klasse handelt es sich um Widersprüche, die daraus entstehen, daß „alle Dinge" von einer gewissen Eigenschaft zu einer Menge vereinigt werden. Antinomien dieser Art können unter Verwendung spezieller oder auch ganz allgemeiner Begriffe der Mengenlehre gebildet werden. Wir wollen mit einer Antinomie allgemeiner Natur beginnen, mit dem (unabhängig auch von ZERMELO gefundenen) RUSSELLschen Paradoxon (siehe RUSSELL [1], ein in diesem Zusammenhang heute noch bedeutsames Werk).

Eine gegebene Menge enthält entweder sich selbst als Element oder sie enthält sich nicht als Element. Dieses logische (disjunktive) Urteil wird den meisten als unzweifelhaft richtig gelten (vgl. jedoch S. 229ff.), unabhängig von der Frage, ob es wirklich Mengen beider Art gibt; übrigens kann man z. B. die „Menge aller Abstrakta" als Beispiel einer Menge der ersten Art ansehen, während von der zweiten Art die Nullmenge ist, die gar kein Element enthält, wie überhaupt jede Menge, zu deren Elementen keine Menge gehört (also z. B. jede Menge von Früchten oder von Zahlen). Wir wollen jede Menge der zweiten Art für den Augenblick als eine „Normalmenge" bezeichnen; offenbar stellt ja diese zweite Art wirklich den gewöhnlichen Fall dar. Es sei nun M diejenige Menge, welche alle Normalmengen umfaßt; ist also m irgendeine Menge, die sich selbst nicht als Element enthält, so soll m ein Element von M sein und umgekehrt soll die Menge M zwar jede derartige Menge m als Element enthalten, aber keine anderen Elemente. Wir wollen untersuchen, ob die Menge M selbst eine Normalmenge ist oder nicht.

Es werde zunächst angenommen, M sei keine Normalmenge, enthalte sich also selbst als Element; dann enthält M ein Element (nämlich M selbst), das keine Normalmenge ist, im Widerspruch mit der Voraussetzung, wonach M nur Normalmengen enthält. Die Annahme, daß M sich selbst enthalte, trifft also nicht zu, vielmehr ist aus dem erzielten Widerspruch zu schließen, daß M eine Normalmenge sein muß. Aber auch dieses (anscheinend durch die vorangehende Überlegung streng bewiesene) Ergebnis führt uns zu einem Widerspruch; denn ist M eine Normalmenge, so gehört M zu den Mengen, die nach der Definition von M die Elemente von M bilden, d. h. M muß ein Element von M sein und ist somit keine Normalmenge. Wir sind so zu einem logischen Widerspruch gelangt[1]. Die Menge M — d. i. *die Menge aller Mengen, die sich nicht enthalten* — weist demnach die Paradoxie auf, daß sowohl die Annahme, M enthalte sich als Element, wie auch die kontradiktorisch entgegengesetzte Annahme, M enthalte sich nicht als Element, auf einen Widerspruch führt. Die Menge M ist demnach ein in sich widerspruchsvoller Begriff und daher logisch unzulässig, um so mehr mathematisch unzulässig. Da aber in die Definition von M im wesentlichen nur der Begriff der Menge eingeht, so muß dieser Begriff, auf den sich ja unsere gesamten Überlegungen aufgebaut haben, mindestens in seiner bisherigen Umgrenzung einen Widerspruch in sich bergen.

Eine mit dieser RUSSELLschen Antinomie nahe verwandte, nur noch einfachere Paradoxie erhalten wir, wenn wir die Menge L aller

[1] Diese abstrakte Schlußweise wird dem Leser sogleich verständlich werden, wenn er versucht, sie einmal *selbständig* durchzudenken; er braucht nur einen der Fälle zu setzen, daß die Menge M entweder sich selbst als Element enthalte oder nicht, und wird daraus von selbst auf einen Widerspruch schließen.

überhaupt denkbaren Mengen betrachten. Diese Menge scheint die umfassendste überhaupt denkbare Menge darzustellen, in der nur Mengen als Elemente auftreten. Dennoch können wir im Widerspruch zu diesem Wesen von L leicht eine noch umfassendere derartige Menge bilden, z. B. dadurch, daß wir die Menge aller Teilmengen von L bilden, die nach Satz 3 auf S. 67f. sogar eine größere Mächtigkeit besitzt als L; wir bilden so paradoxerweise zu der „denkbar umfassendsten" Menge von Mengen eine „noch umfassendere". Die Menge aller Mengen — und ebenso das „All", d. i. die Menge „aller Dinge" — erweist sich also gleichfalls als ein in sich widerspruchsvoller Begriff, wenn wir damit so zu operieren versuchen wie sonst mit Mengen.

Wesentlicheren Gebrauch von den Begriffen und Ergebnissen der Mengenlehre als die bisher angeführten Paradoxien macht die historisch älteste Antinomie, auf die in der Literatur zuerst BURALI-FORTI [1] im Jahre 1897 hingewiesen hat [1]. Es handelt sich dabei um das im vorigen Paragraphen (S. 189f.) betrachtete Schema der Ordnungszahlen (d. h. der Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen), die wir ihrer Größe nach angeordnet haben. Wir denken uns die Menge gebildet, die aus *allen* Ordnungszahlen besteht; ordnen wir die Ordnungszahlen ihrer Größe nach, so erhalten wir (vgl. S. 188) eine nicht nur geordnete, sondern sogar wohlgeordnete Menge, die mit W bezeichnet werde. Die Ordnungszahl der Menge W sei φ; aus Satz 2 von S. 187 schließt man dann, daß jede in W vorkommende Ordnungszahl kleiner ist als φ. Die Ordnungszahl φ ist demnach in der Menge W nicht enthalten; dies widerspricht aber unserer Annahme, wonach W *alle* Ordnungszahlen enthalten sollte. (Ebenso kommt man zu einem Widerspruch durch Bildung der Ordnungszahl $\varphi + 1$, wozu nach S. 134f. nichts nötig ist als die Hinzufügung eines beliebigen Elements *hinter* allen Elementen von W.) Auch die Menge W, *die wohlgeordnete Menge aller Ordnungszahlen*, ist also ein in sich widerspruchsvoller Begriff.

Das nämliche gilt von der *Menge K aller Kardinalzahlen*; dieses Beispiel ist insofern einfacher, als man dabei von der Theorie der wohlgeordneten Mengen keinen Gebrauch zu machen hat. Nach Satz 3 von S. 67f. gibt es nämlich keine größte Kardinalzahl, sondern zu jeder beliebigen eine noch größere; die Menge aller Kardinalzahlen erfüllt also die Voraussetzung des Satzes 7 von S. 95, nach dem die Summe aller Kardinalzahlen von K größer ist als jede Kardinalzahl von K. Diese Summe wäre also größer als jede Kardinalzahl und doch gleichzeitig selbst eine Kardinalzahl!

Offenbar besteht eine gewisse Verwandtschaft zwischen diesen Paradoxien und den Antinomien, die KANT in der „Kritik der reinen Ver-

[1] Diese Antinomie ist von CANTOR selbst schon 1895 bemerkt und erörtert worden (siehe F. BERNSTEIN [2]). Zu BURALI-FORTIS Veröffentlichung vergleiche man noch HAGSTRÖM [2].

nunft" aufgestellt hat (z. B. denjenigen, die entstehen, wenn wir die Natur als ein abgeschlossenes Ganzes betrachten). In der Tat lassen sich aus Paradoxien der angeführten Art, z. B. aus der RUSSELLschen, ähnliche ableiten, in denen der Mengenbegriff überhaupt nicht mehr vorkommt und die mit Mathematik gar nichts zu tun haben. Erwähnt sei z. B. die folgende (ebenfalls von RUSSELL angegebene): Ein Begriff möge „prädikabel" heißen, wenn er von sich selbst ausgesagt werden kann; so ist der Begriff „abstrakt" sicherlich abstrakt, „abstrakt" ist also ein prädikabler Begriff. Im andern Fall dagegen, wo ein Begriff nicht von sich selbst ausgesagt werden kann, soll der Begriff als „imprädikabel" bezeichnet werden; so ist z. B. der Begriff „konkret" imprädikabel, denn er ist wie jeder Begriff abstrakt, also nicht konkret. „Prädikabel" und „imprädikabel" sind demnach (kontradiktorische) Gegensätze; jeder Begriff ist, so sollte man meinen, entweder prädikabel oder imprädikabel[1]. Wir wollen nun untersuchen, ob der Begriff „imprädikabel" prädikabel oder imprädikabel ist. Angenommen, er sei ein prädikabler Begriff, d. h. es gelte das Urteil: „imprädikabel" ist imprädikabel; dann ist damit gleichzeitig das Gegenteil der Annahme, wonach der Begriff prädikabel sein sollte, ausgesagt; diese Annahme muß also falsch sein. Damit scheint bewiesen, daß „imprädikabel" ein imprädikabler Begriff ist. Aber auch dieses Urteil enthält einen Widerspruch; denn es besagt ja gerade, daß der Begriff „imprädikabel" von sich selbst ausgesagt werden kann, also prädikabel ist. Der Begriff „imprädikabel" ist also in ganz ähnlicher Weise mit einem Widerspruch behaftet wie der Begriff der Menge aller Mengen, die sich nicht enthalten.

Es ist leicht, ähnliche in sich widerspruchsvolle Begriffe wie „imprädikabel" zu bilden (vgl. besonders GRELLING-NELSON [1]) und damit den Stein des Anstoßes, den die Menge aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen darstellt, vom mathematischen aufs logische Geleise zu verschieben. Letzten Endes ist übrigens die Bildung derartiger Antinomien schon einige Jahrtausende alt und ganz gewiß nicht der Mengenlehre zur Last zu legen; hängen sie doch eng zusammen mit gewissen Paradoxien der griechischen Sophisten[2].

---

[1] Vgl. indes S. 229ff.

[2] Vgl. (namentlich für historische Nachweise) RÜSTOW [1]; man findet dort (S. 130ff.) auch ein ausführliches Verzeichnis der älteren Literatur zu den Antinomien der Mengenlehre. Der Titel „Der Lügner" ist von dem Kreter Epimenides hergenommen, der erklärt: „ich lüge" und der damit diese seine Behauptung einem endlosen Hin und Her zwischen Falsch und Nichtfalsch preisgibt. Man vergleiche hierzu noch LIPPS [2] und URBACH [2]. Verwandte, z. T. ebenfalls aus dem Altertum stammende Paradoxien findet man z. B. bei LIETZMANN [1]. In diesem Zusammenhang sei auch an die Scherzdefinition des Dorfbarbiers erinnert als „des Mannes im Dorf, der all die Männer im Dorf rasiert, welche sich nicht selbst rasieren" und es daher immer verkehrt macht, mag er sich selbst rasieren oder nicht.

3. Die „epistemologischen" Antinomien (Richard usw.). Die Antinomie des „Lügners" unterscheidet sich von den vorher betrachteten u. a. darin, daß in die früheren Antinomien lediglich Begriffe der formalen Logik (wie „alle") und der Mathematik eingehen, während beim „Lügner" auch Hilfsmittel der Logik im weiteren Sinn herangezogen werden. Derartige Überlegungen, bei denen Sprache und Ausdrucksweise, Definierbarkeit, Symbole usw. eine Rolle spielen, bezeichnet man heute vielfach als „epistemologisch". Antinomien, die wesentlich durch derartige epistemologische Momente zustande kommen und denen die früher betrachteten als „logische" gegenübergestellt werden mögen, sind auch in eigentlich mathematischem Zusammenhang, zuerst wohl von Richard [1] und [2], gebildet worden und haben hier gleichfalls Aufsehen und Beunruhigung erregt — freilich wohl nicht ganz mit dem gleichen Recht wie die „logischen" Antinomien.

Eine besonders einfache Form der epistemologischen Antinomien mathematischer Prägung ist die folgende: Für jede vorgelegte natürliche Zahl n gibt es „Schriftnamen" in deutscher Sprache, d. h. schriftlich mit einer endlichen Anzahl von Zeichen (Buchstaben, Zahlen usw.) ausdrückbare eindeutige Kennzeichnungen oder „Definitionen". Unter den Schriftnamen von n gibt es einen oder mehrere mit einer möglichst geringen Anzahl von Zeichen; wir nennen jeden solchen Schriftnamen einen „kürzesten" Schriftnamen von n. Denken wir uns zu jeder natürlichen Zahl einen ihrer kürzesten Schriftnamen notiert, so können wir *die* Zahlen in eine besondere Liste eintragen, deren kürzeste Schriftnamen weniger als tausend Zeichen umfassen, und so „die Menge aller mit weniger als tausend Zeichen definierbaren natürlichen Zahlen" bilden; es gibt natürlich nur endlichviele solche Zahlen, da ja überhaupt nur endlichviele verschiedene Verbindungen von weniger als tausend der üblichen Zeichen existieren (vgl. auch S. 6). Unendlichviele natürliche Zahlen bleiben also außerhalb jener Liste und unter ihnen gibt es (wie in jeder Menge von natürlichen Zahlen) eine kleinste m; m ist hiernach eindeutig bestimmt als *die kleinste natürliche Zahl, in deren sämtlichen Schriftnamen jeweils mindestens tausend Zeichen vorkommen.* Mit den soeben durch Kursivdruck hervorgehobenen Worten wird aber für m ein Schriftname angegeben, der weniger als tausend Zeichen umfaßt; so ist ein Widerspruch für m hergeleitet.

Eine andere Ausprägung des Gedankens, aus dem Begriff der „endlichen Bezeichnung oder Definition" Antinomien herzuleiten, steht in engem Zusammenhang mit der Anwendung des Diagonalverfahrens zur Untersuchung der Mächtigkeit des Kontinuums (S. 46ff.). Die Menge aller mit je endlichvielen Zeichen in deutscher Sprache definierbaren Dezimalbrüche ist sicherlich abzählbar. Denn mit einer festen Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Zeichen können ja immer nur endlichviele

Begriffe überhaupt, um so mehr nur endlichviele Dezimalbrüche eindeutig festgelegt werden; denkt man sich also der Reihe nach alle mit 1, 2, 3, ... Zeichen definierbaren Dezimalbrüche hintereinander angeschrieben und etwa öfters auftretende reelle Zahlen bei jeder Wiederholung gestrichen, so erhält man eine gewisse Abzählung sämtlicher endlich definierbaren Dezimalbrüche (vgl. die Abzählung der Menge der algebraischen Zahlen, S. 36ff.). Auf Grund dieser Abzählung läßt sich nach dem Diagonalverfahren gemäß dem Hilfssatz von S. 45 leicht ein ganz bestimmter Dezimalbruch D angeben, der in der Abzählung nicht vorkommt, also nicht endlich definierbar sein soll. Wir *haben* aber soeben eine Definition für D angegeben, die sich nur endlichvieler Zeichen bedient, sogar mit wenigen Zeilen auskommt!

Die im vorigen Absatz verwendete Idee gestattet noch weitere Ausdehnung. Zunächst sind vorstehend keinerlei besondere Eigenschaften der Dezimalbrüche benutzt worden; die verwendete Abzählungsmethode gilt vielmehr für die endlichen Kennzeichnungen irgendwelcher Begriffe. Ferner wird man wohl unvermeidlich den Standpunkt einnehmen müssen, daß jeder überhaupt eindeutig festlegbare (und somit von allen anderen Begriffen unterscheidbare) Begriff „endlich festlegbar" ist; zu anderen als endlichen Kennzeichnungen ist der Mensch ja wohl nicht fähig. Demnach hätte man, wenn man sich diese nicht sehr zwingende Argumentation zu eigen machen will, die Gesamtheit aller Begriffe überhaupt (um so mehr die Menge aller Dezimalbrüche oder aller reellen Funktionen) als nur abzählbar unendlich zu betrachten — in völligem Gegensatz zum Diagonalverfahren CANTORS und dem daraus fließenden Satz 1 des § 5 (S. 48)[1]!

Zu den epistemologischen Antinomien, denen wir später weniger Beachtung schenken als den logischen, sei vorweg bemerkt: Ein wesentlicher und bei ihrer Aufstellung nicht genügend beachteter Umstand liegt jedenfalls darin, daß der Begriff „endlich definierbar" oder „mit höchstens n Zeichen definierbar" nicht absolut, sondern wesentlich abhängig ist von den dabei erlaubten Bezeichnungsweisen und daß die Unterscheidung erlaubter und unerlaubter Bezeichnungsweisen (wie überhaupt jede Klassifikation) bei *unendlichen* Gesamtheiten viel wesentlicheren Schwierigkeiten begegnet als bei *endlichen*. Im übrigen werde auf die nachfolgenden Literaturangaben und namentlich auf den Anfang von § 15 (S. 247 ff. und 257 ff.) verwiesen.

Dem vermeintlichen Widerspruch zwischen CANTORS Diagonalverfahren und der RICHARDschen Antinomie von den Dezimalbrüchen seien

[1] Vielleicht ist die Bemerkung nicht ganz überflüssig, daß die Frage der endlichen Darstellbarkeit nur sinnvoll ist für eine *Gesamtheit* von Dingen, zu deren Bezeichnung ein und dasselbe Zeichensystem verwendet werden soll. Für ein *einzelnes* Ding ist die endliche Darstellbarkeit völlig trivial, man kann z. B. ein willkürliches Zeichen wählen.

im Anschluß an POINCARÉ [4] noch einige klärende Bemerkungen angefügt. Beide Behauptungen sind richtig, der Widerspruch ist nur ein scheinbarer. CANTORS Beweis (S. 46 f.) zeigt ja nur die Unmöglichkeit einer Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den unendlichen Dezimalbrüchen von folgender Art: einer gegebenen Zahl entspricht ein Dezimalbruch, der durch jene völlig festgelegt ist und von vornherein bestimmt werden kann; ebenso wird umgekehrt jedem vorgelegten Dezimalbruch eine von ihm allein abhängige, in derselben Weise festlegbare Zahl zugeordnet. Dieser Charakter der Zuordnung drückt namentlich aus, daß durch die Vorschrift, wonach einer bestimmten Zahl (etwa der Zahl 1000) ein gewisser Dezimalbruch zugehört, sich nichts mehr ändern kann an den Zuordnungen zwischen allen Zahlen unter 1000 und den ihnen entsprechenden Dezimalbrüchen (wie überhaupt an allen anderen Zuordnungsvorschriften). Eine Zuordnung dieser Art ist nach CANTOR unmöglich, wenn man die Menge *aller* Dezimalbrüche der der ganzen Zahlen gegenüberstellt; es bleiben vielmehr immer Dezimalbrüche übrig, denen keine ganze Zahl entspricht.

Von durchaus anderer Art ist die Zuordnung, um die es sich bei RICHARD handelt. Hat man hier den ganzen Zahlen die dem ersten Anschein nach „endlich definierbaren" Dezimalbrüche zugeordnet, so zeigt sich alsbald, daß noch nicht alle Dezimalbrüche erfaßt sind; nämlich jedenfalls noch nicht diejenigen, in deren Definition die soeben hergestellte Zuordnung ihrerseits etwa unvermeidbar eingeht (z. B. nach dem Diagonalverfahren). Nimmt man diese „neuen", jetzt ebenfalls endlich definierbaren Dezimalbrüche hinzu, so bleibt RICHARDS Beweis immer noch gültig, also auch die vergrößerte Menge von Dezimalbrüchen noch abzählbar. Um aber all diese Dezimalbrüche den natürlichen Zahlen zuzuordnen, muß man natürlich *die alte Zuordnung zerstören* und an ihre Stelle eine von Grund auf neue setzen, die einem beliebigen Dezimalbruch jetzt im allgemeinen eine andere Zahl entsprechen läßt als vorher; der Sachverhalt ist genau entsprechend, wie man zwecks Zuordnung der rationalen zu den natürlichen Zahlen (S. 31) nicht etwa von einer Zuordnung zwischen den *ganzen* Zahlen und den natürlichen wie auf S. 29 ausgehen kann, um hieran eine Ergänzung anzuflicken, sondern die alte Zuordnung total auflösen und durch eine völlig neue ersetzen muß. Man ist freilich mit der angegebenen Vervollständigung der RICHARDschen Zuordnung noch nicht am Ende angelangt, sondern sieht jetzt die erst mittels der *neuen* Zuordnung definierbaren Dezimalbrüche noch unbewältigt vor sich auftauchen; um auch sie noch in eine Abzählung mit einzuordnen, ist abermals eine von Grund auf neue Zuordnung zu konstruieren. Usw. CANTORS Satz von der Nichtabzählbarkeit der Menge *aller* Dezimalbrüche besagt somit nichts anderes, als daß dieses Verfahren sich endlos fortsetzen läßt, ohne jemals zu einem Abschluß zu gelangen; jeder neue Versuch, durch Herstellung

einer nunmehr ausreichenden Zuordnung endgültig der Hydra den Kopf abzuschlagen, zeitigt automatisch das Erscheinen mindestens eines neuen Kopfes.

Die Wesensverschiedenheit der Verfahren, mit denen einmal CANTOR, das andere Mal die (unbegrenzt fortgesetzt gedachte) Methode RICHARDS die Dezimalbrüche klassifiziert (nämlich in solche, die zu irgendwelchen Zahlen zugeordnet sind, und in übrigbleibende, bzw. in „definierbare" und „andere"), mag durch folgenden rohen, aber doch wohl klärenden Vergleich veranschaulicht werden. Vor uns liege ein Haufen verschieden langer Zündhölzchen und zwei leere Zündholzschachteln, in die jene Hölzchen der Reihe nach, wie man sie eben in die Hand bekommt, eingeordnet werden sollen. Besteht die Klassifikationsvorschrift darin, daß in die erste Schachtel die Hölzchen mit einer Länge bis 5 cm, in die zweite alle längeren gelegt werden sollen, so hat man den CANTORschen Fall; auf Grund der Vorschrift steht von jedem beliebigen Hölzchen von vornherein fest, in welcher Schachtel es schließlich landen wird. Ist dagegen vorgeschrieben, daß im allgemeinen zwar (in einer nach Belieben noch zu präzisierenden Weise) beide Schachteln möglichst gleichmäßig an die Reihe kommen sollen, daß aber die Durchschnittslänge der Hölzchen in der ersten Schachtel jederzeit kleiner sein solle als in der zweiten, so hat man eine Klassifikation von der Art der RICHARDschen Zuordnungen in ihrer Gesamtheit; manchem schon in die erste Schachtel gelegten Hölzchen wird es passieren, nachträglich in die andere hinüberwandern zu müssen, weil es sich angesichts der *nach ihm* in die erste Schachtel hinzugekommenen Hölzchen als zu lang erweist — und umgekehrt.

Eine ganz andersartige, erst in jüngster Zeit von SKOLEM hervorgehobene Paradoxie steht gleichfalls in einem gewissen Zusammenhang mit der Antinomie von RICHARD; sie knüpft indes speziell an den *axiomatischen* Aufbau der Mengenlehre an und kann daher erst an späterer Stelle (S. 333) Besprechung finden.

Im Anschluß an die Antinomien sei noch das folgende zu einem Widerspruch führende Verfahren erwähnt (vgl. WEYL [3], S. 86, und [4], S. 41). Wir denken uns auf eine möglichst umfassende Weise den Begriff „Eigenschaft einer natürlichen Zahl" logisch umgrenzt und bezeichnen die „Gesamtheit aller Eigenschaften natürlicher Zahlen" mit M. Zu M gehört z. B. die Eigenschaft „x ist gerade", die durch $\mathfrak{E}_1(x)$ bezeichnet werde. Weiter betrachten wir Eigenschaften *von* Eigenschaften natürlicher Zahlen; z. B. „es gibt unendlichviele natürliche Zahlen x von der Eigenschaft $\mathfrak{E}(x)$", was mit $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{E})$ bezeichnet werde. Die „Eigenschaft zweiter Stufe" $\mathfrak{F}_1$ kommt z. B. der vorhin angeführten Eigenschaft „erster Stufe" $\mathfrak{E}_1$ zu, da es unendlichviele gerade Zahlen gibt. Dasselbe gilt z. B. für die Eigenschaft $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{E})$: „es gibt nur éine Primzahl x von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$", falls man $\mathfrak{E}_1$ für $\mathfrak{E}$ einsetzt.

Wir definieren nun eine Eigenschaft $\mathfrak{E}_0(x)$ natürlicher Zahlen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit M folgendermaßen: die Eigenschaft $\mathfrak{E}_0$ kommt der natürlichen Zahl x dann und nur dann zu, wenn x mindestens éine Eigenschaft $\mathfrak{E}$

aus M besitzt, die ihrerseits von einer bestimmten Eigenschaft (zweiter Stufe) $\mathfrak{F}(\mathfrak{E})$ ist. Wählen wir hierfür etwa die im vorigen Absatz erklärte Eigenschaft $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{E})$, so drückt die Eigenschaft $\mathfrak{E}_0(x)$ aus: „x besitzt mindestens eine Eigenschaft $\mathfrak{E}(x)$ aus M, die nur éiner Primzahl zukommt." Danach ist die spezielle Eigenschaft $\mathfrak{E}_0$ auf Grund der Gesamtheit M *aller* Eigenschaften natürlicher Zahlen definiert; denn um festzustellen, ob x die Eigenschaft $\mathfrak{E}_0$ hat, muß man nötigenfalls *alle* Eigenschaften von M darauf nachprüfen, ob eine unter ihnen von der gewünschten Art ist. Es ist dann klar, daß die Eigenschaft $\mathfrak{E}_0(x)$, die erst mittels der Gesamtheit M zu charakterisieren ist, nicht mit einer der Eigenschaften aus M identisch im gewöhnlichen Sinn, d. h. sinnesgleich sein kann (wenn auch wohl gegebenenfalls umfangsgleich). Der Begriff der Gesamtheit aller Eigenschaften von natürlichen Zahlen ist also unscharf und führt auf Widersprüche.

Dieselbe Betrachtung läßt sich auf die Eigenschaften *rationaler* Zahlen anwenden. Sei N eine möglichst umfassend definierte „Gesamtheit aller Eigenschaften rationaler Zahlen". Zu N gehört dann z. B. die Eigenschaft $\mathfrak{E}'(x)$: „für die rationale Zahl x ist $x^2 > 2$". Ein Beispiel einer Eigenschaft *von* Eigenschaften rationaler Zahlen ist die folgende $\mathfrak{F}'(\mathfrak{E})$: „es gibt unter den Zahlen mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}(x)$ kein Minimum". Diese Eigenschaft zweiter Stufe $\mathfrak{F}'(\mathfrak{E})$ kommt z. B. der genannten Eigenschaft erster Stufe $\mathfrak{E}'$ zu; denn unter den rationalen Zahlen > 2 gibt es keine kleinste. Schließlich definieren wir wiederum eine Eigenschaft erster Stufe $\mathfrak{E}^*(x)$ durch Bezugnahme auf die Gesamtheit N der Eigenschaften erster Stufe: die Eigenschaft $\mathfrak{E}^*$ soll der rationalen Zahl x dann und nur dann zukommen, wenn x mindestens éine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ aus N besitzt, die ihrerseits von einer bestimmten Eigenschaft (zweiter Stufe) $\mathfrak{F}(\mathfrak{E})$ ist. Nehmen wir $\mathfrak{F}'$ als Beispiel, so bedeutet $\mathfrak{E}^*(x)$: „x besitzt mindestens éine Eigenschaft $\mathfrak{E}(x)$ aus N von solcher Art, daß es unter den rationalen Zahlen x von der Eigenschaft $\mathfrak{E}(x)$ kein Minimum gibt". Diese recht abstrakte Gedankenfolge wird anschaulicher, wenn wir im Sinne der beiden nächsten Paragraphen (besonders S. 233 und 254) Eigenschaften rationaler Zahlen als Mengen solcher, d. h. als reelle Zahlen, und demgemäß Eigenschaften von Eigenschaften reeller Zahlen als Mengen reeller Zahlen (oder als reelle Zahlen „zweiter Stufe") auffassen.

4. Zur Aufklärung der Antinomien im allgemeinen. In den drei Jahrzehnten die seit der Entdeckung der ersten Antinomien der Mengenlehre verflossen sind, hat sich an die Antinomien eine sehr reichhaltige und gerade neuerdings wieder anschwellende Literatur zunächst von mathematischer, später auch besonders von philosophischer Seite geknüpft; eine Literatur, die keineswegs etwa zu übereinstimmenden Ergebnissen gelangt und übrigens von sehr verschiedenem Werte ist. Es seien neben den schon oben erwähnten noch die folgenden Arbeiten (in wesentlich zeitlicher Aufeinanderfolge) genannt, wobei hinsichtlich der älteren Literatur eine Beschränkung auf die historisch, sachlich oder wegen der Literaturangaben bedeutsameren Arbeiten getroffen ist: HOBSON [1] und [2 I] (§§ 194 ff. der 2. Aufl.), SCHOENFLIES [1 II] (S. 26ff. und 38f.), [2], [5] und [6], KORSELT [1] und [4], HESSENBERG [3] (bes. Kap. 23 und 24) und [6], BOREL [2] (enthält in Note IV mehrere ältere einschlägige Aufsätze), LEVI [2], RUSSELL [3], POINCARÉ [3] und [5], URBACH [1], WEYL [2], DINGLER [1] und [2], SAMUEL [1], HAGSTRÖM [1], J. KÖNIG [5], ENRIQUES [2], MIRIMANOFF

[1] und [2], RICHARD [3], BRODÉN [2]—[5], CHWISTEK [1], LIPPS [1] und [3], BEHMANN [2], FINSLER [1] und [4], PETZOLDT [1], DIECK [1], HORÁK [1], LANGER [1], RAMSEY [1], HÄRLEN [1]. (Man vergleiche auch einige der Verweise in den drei nächsten Paragraphen.) Ein wesentlicher Teil dieser Untersuchungen sucht die Lösung der Widersprüche nicht so sehr in einer Korrektur der *mathematischen* Methoden der CANTORschen Mengenlehre als vielmehr in einer *logischen* Kritik der verwendeten Begriffe und Schlüsse. Leider kann, ähnlich wie bei anderen logischen und erkenntniskritischen Problemen, keine Rede davon sein, daß die in dieser Tendenz geführten Untersuchungen zu endgültigen und allgemein überzeugenden Ergebnissen gelangt wären oder auch nur zu solchen, die wenigstens untereinander einigermaßen übereinstimmten. Vielfach sind im Gegenteil Irrtümer oder grobe Mißverständnisse offensichtlich. Hinsichtlich der epistemologischen Antinomien wird wohl (vgl. auch S. 262 f.) die Meinung berechtigt sein, daß ihre Klärung zu einem wesentlichen Teil außerhalb der Mathematik zu suchen ist.

Schon dem flüchtigen Betrachter wird aufgefallen sein, welch wesentliche Rolle sowohl in den logischen als auch in den epistemologischen Antimonien *die Rückbeziehung auf sich selbst* spielt (auch schon im „Epimenides"); von diesem Angelpunkt aus werden wir zu Beginn des § 15 die Antinomien anpacken und in gewissem Sinne bewältigt sehen.

Gleichviel aber ob die Logik zu einer eindeutigen und unbestrittenen Lösung derartiger Schwierigkeiten gelangen mag oder nicht: der Mathematiker wird jedenfalls mit Recht fordern, daß innerhalb der Mathematik nur solche Hilfsmittel aus der Logik benutzt und nur solche Begriffe gebildet werden, die eine Gefährdung nach Art der Antinomien nicht zu befürchten brauchen — mag auch ein solcher Anspruch vielleicht nur durch eine Verengerung des mathematischen Gebietes zu erkaufen sein. Dieser Forderung wird durch den bisher dargestellten, auf CANTOR (namentlich [12]) zurückgehenden Aufbau der Mengenlehre nicht genügt, wie die der Mengenlehre angehörigen Antinomien beweisen. Insbesondere zeigt die RUSSELLsche Antinomie der Menge M aller sich nicht enthaltenden Mengen, bei der keine höheren Hilfsmittel der Mengenlehre herangezogen werden, daß die (oder mindestens eine) schwache Stelle schon ganz im Beginn des Aufbaus der Mengenlehre liegen muß: nämlich in der Definition des Mengenbegriffs (S. 4), der allein bei der Bildung der Menge M benutzt wird.

Obgleich es nicht endgültig gelungen ist, CANTORS Definition der Menge durch eine bessere, die Antinomien ausschließende zu ersetzen, sind doch mit Erfolg einige Wege beschritten worden, die eine einwandfreie Begründung der Mengenlehre ermöglichen, freilich mehr oder weniger auf Kosten ihres äußeren Umfangs und damit auch z. T. ihrer

Tragweite. Die drei wichtigsten dieser Wege wollen wir in den nächsten Paragraphen näher kennenlernen. Sie sind untereinander scharf unterschieden und sogar gegensätzlich, und zwar nicht allein hinsichtlich der Methode, mit der sie den Antinomien begegnen; namentlich beim ersten dieser Wege sind die Antinomien durchaus Nebensache und höchstens als ein auslösendes Moment zu werten. Vielmehr haben wir es mit ganz tiefgehenden Verschiedenheiten in der mathematischen Weltanschauung, wenn der Ausdruck erlaubt ist, zu tun; in der Tat berühren die hiermit aufgerührten Diskussionen die Grundlagen der Mathematik und z. T. auch der Logik an ihren Wurzeln. Man kann insofern mit Recht vom Ausbruch einer (früher höchstens schleichenden, nun aber akuten) Krise in den Grundlagen der Mathematik sprechen.

In der vorangehenden Darstellung der Mengenlehre CANTORS sind übrigens, wie ausdrücklich hervorgehoben sei, paradoxe Begriffsbildungen durchweg vermieden worden; namentlich ist der Mengenbegriff in Wirklichkeit nicht so allgemein, wie es die Definition auf S. 4 gestattete, sondern erheblich vorsichtiger (eingeschränkter) zur Verwendung gekommen (vgl. besonders S. 204). Tatsächliche Einwände gegen die Richtigkeit der in den bisherigen Kapiteln dargestellten Mengenlehre CANTORS sind also nicht zu erheben, solange man bloß den Kreis der in diesem Paragraphen behandelten sog. „klassischen" Antinomien ins Auge faßt.

§ 14. Der Intuitionismus, besonders BROUWER[1].

1. Das Unendliche als Gefahrenquelle. Es ist nicht zufällig, daß gerade auf dem Boden der Mengenlehre die Mathematiker mit den Antinomien zusammengestoßen sind; ist es doch die begriffliche Berührung mit dem *Unendlichen*, die diese Widersprüche wie auch viele Antinomien der älteren Philosophie gezeitigt hat, und gerade die Mengenlehre hat ja unter allen mathematischen Fachgebieten die Eroberung des Unendlichen am weitesten getrieben. Indes ist sie hierin von ihren Schwesterdisziplinen nur quantitativ, nicht qualitativ verschieden; keine von ihnen vermeidet die Berührung mit dem Unendlichen und mit Recht hat neuerdings sogar ein besonders behutsam eingestellter Forscher das Wort geprägt: „Die Mathematik ist die Wissenschaft vom Unendlichen" (WEYL [6], S. 1).

Will man auf möglichst radikale Weise den Antinomien zu Leibe gehen und so auch gleichzeitig einem etwa künftigen Auftreten neuer und andersartiger Widersprüche ein für allemal einen Riegel vorschie-

[1] Dieser und der nachfolgende Paragraph, welche beide die vorangehenden und auch die später folgenden Abschnitte an Schwierigkeit erheblich übertreffen, können bei der erstmaligen Lektüre allenfalls überschlagen oder nur flüchtig durchblättert werden.

ben, so wird man also die Berührungen und Spannungen mit dem Unendlichen, wo immer sie in der Mathematik auftreten, näher zu untersuchen und die bisherigen Lösungen der dabei aufgetretenen Schwierigkeiten kritisch zu durchmustern haben. Umgekehrt: wenn man — wie die jetzt zu schildernden *intuitionistischen* Strömungen — die bisherigen Lösungen der Schwierigkeiten, die mit dem Unendlichen in der Mathematik verknüpft sind, als ungenügend ansieht und neue an ihre Stelle setzt, welche, wenn auch auf Kosten der Reichweite der mathematischen Methoden, die bestehenden Spannungen mildern und ausgleichen sollen, so wird damit sozusagen als Nebenprodukt auch eine Rettung der gefährlichen Lage auf den vorgeschobenen Posten der Mengenlehre abfallen.

Innerhalb der Mengenlehre ist, wie wir später noch ausführlich erörtern (S. 325—332) und wie man u. a. aus dem Auftreten des Diagonalverfahrens bei der Bildung charakteristischer Antinomien (S. 215) entnehmen kann, die weitesttragende und auch am meisten gefahrdrohende Methode die Bildung der *Potenzmenge* (vgl. S. 67ff.), deren Tragweite sich ja wesentlich auf das Diagonalverfahren stützt. Ein spezieller und zwar der allereinfachste Fall der Potenzmengenbildung (bei unendlichen Mengen) greift aber weit über den Problembereich der Mengenlehre hinaus und schafft vielmehr das Operationsfeld, auf dem sowohl die Analysis wie die Geometrie ihre Entwicklungen ausführen: nämlich der Fall, wo die Ausgangsmenge die der natürlichen Zahlen, die Potenzmenge also das *Kontinuum* oder (arithmetisch gesprochen) die Gesamtheit der reellen Zahlen darstellt (S. 109f.). Schließlich ist aber hierbei nicht nur die Konstruktionsmethode, die als Endprodukt das Kontinuum liefert, sondern auch schon die Ausgangsmenge der Konstruktion, also die *Gesamtheit der natürlichen Zahlen*, ganz und gar von unendlichem Charakter; sie ist die Domäne der reinen Arithmetik. Mit den zwei genannten Begriffen haben wir nun gerade die beiden gähnenden Abgründe vor uns, deren Überwindung, seitdem es wissenschaftliche Mathematik gibt, die unerläßliche Vorbedingung für die mathematischen Konstruktionen und Beweise darstellt. Zur Überwindung dieser Abgründe hat man sich bald, wenn es bloß auf vorläufige ungestüme Erkundung der Gipfelregionen ankam, mit nur schwachen Schneebrücken und kühnen Sprüngen begnügt, bald — so in den Zeiten methodischen Aufbaus — die sorgsameren und vorsichtigeren Sicherungsmethoden einer wissenschaftlichen Seil- und Wegbautechnik verwandt, um den Aufstieg nach oben ein für allemal zu befestigen.

Diese beiden Abgründe sind es denn auch, denen die Aufmerksamkeit des Intuitionismus in erster Linie gilt; die mit den entlegeneren Pfaden der Mengenlehre verbundenen Gefahren werden dabei mitgetroffen, bilden aber nicht eigentlich das Ziel der kritischen Unter-

suchung. Das Ergebnis ist so radikal, daß es zu einer vollen und weitgehend zerstörenden Umwälzung innerhalb der modernen Mathematik führt, wobei freilich den Intuitionisten das Zerstörte als von innen heraus längst brüchig und nicht erhaltenswert erscheint. Was namentlich jene beiden Gefahrpunkte betrifft, so wird die Überwindung des einen, dem Reich des Endlichen benachbarten Punktes, der die Gesamtheit der natürlichen Zahlen betrifft, sozusagen nicht *gelehrt*, sondern *postuliert*, nämlich als das nicht weiter zu begründende methodische Fundament aller Mathematik hingestellt; hierüber sind allerdings die Auffassungen nicht einheitlich, entsprechend den untereinander abweichenden Antworten der intuitionistischen Gruppen auf die Frage, ob denn die Gesamtheit der natürlichen Zahlen wirklich als ein festes, abgeschlossenes Ganzes oder nur als ein offener, stets im Werden begriffener Prozeß zu werten ist. Den anderen und schlimmeren Gefahrpunkt dagegen, der im Begriff des Kontinuums gelegen ist, erklärt der Intuitionismus als in einem eigentlich fruchtbaren Sinn nicht überwindbar; damit werden die vom Kontinuum entscheidend abhängigen Teile der Analysis und Geometrie aus dem mathematischen Gesamtkörper abgestoßen, wenn auch dem Kontinuum für sich selbst als einem „Medium freien Werdens" eine recht kümmerliche Existenz noch zugestanden wird. Die ungestüme und doch zur wahren Befruchtung der Mathematik unentbehrliche Naturkraft des Unendlichen ist für diese Auffassung durch die Eindämmungsmethoden von WEIERSTRASS, die man für endgültig hielt, nur scheinbar gezähmt[1]; in Wirklichkeit habe sie wenig von ihrer Wildheit eingebüßt und sei auch in der Tat als Ganzes nicht beherrschbar, sondern dürfe nur in sorglich abgemessenen und überprüften Teildosen herangezogen werden. Es geht also bei der Revolution der Intuitionisten gegen die „klassische" Mathematik, wie sie namentlich in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ihre Ausbildung und Vollendung erfahren hat, nicht bloß um eine kleine, auf die exponierte Provinz der Mengenlehre beschränkte Grenzberichtigung zuungunsten des mathematischen Reiches; vielmehr wird der Angriff in die blühendsten und vor jeder Gefährdung sich sicher dünkenden Gefilde dieses Reiches getragen. Würde er endgültig glücken, so bliebe, abgesehen von gewissen eng umgrenzten Gebieten (namentlich der Arithmetik im engeren Sinn), von der gegenwärtigen Mathematik nur ein ungeheurer Trümmerhaufen übrig, aus dem wohl erst durch die Arbeit von Generationen neue einigermaßen wohnliche (und den alten jedenfalls an Bequemlichkeit nicht gleichkommende) Behausungen aufgebaut werden können.

[1] Für die Stellung zum Unendlichen innerhalb der Entwicklung des „Strengebegriffs" in der Mathematik vergleiche man etwa den anregenden Vortrag PIERPONT [2].

2. Historische Einleitung zum Intuitionismus. Die Zusammensetzung dieser revolutionären Gruppe, die vielfach sich selbst als *intuitionistisch*[1] und eine im nächsten Kapitel (namentlich S. 366ff.) zu schildernde Gegenanschauung als *formalistisch* bezeichnet, wie auch die Geschichte ihrer Angriffe während des letzten halben Jahrhunderts ist reichlich wechselvoll; übrigens haben verwandte Tendenzen auch in früheren Epochen der mathematischen Forschung, namentlich im griechischen Altertum, nicht gefehlt[2]. Von besonderem Interesse ist es, daß jeweils nur eine mäßige oder geringe Anzahl schöpferischer Mathematiker daran beteiligt war, darunter aber in vorderster Linie stets einige der hervorragendsten Forscher ihrer Zeit aus sehr verschiedenen Ländern, wie z. B. die Namen KRONECKER, POINCARÉ, BOREL, LEBESGUE, BROUWER, WEYL zeigen. Beachtung verdient auch die Tatsache, daß diese und weitere Forscher zumeist *unabhängig voneinander* zu den intuitionistischen Ideen gelangten und daß sie ungeachtet ihrer verhältnismäßigen wissenschaftlichen Isolierung des schließlichen Durchdringens ihrer Anschauungen sich überraschend sicher fühlen[3]; diese Ideen scheinen sozusagen in der Luft zu liegen, wo sie freilich nur von einem Witterungsvermögen ganz bestimmter Art entdeckt werden.

Bald rein intuitiv und dogmatisch oder auch mit vorwiegend philosophisch fundierter Betrachtung arbeitend, bald scharfer mathematischer Hilfsmittel sich bedienend, demgemäß auch untereinander nur lose, durch eine gewisse Verwandtschaft der Grundgedanken verbunden und in deren Verfolgung weit auseinanderstrebend, erscheint die intuitionistische Gruppe in der neueren Mathematik zum erstenmal in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts in Berlin mit KRONECKER und einigen seiner Schüler auf dem Plan. Sie führt da einen trotz der Autorität dieses großen Arithmetikers im großen ganzen erfolglosen Kampf gegen die modernen Methoden in der Zahlen- und Funktionenlehre, die sich vor allem unter dem Einfluß von WEIERSTRASS mächtig entwickeln; immerhin spielt die damalige Bewegung eine nicht geringe Rolle bei der

---

[1] So BROUWER; POINCARÉ gebraucht den Ausdruck „pragmatiste". Natürlich gibt es neben der intuitionistischen und der formalistischen Einstellung noch weitere, z. B. diejenige CANTORS und die logizistische (S. 263 und 376). Der Gegensatz ist also nicht kontradiktorisch. Wenn er freilich heute meist als konträr erscheint, so ist das weniger sachlich (vgl. den Schluß dieses Paragraphen) als durch eine mehr subjektive Zuspitzung der Gegensätze zu erklären, während dem Kern der Sache nach eher der Logizismus den Gegenpol des Intuitionismus darstellt.

[2] Vgl. etwa BOUTROUX [1] (besonders IV. Kapitel) und BECKER [2], ferner auch die geistreichen historischen und psychologischen Bemerkungen HADAMARDS in seiner Vorrede zu GONSETH [1].

[3] Das gilt schon von KRONECKER; siehe z. B. GUTZMER [1], S. 592. Vgl. indes auch CANTORS briefliche Bemerkung: „. . . es handelt sich hier *gewissermaßen* um eine *Machtfrage* . . .; es wird sich fragen, *welche* Ideen mächtiger, umfassender und fruchtbarer sind, die KRONECKERS oder die meinigen; nur der Erfolg wird nach einiger Zeit unsern Kampf entscheiden!!" (SCHOENFLIES [12], S. 12).

anfänglichen Bekämpfung der Ideen CANTORS. Nach dem Sieg nicht nur der Funktionentheorie, sondern auch der Mengenlehre entsteht um die Jahrhundertwende aufs neue Beunruhigung durch die Antinomien der Mengenlehre. Diese kann zunächst, gestützt auf ihre großen soeben der mathematischen Welt zum Bewußtsein gekommenen Erfolge, die neu beginnenden Angriffe auf ihre eigenen Grenzprovinzen beschränken; aber mit dem vielfach Anstoß erregenden Beweis des Wohlordnungssatzes durch ZERMELO (1904) wachsen dann die Angriffe namentlich französischer Forscher, und zwar solcher, die selbst an den funktionentheoretischen Anwendungen der Mengenlehre führend beteiligt sind (BAIRE, BOREL, LEBESGUE u. a.), an Zahl und Heftigkeit. POINCARÉ geht seit 1905 so weit, an das Gebäude der allgemeinen Mengenlehre als solches Hand anzulegen und darüber hinaus auch andere mathematische Gebiete zu bedrohen. Die Wirkung der Stellungnahme auch dieses überragenden Forschers[1], der übrigens späterhin weniger radikal wird und sogar selbst einen grundsätzlich wichtigen Beweis der Mengenlehre (in [4]) neu gestaltet, nimmt unter dem Eindruck der für die bedrohte Mengenlehre aufgeführten Sicherungsbauten (vgl. die nächsten Paragraphen) wiederum ab; allerdings finden die von intuitionistischer Seite gegen das Auswahlprinzip erhobenen Bedenken (vgl. S. 227) auch in weiteren Kreisen Beachtung und Anerkennung.

Von dieser Gruppe von Intuitionisten, zu denen auch noch WEYL mit seinen älteren Anschauungen (vgl. [2] und den ersten Teil von [4]) zu rechnen ist, heben sich die weitergehenden und radikaleren Tendenzen BROUWERS in einem weniger quantitativen als vielmehr qualitativen Sinne soweit ab, daß es nicht angeht, ihn einfach der vorerwähnten Richtung einzuordnen; man bedient sich auch schon gelegentlich einer terminologischen Unterscheidung, insofern als WEYLS ältere Anschauungen (im Gegensatz zu denen BROUWERS) „halb-intuitionistisch" genannt werden oder als BROUWER seine eigene Schule[2] im Gegensatz zu den älteren Intuitionisten als „neointuitionistisch" bezeichnet. Seit 1907 (mit BROUWERS Dissertation [1]) anhebend, hat

[1] Der starke konventionalistische Einschlag bei POINCARÉ kann hier und im folgenden außer Betracht bleiben; seine Auswirkung beschränkt sich im wesentlichen auf das Gebiet der Geometrie.

[2] Unter BROUWERS intuitionistisch gerichteten Schülern haben HEYTING [1]—[3] und DE LOOR [1] Beiträge zur wirklichen Entwicklung der Mathematik nach intuitionistischen Grundsätzen geliefert; von BROUWERS eigenen Arbeiten in dieser Richtung sind außer den in der nächsten Fußnote angeführten (ganz besonders [10] und [14]) noch die Noten zu erwähnen, die in den Proceedings der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, Bd. 27, S. 189—193 und 644—646 (1924); Bd. 28, S. 503—508 (1925); Bd. 29, S. 855—863 und 866f. (1926) erschienen sind. Zu nennen sind ferner SKOLEM [5] und WEYL [5] sowie die Fußnote 2 auf S. 115 von MENGER [1]; die genannte Arbeit SKOLEMS ist nicht restlos im radikal intuitionistischen Sinn durchgeführt.

diese Richtung unter BROUWERS Fahne in den Jahren 1918—1921 zur entscheidenden Attacke ausgeholt und mit ihrem ungestümen Angriff, der eine Neugestaltung des gesamten mathematischen Lehrgebäudes anstrebt, zeitweise die ganze mathematische Welt beunruhigt; die Wirkung und Gegenwirkung bei HILBERT und seiner „formalistischen" Schule wird gegen Ende des § 18 erörtert werden. Auch WEYL hat sich seit 1919 im großen ganzen dieser Richtung angeschlossen, ohne doch ihren völlig abweisenden Standpunkt gegenüber den modernen Bestrebungen des Formalismus heute mehr aufrecht zu erhalten (vgl. WEYL [7], §§ 10 und 11, und namentlich seine Bemerkungen zu HILBERT [10]); andererseits haben BROUWERS Ideen auch in philosophischen Kreisen neuerdings Beachtung und z. T. (besonders bei BECKER) Zustimmung gefunden[1].

Die nachfolgende Schilderung der intuitionistischen Ideen beschränkt sich auf die Ausgangspunkte und die groben Umrisse der daraus sich ergebenden Folgerungen. Bei der Verschiedenheit in den Standpunkten der einzelnen Intuitionisten erscheint es zweckmäßig, ein möglichst vielseitiges Bild der wesentlichen Züge zu geben, auch wenn dies stellenweise auf Kosten der Einheitlichkeit geschehen muß; in erster Linie wird indes der Standpunkt BROUWERS entwickelt. Es seien daher die beiden Hauptpunkte vorweg bezeichnet, in denen BROUWER nach seiner eigenen Auffassung und Formulierung über seine Vorgänger grundsätzlich hinausgeht. Einmal betont er die Unabhängigkeit der Mathematik — d. h. der mathematischen Konstruktionen — von der mathematischen *Sprache*; hieraus folgert er die Unabhängigkeit der Mathematik von der

[1] An Literatur zur grundsätzlichen Seite des Intuitionismus, namentlich des BROUWERschen, (z. T. verbunden mit intuitionistischer Bearbeitung mathematischer Disziplinen und Einzelprobleme) werde angeführt (vgl. auch die vorangehende Fußnote): BALDUS [1], BOREL [2] (Note IV), [4] und [5], BROUWER [1]—[3] und [7]—[19], DRESDEN [1] und [2], ENRIQUES [2], FRAENKEL [7] und [10], GONSETH [1], HAALMEIJER-SCHOGT [1], LEBESGUE [4], LUSIN [1] und [2], POINCARÉ [3], [5] und [6], SKOLEM [3], WAVRE [1]—[3], WEYL [1]—[7]. Man vergleiche auch die Literatur zum Auswahlprinzip, siehe S. 302f. Die Hauptarbeiten BROUWERS sind leider sehr schwer verständlich, ihre wesentlichen Gedanken daher vorwiegend durch andere der angegebenen Arbeiten in weitere Kreise gedrungen; daß BROUWER diese seine Interpretationen — auch die durch WEYL — meist nicht als authentisch anerkennt, ist ein unter diesen Umständen unvermeidlicher Übelstand. Von Schriften mit ausgesprochen philosophischer Tendenz seien BECKER [1] (besonders S. 403—419) und [2], BETSCH [1], BURKAMP [2] und DUBISLAV [1] genannt; eine ausführliche Behandlung im philosophischen Sinn durch SCHOLZ ist in Vorbereitung. Schließlich sei ausdrücklich auf das frühzeitige Auftreten verwandter Gedanken bei HÖLDER (siehe z. B. [3], S. 193f.) und PASCH (vgl. [2 II] und [1_2], S. VII) hingewiesen.

An kritischen Stimmen seien hier F. BERNSTEIN [5], HILBERT [7]—[10], HÖLDER [4], LÉVY [1] und [2], RAMSEY [1], ZERMELO [2] genannt, ferner BARZIN-ERRERA [1], wozu aber CHURCH [2] zu vergleichen ist; im übrigen ist auf den Schluß von § 18 (S. 377ff.) zu verweisen.

traditionellen Logik (vgl. S. 376) und das — unten näher zu begründende — Verbot der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der mathematischen Sprache, die ihm (im Gegensatz zu HILBERT, vgl. S. 367ff.) nur als Instrument zur Festhaltung und Übertragung mathematischer Gedanken gilt. Um diesen Punkt richtig zu würdigen, bedenke man, daß das (mathematische) *Denken* für BROUWER in reinen Konstruktionen besteht (vgl. nächste Nr.) und somit jeder Ausdrucksform dieses Denkens in Sprache oder Schrift vorangeht. Als *Logik* hingegen gilt ihm erst die Theorie der Ausdrucksformen des Denkens, also die Theorie der *Darstellung* der Mathematik, die erst *nach* der Mathematik möglich, gewissermaßen aus ihr abstrahiert ist; so erscheint die Logik zu einer „sprachlichen Erscheinung" degradiert, die logischen Gesetze als die Gesetze der Symbolisierung des Denkens, die also auch nur in dem Umfang anwendbar sind, der durch das anschauliche Fundament aller Mathematik ermöglicht wird. Zweitens stellt BROUWER (vgl. namentlich [10] und [17]) mit Hilfe des allgemeinen Begriffs der natürlichen Zahl eine konstruktive Mengendefinition auf, in der er den wesentlichen Ausgangspunkt der Mathematik erblickt; dieses Werkzeug erlaubt ihm — im Gegensatz zum älteren Intuitionismus, aber freilich auch durchaus abweichend von der Auffassung der CANTORschen Mengenlehre — die Bildung nichtabzählbarer Mengen und den Aufbau einer Analysis und Mengenlehre ohne Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, also insbesondere auch ohne Verwendung des BOLZANO-WEIERSTRASSschen Satzes. Trotz dieser grundsätzlich tiefgehenden Abweichungen BROUWERS von den älteren Intuitionisten, die sich im *Aufbau* der Mathematik stark geltend machen, sind die tatsächlichen Folgen hinsichtlich der ermöglichten *Resultate* nicht so verschieden, daß es sich lohnte, hier und in den späteren Rückverweisungen eine reinliche Scheidung innezuhalten; hinsichtlich des Überabzählbar-Unendlichen ist sogar der Standpunkt BORELS und seiner Anhänger oder der ältere WEYLS im Effekt noch radikaler als der von BROUWER. Wo Gedankengänge entwickelt werden, die BROUWER wesentlich eigentümlich sind, ist dies im folgenden hervorgehoben (so namentlich auch beim Gegensatz zu HILBERTS metamathematischer Methode, siehe S. 376ff.).

3. Die intuitionistische Grundthese: mathematische Existenz = Konstruierbarkeit. Die Grundanschauung, aus der sich alle die zum Teil so überraschend scheinenden Behauptungen der Intuitionisten mehr oder weniger konsequent ableiten lassen, betrifft einen schon beim Beweis des Wohlordnungssatzes (S. 197) in einem speziellen Sinn berührten Punkt: *die scharfe Unterscheidung zwischen Konstruktionen und reinen Existenzaussagen und die alleinige Anerkennung der ersteren unter Verwerfung der letzteren.*

Es gibt in den verschiedensten Gebieten der modernen Mathematik, auch sogar innerhalb der Arithmetik, Beweise für die Existenz gewisser mathematischer Objekte (Zahlen, Funktionen, Mengen usw.), die diese Existenz dartun nicht etwa durch schrittweise konstruktive Herstellung aus einfacheren Objekten, sondern unter Verwendung eines *nicht* konstruktiv auflösbaren Schrittes, etwa einer vollständigen Disjunktion; z. B. durch den Nachweis, daß die *Nichtexistenz* des fraglichen Objekts mit bewiesenen Lehrsätzen oder anerkannten Prinzipien im Widerspruch steht, ohne daß dieser Widerspruch einen Weg zur Herstellung des Objekts vermittelte. Ein solcher Beweis läßt in der Regel, im Gegensatz zu konstruktiven Beweisen, keinen näheren Einblick in die Natur des fraglichen Objekts zu; drückt die Existentialaussage z. B. nur aus, daß eine Konstante von bestimmter Bedeutung eine *endliche ganze Zahl* sei, so ist durch den Existentialbeweis keine Handhabe geboten, die Größe dieser Zahl zu bestimmen. Beweise dieser Art wurden bisher nicht nur anerkannt, sondern um des großen Scharfsinns willen, den sie meistens erfordern, sogar besonders geschätzt und bewundert. (Ein klassisches Beispiel ist HILBERTS erster, von GORDAN als „theologisch" bezeichneter Beweis für die Existenz des endlichen Invariantensystems, in den der Unkundige an Hand von TOEPLITZ [1] Einblick gewinnt; vgl. ferner § 16, Nr. 7.)

Die wichtigste Aussage dieser Art innerhalb der Mengenlehre ist der Wohlordnungssatz (S. 195). Er besagt, daß jede Menge durch entsprechende Anordnung ihrer Elemente in eine wohlgeordnete Menge verwandelt werden kann; *wie* dies aber zu machen und *ob* überhaupt eine geeignete Anordnungs*regel* zu finden ist, darüber gibt weder der Satz noch auch (im allgemeinen Fall) sein Beweis (S. 200 ff.), der auf dem ebenso rein existentialen Auswahlprinzip (S. 288 und ff.) fußt[1], irgendwelchen Aufschluß. Dies hat nur allzu unangenehme Folgen. Wenn nämlich z. B. das lineare Kontinuum (die Menge der reellen Zahlen) sich wohlordnen läßt, so sollte man erwarten, daß man hieraus die Ordnungszahl des so „wohlgeordneten Kontinuums" und aus dieser wiederum die Stellung der zugehörigen Kardinalzahl, d. h. der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums, innerhalb der Reihe der Alefs ermitteln könnte (Kontinuumproblem). Das ist indes bekanntlich bis heute nicht gelungen, obgleich das Problem seit drei Jahrzehnten im Vordergrund des mathematischen Interesses steht. Die Sprödigkeit dieses Problems

---

[1] Für die intuitionistische Beleuchtung des Auswahlprinzips vgl. man namentlich LUSIN [2], S. 81f. Es verdient Hervorhebung, daß POINCARÉ das Auswahlprinzip (wenn auch nicht den Beweis des Wohlordnungssatzes) anerkannte, wie er überhaupt hinsichtlich des mathematischen Existenzbegriffes die formalistische Auffassung (Existenz = Widerspruchsfreiheit, siehe S. 380) geteilt hat; vgl. POINCARÉ [5], S. 165.

scheint[1] aber die Folge des rein existentialen und nicht konstruktiven Charakters des Wohlordnungssatzes (und damit auch des Satzes von der Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten) zu sein, wodurch eben kein Schluß auf die Ordnungszahl des wohlgeordneten Kontinuums gestattet wird. Es war ein Verkennen dieses Charakters, wenn man vielfach gefühlsmäßig aus jener mangelnden *Anwendungsfähigkeit* des Wohlordnungssatzes a posteriori auf seine *Unhaltbarkeit* und auf Mängel in seinem Beweise schließen wollte.

Derartige bloße Existentialaussagen werden ganz allgemein von den Intuitionisten als bedeutungslos erklärt und abgelehnt. Ihr Wert könne höchstens in dem Anreiz liegen, den sie für den wirklichen, d. h. konstruktiven Beweis der betreffenden Behauptungen bieten. Bis zu dessen Gelingen stelle die Behauptung aber überhaupt kein echtes Urteil dar, sondern ein „Urteilsabstrakt", wertlos wie ein Papier, das das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne dessen Ort zu verraten. „Die Mathematik ist mehr ein Tun, denn eine Lehre." Die *Existenz* bedeute also in der Mathematik ausschließlich *gedankliche Konstruierbarkeit*; sie als *Widerspruchsfreiheit* zu deuten (vgl. § 18, Nr. 8) heiße die Mathematik in ein *Spiel* ausarten lassen[2]. Die Antinomien werden für diesen Standpunkt gegenstandslos, sogar abgesehen von der Frage, ob und wo ihre Herleitung mit den Gesetzen der Logik in Konflikt steht; denn selbst wenn sie logisch einwandfrei gebaut wären, so stellten sie doch bloße Wortverbindungen dar, für den Wissenschaftler schattenhafte Wesen, denen kein Konstruktionsverfahren auch nur den Schein der Existenz liehe.

Bei alledem muß freilich dahingestellt bleiben, ob man den Begriff der Konstruktion selbst erschöpfend zergliedern kann und nicht vielmehr sich darauf beschränken muß, ihn an Beispielen aufzuweisen oder gefühlsmäßig zu erfassen; präzise Angaben hierüber sind bei den Intuitionisten nicht zu finden. Das Material zu den Konstruktionen scheint für Brouwer in den natürlichen Zahlen (Nr. 8) und, enge damit zusammenhängend, im Begriff der zeitlichen Aufeinanderfolge (vgl. Schluß von Nr. 6) zu bestehen.

4. Die Ablehnung des „tertium non datur". Die Durchführung dieser Anschauung bedeutet geradezu einen Umsturz der „klassischen" Mathematik des 19. Jahrhunderts und deren Ersetzung durch eine neue, weit

---

[1] Allerdings kann man hierauf entgegnen: das Fiasko liegt möglicherweise daran, daß die Entscheidung des Kontinuumproblems vielleicht von den bekannten Axiomen der Mathematik (einschl. Mengenlehre) *unabhängig* ist (vgl. S. 375).

[2] Im Einklang hiermit erblickt die philosophisch-phänomenologische Einstellung Beckers ([2], S. 442) nur in der intuitionistischen Wissenschaft eine „sachliche" Mathematik, „die allein wirkliche Phänomene entdeckt, die originärer und adäquater Anschauung zugänglich und existentialer Auslegung fähig sind".

engere „intuitionistische“ Mathematik. Hier werde nur auf die allgemeinsten der sich ergebenden Folgen hingewiesen. Da steht an erster Stelle die Verwerfung des *Satzes vom ausgeschlossenen Dritten* (tertium non datur), den die Mathematik aus der Logik übernommen und bisher bedenkenfrei angewandt, insbesondere auch als den Kernschluß der „indirekten Beweise“ herangezogen hat.

Zur Illustration verstehen wir unter 𝔈 irgendeine bestimmte Eigenschaft, die *natürlichen Zahlen* zukommen kann. Beispielsweise kann die Behauptung „die natürliche Zahl n besitzt die Eigenschaft 𝔈“ eine der folgenden Bedeutungen haben:

die Zahl $2^n + 1$ ist eine Primzahl

oder:

in der Dezimalbruchentwicklung der Kreiszahl π steht an der n^{ten} Stelle rechts vom Komma eine Sieben

oder:

zu der Zahl $n + 2$ existiert mindestens éin „FERMATsches Zahlentripel“ (x, y, z), d. h. ein System von drei natürlichen Zahlen x, y, z von der Art, daß

$$x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2} \text{ ist}^{1}.$$

Wir stellen nun die Frage: *Gibt es Zahlen von der Eigenschaft* 𝔈? und beschäftigen uns mit den überhaupt *möglichen* Antworten auf diese Frage. Da ist vor allem die ausdrückliche Angabe einer bestimmten Zahl n denkbar, der die Eigenschaft 𝔈 zukommt, womit unsere Frage bejahend beantwortet ist (*erster Fall*). Weiter kann es vorkommen, daß ein Beweis gelingt, wonach aus dem Wesen der natürlichen Zahl an sich folgt, daß keine Zahl n die Eigenschaft 𝔈 besitzen kann, d. h. daß für jede Zahl das (kontradiktorische) Gegenteil von 𝔈 zutrifft; damit wäre unsere Frage verneint (*zweiter Fall*.) Liegt keiner dieser beiden Fälle vor — dies gilt derzeit z. B. für das oben an dritter Stelle angeführte Beispiel[2], übrigens auch für das erste, falls der Exponent

[1] Zwischen diesen Beispielen besteht der folgende hier nicht ausschlaggebende, aber doch erwähnenswerte Unterschied: Im ersten und zweiten Beispiel ist prinzipiell für jede *einzelne* natürliche Zahl n durch eine endliche (nur von n abhängige) Anzahl von Versuchen (numerisches Rechnen!) zu entscheiden, ob n die Eigenschaft 𝔈 besitzt oder nicht; praktisch ist eine derartige Entscheidung bei einigermaßen großen Zahlen n freilich undurchführbar, weil namentlich beim ersten Beispiel die für die notwendigen Rechnungen erforderliche Zeit ziemlich bald nach Jahrtausenden und noch größeren Zeiträumen zu bemessen wäre. Im dritten Beispiel dagegen ist schon für eine einzelne Zahl n die Lösung auf dem Weg des Probierens nicht möglich, weil man alle natürlichen Zahlen x, y, z durchprobiert haben müßte, um die Unmöglichkeit einer Beziehung der Form $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$ behaupten zu können.

[2] Die *Verneinung* der Frage, ob es Zahlen der Eigenschaft 𝔈 gibt, für dieses Beispiel stellt die Aussage des „letzten FERMATschen Theorems“ dar, dessen Beweis (oder Widerlegung durch Angabe einer Zahl n bzw. aller Zahlen n von der Eigenschaft 𝔈) das Ziel der vergeblichen Bemühungen vieler der hervorragendsten

n durch $n + 16$ ersetzt wird — so stellt sich doch der Mathematiker gewöhnlich auf den Standpunkt: „an sich" gibt es entweder irgendeine natürliche Zahl n von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, oder keine solche Zahl n; damit wird unsere Frage unter allen Umständen auf einen der beiden angeführten Fälle zurückgeführt, nur daß im ersten Fall eventuell die ausdrückliche Angabe einer speziellen Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ mit den derzeitigen Mitteln der Wissenschaft nicht durchführbar sein mag. Eine derartige Disjunktion, deren Entscheidung uns einstweilen unbekannt bleibt, braucht deshalb nicht bedeutungslos zu sein; sie gestattet uns z. B., wenn es gelingt, die Antwort „nein" auszuschließen, daraus ein „ja" zu folgern; oder es könnte, extrem gedacht, der Fall sein, daß sich sowohl aus dem „ja" wie aus dem „nein" durch logische Deduktion ein und derselbe mathematische Satz folgern ließe, so daß nach der obigen alternativen Antwort der Satz als bewiesen zu gelten hätte.

Der Intuitionist vom Schlage BROUWERS erklärt indes die obige disjunktive Antwort als ein unbegründetes Vorurteil und läßt somit auch Folgerungen der angegebenen Art nicht gelten. Er geht aus von seiner Anschauung „Existenz = Konstruierbarkeit" und erklärt: es ist den zuerst genannten beiden Fällen noch ein *dritter Fall* an die Seite zu stellen; der nämlich, daß (mindestens zur Zeit) aus dem Wesen der Zahl nichts über die Existenz oder Nichtexistenz von Zahlen mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ gefolgert werden kann und daß somit, solange keine spezielle Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ nachweisbar ist, unsere Frage offen bleibt, ohne die angeführte rein existentiale Disjunktion zu gestatten. Erst nach beendigter Durchlaufung und Prüfung der Gesamtheit *aller* natürlichen Zahlen könnte auf unsere Frage unter allen Umständen eine endgültige bejahende oder verneinende Antwort gegeben werden. Eine solche Durchlaufung ist aber nur in der Weise möglich, daß mittels eines *Gesetzes* (von freilich erst näher zu präzisierender Art) das unendliche Verfahren auf einen endlichen (nämlich mittels endlichvieler Schlüsse sich vollziehenden) Prozeß zurückgeführt wird; so im Fall einer generell negativen Entscheidung. Die Durchlaufung aller Zahlen als ein eigentlich unendlicher Prozeß ist hingegen weder praktisch durchführbar noch überhaupt als abgeschlossen denkbar; es ist deshalb unsinnig, von einem *Ergebnis* des unvollendbaren Prozesses zu reden. Ein reiner Existenzsatz der Art *„es gibt eine Zahl von der Eigenschaft* $\mathfrak{E}$" ist eben, ganz abgesehen von der Frage der Möglichkeit eines Zustandekommens, gemäß der These „Existenz = Konstruierbarkeit" überhaupt kein echtes Urteil. Der logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten ver-

---

Mathematiker seit mehr als zwei Jahrhunderten darstellt. Namentlich infolge eines auf seinen Beweis oder seine vollständige Widerlegung ausgesetzten Preises von 100000 ℳ, der inzwischen freilich durch die Inflation gegenstandslos geworden ist, hat dieser Satz neuerdings auch das Interesse vieler Nichtmathematiker auf sich gezogen.

sagt also hierbei[1], oder genauer: die stillschweigende Übertragung dieses Satzes auf das allgemeine mathematische Gebiet mit seinen unendlichen Mengen (z. B. in unserem Fall der Menge aller natürlichen Zahlen) ist unstatthaft und höchstens zur heuristischen Verwendung zulässig. Die Behauptungen „es existieren, wie das Beispiel der speziellen Zahl n beweist, natürliche Zahlen von der Eigenschaft 𝔈“ und „eine natürliche Zahl kann, wie aus dem Wesen einer solchen zu folgern ist, niemals die Eigenschaft 𝔈 besitzen“ sind einander offenbar keineswegs kontradiktorisch entgegengesetzt; so ist es auch keineswegs verwunderlich, daß es zwischen ihnen ein *Drittes* gibt[2]. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten kommt also, genau genommen, überhaupt nicht in Frage.

Gleichzeitig mit dem tertium non datur fällt hiermit ein nicht minder ehrwürdiges und anscheinend unangreifbares Verfahren der klassischen Logik fort: nämlich die Möglichkeit, allgemeine Urteile

---

[1] Man vergleiche auch die Kritik dieses Satzes bei J. KÖNIG [5]; ferner (besonders zur Frage der Evidenz des Satzes) PICHLER [1]. Demnächst soll eine Arbeit von DÖRGE und DUBISLAV zum tertium non datur erscheinen. Siehe ferner CARNAP [3], S. 364 und 367, BURKAMP [2] und HÄRLEN [2].

Ein logischer Widerspruch kann — entgegen BARZIN-ERRERA [1] — mit dem bloßen *Ausschluß* des tertium non datur aus der Reihe der logischen Prinzipien keinesfalls verbunden sein; denn hiermit wird ja das Operationsfeld der Logik und damit der Kreis der zulässigen Aussagen einer bloßen *Einschränkung* unterworfen. Aber auch wenn man weitergeht und an Stelle des tertium non datur ein entgegengesetztes Axiom bestimmter Art in die Logik einführt, so wird man, wie CHURCH [2] treffend ausführt, nicht von vornherein auf einen Widerspruch zu stoßen brauchen, vorausgesetzt, daß man den bei solchem Vorgehen naturgegebenen axiomatisch-formalistischen Weg (vgl. §§ 16 und 18) einschlägt: man hat dann ein „Tertium“ zwischen den Begriffen „Wahr“ und „Falsch“ als neuen undefinierten logischen Grundbegriff einzuführen und geeigneten Axiomen zu unterwerfen. Eine derartige, von der üblichen völlig abweichende Logik kann sehr wohl *neben* der von ARISTOTELES überkommenen widerspruchsfrei sein, wie ja auch die Möglichkeit der Nichteuklidischen Geometrien nicht etwa einen Widerspruch in der gewöhnlichen Euklidischen zur Voraussetzung hat. — Man vergleiche auch VASILIEV [1].

[2] Ohne allgemeineren kritischen Bemerkungen (vgl. besonders den Schluß von § 18) vorzugreifen, sei doch hierzu bemerkt, daß diese dem Intuitionisten vorschwebende Dreizahl von Möglichkeiten keineswegs drei gleichberechtigte Fälle darstellt, weder beim vorliegenden noch bei irgend einem anderen Problem. Im ersten wie im zweiten Fall liegt nämlich eine Sachlage vor, die objektiv gültig ist, die für jeden sich mit Mathematik beschäftigenden Kulturkreis oder „in jeder möglichen der Welten“, ja selbst für übernatürliche Wesen sich unverändert verhält; die dritte Möglichkeit dagegen ist lediglich von subjektiver, einstweiliger Art, fällt für mathematisch hinreichend vollkommene Wesen fort und ist auch für uns nur provisorisch in dem Sinn, daß sie jederzeit auf Grund eines mathematischen Beweises ausscheiden kann. Daß an Stelle jeder derart sich klärenden Frage immer wieder, wie BROUWER ([13], S. 210) betont, andere offene Probleme angeführt werden können, ändert nichts an der Tatsache, daß jede Koordination der geschilderten drei Fälle als künstlich erscheinen muß.

zu *negieren* (ohne Rücksicht auf die *Richtigkeit* des Urteils oder seiner Negation). Viele wichtige Urteile der Mathematik z. B. haben die Form allgemeiner Aussagen über (natürliche oder sonstige) Zahlen; so ist für natürliche Zahlen a, b z. B. $a + b = b + a$ ein richtiges, $a^b = b^a$ ein falsches Urteil dieser Art. Bei der üblichen Verwendung des tertium non datur würde die Negation des Urteils „für alle Paare natürlicher Zahlen a, b gilt stets $a + b = b + a$" besagen: „es gibt mindestens ein Paar a, b von Zahlen, für das $a + b$ verschieden ist von $b + a$". Bei Ablehnung des tertium non datur wird es offenbar sinnlos, die zweite Aussage der ersten als deren Negation gegenüberzustellen; in der Tat stellt der zweite Satz eine reine Existentialaussage dar und eine solche ist ohnehin — ganz abgesehen von der Rücksicht auf ihre Richtigkeit oder Falschheit — für den Intuitionisten an sich nichtssagend. Demgemäß bedeutet für ihn allgemein die Unrichtigkeit der Unrichtigkeit einer Aussage noch keineswegs deren Richtigkeit.

Gegen die Unerlaubtheit des tertium non datur bäumt sich in uns freilich zunächst unwiderstehlich das Gefühl auf; für unser Empfinden muß auch im Fall der einstweiligen oder selbst dauernden Unentscheidbarkeit einer Frage doch „an sich" entweder das Ja oder das Nein gelten, muß doch „für eine höhere Intelligenz" die Entscheidung klar liegen. Diese Überzeugung erklärt indes der Intuitionist — soweit sie für menschliche Wissenschaft Bedeutung haben soll — für ein Vorurteil, das seine Nahrung ziehe aus dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der traditionellen Logik[1]. In dieser sei er auch berechtigt, freilich nicht als apriorisches Prinzip, sondern als *Vorwegnahme* einer stets möglichen konstruktiven Entscheidung bei den dort vorkommenden endlichen Gesamtheiten. Denn wenn z. B. eine Gesamtheit von beliebig (aber endlich) vielen farbigen Kugeln gegeben ist, so ist es faktisch oder — wenn dies aus äußeren Gründen nicht angängig — mindestens gedanklich stets möglich, sie daraufhin zu überprüfen, ob sich unter ihnen eine weiße Kugel findet oder nicht; entweder das eine oder das andere läßt sich also konstruktiv feststellen und nur als Vorwegnahme dieser prinzipiell gesicherten Möglichkeit sei auch schon *vor* der Konstruktion die Aussage möglich: es verhält sich entweder so oder so[2]. An diese Disjunktion aber auch in der Mathematik zu glauben, bei deren unendlichen Gesamtheiten (z. B. den Ziffern eines nicht bis zu Ende

[1] Eine philosophische Kritik an der folgenden Argumentation BROUWERS findet man bei BURKAMP [2], S. 79f.

[2] Dabei ist vorausgesetzt, daß die betreffende Eigenschaft für alle Individuen der betrachteten Gesamtheit überhaupt *sinnvoll* (wahr oder falsch) ist, wie dies für die Eigenschaft „farbig" bei Kugeln zutrifft. Ob diese Bedingung z. B. auch für die Eigenschaft „imprädikabel" (S. 213) zutrifft, wird vielfach nicht ohne Grund bezweifelt; dann ist natürlich auch die dort an den Begriff „imprädikabel" geknüpfte Disjunktion fragwürdig.

übersehbaren, wenn auch an sich gesetzmäßig bestimmten Dezimalbruchs) die Möglichkeit konstruktiver Entscheidung unsicher sei, bedeute einen Fehlschluß[1]; hier darf man nicht die Alternative stellen: entweder haben alle Elemente der Gesamtheit eine gegebene Eigenschaft, oder eines hat sie nicht[2]. „Man muß sich vor der Vorstellung hüten, daß, wenn eine unendliche Menge definiert ist, man nicht bloß die für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft kenne, sondern diese Elemente selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen habe und man sie nur der Reihe nach durchzugehen brauche, wie ein Beamter auf dem Polizeibureau seine Register, um ausfindig zu machen, ob in der Menge ein Element von dieser oder jener Art existiert. Das ist einer unendlichen Menge gegenüber sinnlos.“ (WEYL [4], S. 41.) Die schrankenlose Verwendung der wesentlich transfiniten Begriffe „alle“ und „es gibt“, dieser trotz ihres harmlosen Äußern verderbengeschwängerten Werkzeuge der mathematischen und logischen Forschung, soll so als Folge einer verderblichen Infektion der Mathematik von der Logik her aufgefaßt und von nun an verboten werden; wir kommen hierauf im nächsten Paragraphen sowie zu Ende des § 18 nochmals zurück.

Diese (in ihrer Beziehung auf *Eigenschaften natürlicher Zahlen* sehr spezielle) Betrachtung läßt sich sehr wesentlich verallgemeinern. Es gilt nämlich das, was vorstehend in bezug auf die Frage „gibt es eine natürliche Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$?“ bemerkt wurde, um so mehr dann, wenn statt natürlicher Zahlen vielmehr *Folgen natürlicher Zahlen* wie z. B. die Ziffernfolgen unendlicher Dezimalbrüche betrachtet werden und demgemäß $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft von Zahlenfolgen bedeutet (z. B. die, periodisch zu sein, oder die, unendlichviele Paare zweier aufeinanderfolgender Einsen aufzuweisen). Die sich so ergebende Frage: „gibt es in einer gegebenen Menge Zahlenfolgen von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$?“ muß sogar noch schärfer als die vorige unter die Lupe genommen werden. BROUWER wiederholt nämlich hierbei nicht nur die obige, auf das tertium non datur bezügliche Bemerkung, sondern er kritisiert überhaupt die Legitimität des *Begriffs einer beliebigen Zahlenfolge* als etwas Abgeschlossenen, z. B. eines beliebigen Dezimalbruchs, dessen Ziffernfolge nicht durch ein Gesetz vorgeschrieben ist; der Begriff einer derartigen willkürlichen Zahlenfolge existiert für den Intuitionisten nur als etwas (durch willkürliche Wahl der einzelnen Ziffern) ständig *Werdendes*, nicht aber als ein Fertiges, von dem das Bestehen oder Nichtbestehen der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ endgültig ausgesagt werden könnte.

---

[1] Anders die Darstellung bei BECKER [2] (S. 450), wo wohl — wie in einigen anderen Punkten — eine mißverständliche Auffassung BROUWERS zugrunde liegt.

[2] Konsequenterweise knüpft BROUWER [18] die Anwendbarkeit des tertium non datur in der *Naturwissenschaft* an die Voraussetzungen der Endlichkeit und des atomistischen Baues des Weltalls, wobei überdies nur eine im intuitionistischen Sinne gereinigte Mathematik als wissenschaftliches Hilfsmittel zulässig wäre.

Die Schwierigkeit, die vorhin erst beim Überblick *unendlichvieler* natürlicher Zahlen hinsichtlich des Erfülltseins einer Eigenschaft in die Erscheinung trat, stellt sich uns jetzt schon im Hinblick auf eine *einzelne* Zahlenfolge entgegen.

5. Das Problem der Entscheidbarkeit. In engem Zusammenhang mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten steht das Axiom von der *Lösbarkeit* (*Entscheidbarkeit*) *jedes mathematischen Problems*. Bis vor kurzem schien dieses Axiom Gemeingut aller Mathematiker in dem Sinn, daß jedes mathematische Problem entweder mit den gegenwärtigen oder doch mit den künftigen Mitteln der Wissenschaft, die zu diesem Zweck nötigenfalls ihre Grundlage nach Bedarf zu verbreitern habe, sich durch eine endliche Kette von Schlüssen[1] seiner Entscheidung zuführen lasse; diese kann natürlich auch (auf Grund eines Unmöglichkeitsbeweises) negativ lauten, so z. B. bei der Quadratur des Zirkels oder der elementargeometrischen Dreiteilung eines beliebigen Winkels. In der Tat ist bis heute für kein mathematisches Problem der Beweis geführt, daß es „unentscheidbar" wäre[2]; die Auffindung eines derartigen Problems würde zweifellos ein ungeheuerliches Novum für die Mathematik, und nicht bloß für sie allein, darstellen[3]. Als besonderer Reiz und Antrieb pflegt der Glaube an die Entscheidbarkeit den forschenden Mathematiker anzufeuern und mit Vertrauen auf den schließlichen Erfolg zu erfüllen, während in so mancher anderen — vielleicht in *jeder* anderen — Wissenschaft das Gespenst des Ignorabimus einen Enderfolg gerade in den grundlegenden Fragen als unsicher erscheinen läßt. Die jahrhundertelangen Bemühungen, den Beweis des sog. letzten FERMATschen Theorems und so mancher anderen berühmten Vermutung zu erbringen, wären kaum bis heute fortgesetzt worden, hätte es einen Zweifel an der Lösbarkeit dieser Fragen

[1] Mit Recht hebt HESSENBERG [3] (S. 609) hervor, daß die *Endlichkeit* des zur Entscheidung führenden Verfahrens angesichts der Natur unseres Denkens eigentlich selbstverständlich ist; auch die Transzendenz von π z. B. wird ja nicht etwa geführt mittels einer Durchmusterung aller unendlichvielen algebraischen Gleichungen und des Nachweises, daß keine einzige unter ihnen π zur Wurzel besitzt, sondern durch eine endliche Kette von Schlüssen. Eine solche Zusammenfassung unendlicher Prozesse zu einem oder endlichvielen Schritten ist gerade typisch für die Mathematik. Freilich können in den axiomatischen Voraussetzungen (z. B. beim Auswahlprinzip, S. 283) unter Umständen unendliche Prozesse enthalten sein, die, wenn nicht unter Benutzung eines „Gesetzes" auf endliche Prozesse zurückführbar, von dem Intuitionisten abgelehnt werden.

[2] Hiermit sind natürlich nicht die Fälle gemeint, wo die *Unabhängigkeit* einer Aussage $\mathfrak{A}$ (etwa des Parallelenaxioms) von den übrigen Grundtatsachen des Gebietes (etwa der Geometrie) beweisbar ist und somit entweder $\mathfrak{A}$ oder auch die Negation davon postuliert werden kann (§ 18, Nr. 2). In solchen Fällen ist es kaum zweckmäßig, von Unentscheidbarkeit zu sprechen, da die Annahme oder Ablehnung von $\mathfrak{A}$ vielmehr das betrachtete Wissensgebiet erst vollends festlegt, also definitorischen Charakter trägt. Vgl. § 18, Nrn. 1 und 4.

[3] Siehe indes die erstaunliche Bemerkung LUSIN [1], S. 1572.

gegeben. Die Überzeugung von der Lösbarkeit, die offenbar logisch nicht zu erhärten ist[1], stützt sich außer auf die wissenschaftliche Erfahrung wohl vornehmlich darauf, daß die Begriffe und damit auch die Probleme der Mathematik — im Gegensatz zu den anderen Wissenschaften — ausschließlich unserer inneren Denk- und Anschauungssphäre entstammen; demgemäß werden unsere Kräfte, so erwarten wir, auch zur Bewältigung der von ihnen selbst gestellten Aufgaben hinreichen, wie sie überdies gewissermaßen ehrenhalber dazu verpflichtet zu sein scheinen.

Ein Zweifel an dieser Überzeugung von der Lösbarkeit wird indes von den Intuitionisten grundsätzlich ausgesprochen, namentlich auch da, wo zwar Lösungen vorliegen, aber nur solche existentialer Natur, die nicht anerkannt werden. Nach den Intuitionisten ist jene Überzeugung durch nichts gerechtfertigt; es bleibt, wie oben an speziellen Beispielen angeführt, neben der positiven Entscheidung einer Frage durch Angabe einer bestimmten Konstruktion (Rechenmethode usw.) und neben ihrer negativen Entscheidung durch einen legitimen, positiv gewendeten Unmöglichkeitsbeweis immer noch ein Drittes übrig, nämlich die Unlösbarkeit des Problems. Mit dieser resignierten Anerkennung der Möglichkeit, daß ein gegebenes mathematisches Problem seiner Natur nach unlösbar sein mag, ist schon rein gefühlsmäßig ein ungeheurer Kontrast zu der Atmosphäre einer nahen Vergangenheit gegeben. So konnte zur Zeit der Jahrhundertwende auf dem internationalen Mathematikerkongreß der führende Forscher unserer Tage seinen Festvortrag über „Mathematische Probleme" (HILBERT [4]) mit dem stolzen Hinweis einleiten: jeder Mathematiker teile gewiß „die Überzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse" und höre in sich „den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung; du kannst sie durch reines

---

[1] In vielen Fällen ist auch die etwaige *Unlösbarkeit* keinesfalls erweisbar, wie man einsehen kann mittels eines Gedankengangs, der freilich von Intuitionisten beanstandet würde. Daß z. B. für die im nächsten Absatz behandelte Menge von von Primzahlen die Entscheidung *unmöglich* sei, ob sie mehr als fünf Elemente enthält, wird man nie *beweisen* können; *wenn* sie mehr als fünf Elemente enthält, so ist das ja sicher in einem zwar nicht *beschränkten*, aber doch *endlichen* Verfahren nachweisbar; ein vermeintlicher Beweis der Unlösbarkeit zeigte also vielmehr, daß sie nur fünf Elemente enthält. In anderen Fällen freilich braucht von vornherein kein Widersinn in der Vorstellung zu liegen, die Unlösbarkeit eines Problems könnte sogar *beweisbar* sein; (vgl. LÉVY [1] und [2] und WAVRE [3] sowie für den ganzen Fragenkomplex HESSENBERG [3], Abschn. XXII).; es liegt dann aber wohl stets der in der vorletzten Fußnote erwähnte Sachverhalt vor. Indes wird ein solcher bei den hier geschilderten Beispielen — oder auch bei einem Problem wie dem, ob die reelle Zahl $2^{\sqrt{2}}$ (oder 2^{π}) algebraisch oder transzendent ist — kaum eintreten können, da es sich hier durchweg um Fragen aus mathematischen Disziplinen handelt, die als „kategorisch" oder „monomorph" festgelegt gelten; für die hiermit angeschnittenen schwierigen Fragen vergleiche man S. 347 ff.

Denken finden!" Auch außerhalb des Kreises der Intuitionisten ist heute das *Selbstverständliche* dieser Überzeugung fühlbar erschüttert; so liegt es nicht nur methodisch in der Linie der letzten Fragestellungen HILBERTS, sondern fügt sich auch psychologisch nur allzu gut in die heutige Situation im allgemein-mathematischen Bewußtsein und Unterbewußtsein ein, wenn neuerdings die exakte Bewältigung des Lösbarkeitsproblems in dem Sinn unternommen wird, daß wenigstens die widerspruchslose *Verträglichkeit* der Lösbarkeitsannahme mit den Prinzipien der Mathematik bewiesen (und aus dieser Verträglichkeit dann manche schwerwiegende Folgerung gezogen) werden soll (HILBERT [9] sowie nachstehend S. 375; vgl. auch schon HILBERT [6], S. 412ff.). Als leicht verständliche Beispiele von Fragen, die nach dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft in diesem Sinne möglicherweise zu den unlösbaren Problemen zu zählen wären, seien neben der in der Fußnote von S. 229 f. angeführten Frage noch die zwei folgenden genannt: gibt es endlichviele oder unendlichviele (bzw. nur fünf[1] oder mehr als fünf) Primzahlen der Form $2^n + 1$, wo n die natürlichen Zahlen durchläuft? ferner: gibt es in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl π eine Stelle (etwa die k^{te} hinter dem Komma), an der zum erstenmal eine Folge von (mindestens) sieben aufeinander folgenden Siebenern (7 7 7 7 7 7 7) beginnt? Der Intuitionist kann daher z. B. von der erwähnten Menge von Primzahlen nicht einmal behaupten, sie sei *entweder endlich oder unendlich*. Dagegen darf er ohne weiteres z. B. von der Zahl $2^{1024} + 1$ aussagen, sie sei entweder Primzahl oder nicht, und er darf dieses disjunktive Urteil beliebig als Beweisgrundlage verwenden. Denn ob das eine oder das andere der Fall ist, läßt sich jedenfalls durch ein endliches Verfahren (z. B. durch Probieren) entscheiden, mag dies auch bei jener mit 309 Ziffern zu schreibenden Zahl die Dauer von Menschenleben beanspruchen; wie bei den vorhin erwähnten farbigen Kugeln darf jene Entscheidung daher von Anfang an vorweggenommen werden.

6. Der Mengenbegriff. Das Wesen des Kontinuums. Innerhalb der Mengenlehre hat die intuitionistische Anschauung ganz besonders Folgen für *den Begriff und die Bildung von Mengen*. Wie schon in § 2 näher geschildert, faßt CANTOR den Mengenbegriff im Sinne *elementardefiniter*[2] Gesamtheiten: eine Menge ist bestimmt, wenn von jedem beliebigen Objekt begrifflich feststeht, ob es Element der Menge ist oder nicht. Die Definition einer Menge in diesem Sinn kann geschehen durch Angabe eines Gesetzes, einer Formel, einer Eigenschaft (z. B. derjenigen, eine transzendente Zahl oder ein

[1] Fünf solche Primzahlen gibt es jedenfalls, nämlich 3, 5, 17, 257, 65537 (für $n = 1, 2, 4, 8, 16$); weitere sind nicht bekannt.

[2] Die Ausdrucksweise folgt BECKER [1] (S. 403ff.), dessen Übersicht indes die vorhandenen Meinungsverschiedenheiten über den Mengenbegriff doch nur teilweise und auch nicht ausnahmslos zutreffend erfaßt.

FERMATscher Exponent oder eine sich nicht enthaltende Menge zu sein); ob dabei die Zugehörigkeit eines bestimmten Objekts zur Menge gerade mit den derzeitigen Mitteln der Wissenschaft festgestellt werden kann, ist gleichgültig. Jede Menge entspricht so aufs engste, und zwar eindeutig, einer Eigenschaft, die für die Elemente der Menge charakteristisch ist; doch wird verschiedenen Eigenschaften unter Umständen die „gleiche" Menge entsprechen, dann nämlich, wenn beide Eigenschaften „umfangsgleich" sind (d. h. den nämlichen Objekten zukommen). Die Erkenntnis, daß bei einer so weiten Begrenzung des Mengenbegriffs Widersprüche auftreten können, führte Logizisten wie RUSSELL (siehe § 15) und Intuitionisten wie WEYL zur Beschränkung des Mengenbegriffs auf *umfangsdefinite*[1] Gesamtheiten, für die also feststellbar sein muß, daß die Elemente einen „an sich bestimmten und begrenzten, ideal geschlossenen Inbegriff bilden" (WEYL) und daß es somit „außerhalb eines gewissen abgeschlossenen Kreises von Dingen", der konstruktiv zu erfassen ist, keine Elemente der Menge mehr gibt. Das ist z. B. bei der Menge aller Eigenschaften von natürlichen Zahlen nicht der Fall (vgl. S. 217 f.). Ohne die Stellung weiterer intuitionistischer Gruppen und anderer Richtungen (z. B. der Axiomatiker, für die man § 16 und 17 vergleiche) zum Mengenbegriff zu schildern, sei hier nur noch auf die wesentlich abweichende Auffassung BROUWERS hingewiesen. Dieser stellt eine eigenartige rein *konstruktive* Mengendefinition an die Spitze, bei der der Begriff der *natürlichen Zahl* und der des *Gesetzes* als intuitiv gegeben zugrunde gelegt werden. Auf das Wesen dieser — im Gegensatz etwa zu WEYL — nicht auf das Abzählbar-Unendliche beschränkten Begriffsbestimmung, die schwer verständlich und heute noch nicht als allseits geklärt zu betrachten ist, kann hier nicht näher eingegangen werden (vgl. besonders BROUWER [10] und [17]). Übrigens entsprechen bei BROUWER die Ausdrücke „Menge" und „Spezies" etwa den üblichen „Funktion" und „Menge".

Den drei vorstehend angedeuteten Standpunkten zum Mengenbegriff im allgemeinen entsprechen im besonderen drei verschiedene Auffassungen über die Begriffsbestimmung des *Kontinuums*, jener Menge, deren Wesen nach jahrhundertelangen Bemühungen von theologischer, philosophischer und mathematischer Seite durch CANTORS mengentheoretische Analyse endgültig geklärt schien (vgl. S. 156).

Für den CANTORschen Standpunkt, wonach eine Menge nur elementardefiniten Charakter zu besitzen braucht, wie auch noch für die Axiomatik ist das lineare Kontinuum eine Menge von Elementen (den Punkten einer Strecke bzw. Geraden oder den reellen Zahlen), zwischen denen eine Ordnungsbeziehung (etwa „links von —" oder „kleiner als —") definiert ist und deren gegenseitiges Verhältnis in bezug auf die Ordnungsbeziehung derart beschrieben werden kann, daß hier-

[1] Siehe Fußnote 2 auf S. 236.

durch das Wesen des Kontinuums, also auch seine Mannigfaltigkeit an einzelnen Elementen, erschöpfend charakterisiert wird: als eine lineare stetige Menge mit einer in ihr dicht gelegenen abzählbaren Teilmenge (S. 156). Da diese Menge aller Punkte einer Strecke sicherlich nicht rein konstruktiv zu erfassen ist[1] (vgl. §§ 15 und 17), so beschränkt sich WEYL auf die Zulassung eines umfangsdefiniten Teiles jener Punkte; dieser Teil ist — in erheblichem Maße willkürlich — bestimmt durch gewisse logisch-arithmetische Konstruktionsprinzipien, durch die man, ausgehend von den den rationalen Zahlen entsprechenden Punkten, zu einer wohlumgrenzten Gesamtheit weiterer Punkte gelangt. So wird das Kontinuum in gleichsam isolierte, nicht mehr zusammenhängende Elemente zerschlagen, gewissermaßen aus dem fließenden Brei des Kontinuums eine (dichte) Vielheit molekularer Tropfen herausgenommen: es bildet sich die *atomistische Auffassung des Kontinuums*. Natürlich kann diese Betrachtungsweise nicht etwa — wie es wohl DEMOCRIT noch vorschweben mochte — sich schmeicheln, hiermit das anschaulich „gegebene" Kontinuum getreu widerzuspiegeln; sie macht vielmehr aus der Not eine Tugend und setzt, an der Möglichkeit einer adäquaten Wiedergabe des Kontinuums verzweifelnd, an dessen Stelle gewaltsam einen einwandfreien engeren Bereich, der für die Konstruktionen der Analysis und der Geometrie genügen soll. Die Kluft zwischen diesem

---

[1] Daß man die Gesamtheit der reellen Zahlen rein arithmetisch erhalten und somit das Kontinuum arithmetisch erzeugen könne, hat HÖLDER bemerkenswerterweise schon seit 1892 verneint, also zu einer Zeit, wo die Kritik daran noch keineswegs wie heute in der Luft lag (vgl. HÖLDER [3], S. 193f., 349ff., 357, 556). Konsequent (nämlich intuitionistisch) urteilt HÖLDER denn auch (S. 548), „daß man bei einem rein logischen Aufbau, der vom Begriff des Kontinuums keinen Gebrauch macht, entweder im Gebiet des Abzählbaren stecken bleibt oder in gewissermaßen uferlose Begriffe hinübergleitet, die nicht als ‚klar und deutlich' anerkannt werden können". Wenn freilich der nämliche Forscher (vgl. auch etwa BOREL [2], Note IV, besonders S. 177, und namentlich LUSIN [2], S. 33) nun dennoch das Kontinuum axiomatisch festlegt und als eine (etwa apriorische) Urform anerkennt, die, obgleich nicht vom Denken schrittweise erzeugt, doch Gegenstand des Denkens werden könne, so ist für ihn (wie für die meisten *Gegner* des Intuitionismus) hier offenbar die Erwägung maßgebend, daß unter den Mathematikern „die wenigsten bereit sein werden, auf die Teilgebiete der Mathematik, die vom Kontinuum Gebrauch machen, zu verzichten". In dieser Stellung zum Kontinuum dürfte aber vielmehr ein Durchhauen des Knotens als seine Lösung liegen. Denn ein *philosophischer* Extrafreibrief für das Kontinuum als „reine Anschauung a priori" oder „Platonische Idee" erscheint wenig vertrauenswürdig nach den Erfahrungen, die auf diesem Gebiet z. B. mit dem Parallelenaxiom („Notwendigkeit" der euklidischen Geometrie) gemacht worden sind. Vom rein *mathematischen* Standpunkt aus ist es aber noch durchaus unsicher, ob die mit dem Kontinuum verbundenen, beim gegenwärtigen Stand der Forschungen HILBERTS und seiner Schüler noch keineswegs gelösten Schwierigkeiten von geringerer Größenordnung sind als z. B. die mit dem Begriff der Potenzmenge (vgl. besonders S. 326ff.) verknüpften, einem Begriff, der bereits unendlichviele transfinite Mächtigkeiten zu legitimieren gestattet.

atomistischen und dem anschaulich gegebenen Kontinuum entspricht dem Sachverhalt, daß im letzteren die einzelnen Punkte einander völlig gleichberechtigt sind, während bei einem arithmetisch-konstruktiven Aufbau des Kontinuums von bevorzugten Elementen (Null, Eins, ganze und rationale Zahlen) auszugehen ist; dieser Unterschied, dem WEYL durch völlige Ablehnung des geometrischen Kontinuums begegnet, führt gerade Forscher wie HÖLDER und LUSIN (vgl. vorige Fußnote) zur Scheidung zwischen arithmetischer und geometrischer Auffassung. Die atomistische Auffassung vermag denn auch BROUWER nicht zu befriedigen, der in seiner konstruktiven Mengendefinition das Mittel besitzt, das Kontinuum auch in eigentlicherem Sinne als Menge zu erfassen. Für ihn ist, unbeschadet unendlichvieler einzelner, gesetzmäßig bestimmter, fertiger Punkte, das Kontinuum als Ganzes nur noch ein *Medium freien Werdens*, in das zwar die einzelnen Punkte hineinfallen, das sich aber keinewegs in eine Menge fertiger Punkte auflöst; die Punkte im Kontinuum im allgemeinen *sind* nicht, sondern sie *werden* in der Begrenzung durch immer enger werdende Intervalle, die vermöge freier Wahlakte endlos ineinander geschachtelt werden und von denen freilich jedes seinerseits wiederum kontinuierlich ist[1]. Als extremes Beispiel diene etwa die Bestimmung der aufeinander folgenden Ziffern eines Dezimalbruchs durch Auswürfeln; vgl. auch das Beispiel auf S. 241. So findet zwar nicht in der Form, die die modernen Anforderungen der Strenge erfüllt und selbst noch übertrifft, aber doch wohl dem wesentlichen Inhalt nach eine Rückkehr zu längst überholt geglaubten Anschauungen GALILEIS und der Begründer der Infinitesimalrechnung statt, zu Anschauungen, die im Grund bis auf ARISTOTELES und vielleicht sogar ANAXAGORAS zurückgehen; die in neuerer Zeit herrschend gewordene Auffassung des Kontinuums als Gesamtheit fertig vorhandener Punkte, wie sie der Betrachtung CANTORS zugrunde liegt, wird als eine „in Chaos und Leersinn mündende“ Verirrung abgelehnt. Nicht mehr das Verhältnis von *Menge und unteilbarem Element* ist entscheidend für das Kontinuum, sondern das Verhältnis von *Ganzem und Teil*; es soll geradezu Grundeigenschaft des Kontinuums sein, Teile zu haben, die sich unbegrenzt weiter teilen lassen. Im Einklang mit der Preisgabe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten bleibt so selbst für die Disjunktion, daß zwei Punkte entweder zusammenfallen oder getrennt

---

[1] CANTORS Diagonalverfahren (S. 46) wird für diesen Standpunkt nicht bedeutungslos, wenn es auch in etwas anderem Lichte erscheint, nämlich den Begriff der nichtabzählbaren Menge als vorwiegend *negativ* erscheinen läßt (BOREL [2], Note IV; LUSIN [2]; vgl. auch BROUWER [3]); das Kontinuum erweist sich danach als eine Menge, von der zwar immer nur abzählbar unendliche Teilmengen angebbar sind, für die sich aber zu jeder derartigen Teilmenge immer noch weitere Elemente bestimmen lassen, und zwar durch im voraus festlegbare Konstruktionen.

liegen, kein Raum mehr; vielmehr trägt die Auffassung des *Werdens* einem endlosen Zusammenrücken von Punkten bis zur allmählichen Ununterscheidbarkeit Rechnung[1]. Der Zeitbegriff scheint hier in wesenhafter Weise einzugehen (vgl. auch BECKER [2]), wie er ja auch schon von KANT für die Zahlenlehre in Anspruch genommen worden ist.

7. Die Konsequenzen für die übrige Mathematik. Die Folgen, die all diese neuartigen Anschauungen für die Kritik der heutigen „klassischen" Mathematik haben, sind erschreckend weitgehend. Vor allem werden die meisten Begriffe, Methoden und Lehrsätze der allgemeinen *Mengenlehre* (namentlich fast alles, was über das Abzählbar-Unendliche hinausreicht) und ein sehr großer Teil ihrer Anwendungen, z. B. in der Theorie der reellen Funktionen, ungültig und sogar sinnlos, die Mengenlehre zu einem „interessanten pathologischen Fall" in der Geschichte der Mathematik, auf den spätere Generationen nur mit Gruseln zurückblicken mögen. Zu den fortfallenden Sätzen zählen z. B. der Satz von CANTOR (S. 67f.), der Äquivalenzsatz (S. 71), der Wohlordnungs- und Vergleichbarkeitssatz (S. 195 und 205), wie auch schon CANTORS Definition der wohlgeordneten Mengen (S. 167) geopfert werden muß. Auch viele heute bereits als klassisch geltende Methoden von WEIERSTRASS, DEDEKIND und anderen in der Grundlegung der *Analysis* bleiben nicht verschont, und zwar ist es in den einfachsten Fällen schon die Berührung mit den Irrationalzahlen, die in sonst einfache Beweismethoden den Unendlichkeitsbazillus hineinträgt und sie so in den Augen der Intuitionisten verseucht. So werden grundlegende Begriffe und Beweise bedeutungslos, darunter z. B. die Begriffe des DEDEKINDschen Schnittes und der willkürlichen Funktion, ferner die heute in jeder mathematischen Anfängervorlesung entwickelten Beweise für die Existenz einer oberen (unteren) Grenze zu jeder beschränkten Menge reeller Zahlen oder für die Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit einer in einem abgeschlossenen Intervall stetigen reellen Funktion. Der Unzulänglichkeit dieser Beweise steht bei BROUWER die — übrigens in seinem System nicht etwa selbstverständliche, sondern ziemlich tief liegende — Tatsache gegenüber, daß *jede* in einem Kontinuum definierte Funktion stetig, und zwar gleichmäßig stetig ist. Andererseits verneint WEYL [4] z. B. die Möglichkeit einer selbständigen, vom Koordinatenbegriff unabhängigen *Geometrie*, während allerdings ältere, dem Intuitionismus eng verwandte Bestrebungen (KANT, FRIES, NELSON [1]) gerade mit dem Motiv der „Anschauung" den apriorischen Anspruch einer bestimmten (euklidischen) „reinen" Geometrie stützen.

Auch soweit sich die *Ergebnisse* der bisherigen Mathematik in dem intuitionistischen System aufrechterhalten lassen, gestalten sich die

---

[1] Vgl. hierzu auch HJELMSLEV [1], namentlich den dritten Vortrag.

neuen *Beweise* vielfach erschreckend kompliziert gegenüber den gewohnten; auch der orthodoxe Intuitionist wird zugeben, daß sich für den Anfänger der Zugang zur Mathematik weitgehend nur auf dem Wege der bisher üblichen „falschen" Methoden eröffnet, was freilich keinen grundsätzlichen Einwand bedeutet. Ein einziges bezeichnendes Beispiel für die auftretenden Schwierigkeiten werde gegeben.

Einer der bekanntesten und wichtigsten Sätze der Mathematik ist der „Fundamentalsatz der Algebra", nach dem jede algebraische Gleichung beliebigen Grades mindestens eine (reelle oder komplexe) Wurzel besitzt. Dieser bereits im 18. Jahrhundert aufgestellte Satz hat seit seinen ersten (namentlich von GAUSS stammenden) Beweisen viele Dutzende weiterer Beweise gefunden, die auf sehr verschiedenartigen Methoden beruhen, zum Teil (so z. B. der zweite Beweis von GAUSS) sich im wesentlichen auf rein arithmetischer Grundlage aufbauen. Im Jahre 1924 sind nun völlig unabhängig voneinander von drei Intuitionisten dreier verschiedener Länder (SKOLEM [5], WEYL [5], BROUWER [15]) Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra erschienen auf Grund der Überzeugung, alle bisherigen Beweise seien unzureichend (vgl. dafür DE LOOR [1]). Für die mehr oder weniger analytischen Beweise und Beweisteile wurde diese kritische Meinung schon von älteren Intuitionisten wie KRONECKER und MERTENS vertreten; dabei spielt namentlich, entsprechend der Betonung des konstruktiven Moments, die Auffassung eine Rolle, wonach von einem Beweise des Satzes nur dann die Rede sein könne, wenn das Beweisverfahren die numerische Berechnung der Wurzeln einer gegebenen Zahlengleichung mit jeder gewünschten Genauigkeit ermögliche[1]. Inwiefern demgemäß auch den *arithmetischen* Beweisen des Satzes ein entscheidender Mangel anhaften soll, mag durch ein kraß gewähltes Beispiel in Anlehnung an DE LOOR beleuchtet werden.

Zwecks Beseitigung etwaiger mehrfacher Gleichungswurzeln ist für den Beweis zunächst zu untersuchen, ob ein gewisser aus den Koeffizienten der Gleichung gebildeter Ausdruck, die „Diskriminante" der Gleichung, gleich Null oder von Null verschieden ist. Um einen Fall zu konstruieren, wo die Entscheidung zwischen beidem unmöglich ist, gehen wir wieder wie auf S. 229 von der Dezimalbruchentwicklung der Kreiszahl π aus, im Hinblick auf die etwaige Nummer k derjenigen Stelle des Dezimalbruchs, an der zum erstenmal eine Folge von (mindestens) sieben hintereinander auftretenden Siebenern beginnt. Es ist unsicher, ob eine solche natürliche Zahl k überhaupt existiert, und wenn ja, welches ihr Wert ist; es liegt ein Problem vor, das der Intuitionist als „vielleicht unlösbar" bezeichnet. Wir definieren eine Zahl ϱ folgendermaßen: die mit 3,14159 . . . beginnende Dezimalbruchentwicklung von ϱ wird Stelle für Stelle durch die (beliebig weit bestimmbare) Dezimalbruchentwicklung von π festgelegt, und zwar derart, daß im allgemeinen an der nämlichen Stelle beidemal die gleiche Ziffer auftritt; nur an der etwaigen k^{ten} Stelle soll (statt 7 wie bei π) in ϱ die Ziffer 8 oder 6 gesetzt werden, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Hiernach kann ϱ ebenso wie π mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmt werden; indes ist unbekannt, ob ϱ gleich, kleiner oder größer als π ist. Nun kann man die Koeffizienten einer Gleichung als derartige von π und ϱ rational abhängige Ausdrücke wählen, daß die Diskriminante der Gleichung den Faktor $\pi - \varrho$ enthält; z. B. hat die Gleichung $x^3 - 3\pi^2 x + 2\varrho^3 = 0$ die Diskriminante $D = -108(\pi^6 - \varrho^6)$. Es ist dann nicht feststellbar, ob die Diskriminante, deren Wert sich jedenfalls nur äußerst wenig

[1] Diese Auffassung läßt begreifen, in welchem Sinne man die intuitionistische Mathematik als eine Synthese zwischen „Präzisionsmathematik" und „Approximationsmathematik" (F. KLEIN) ansprechen kann.

von Null unterscheiden kann, gleich Null ist oder nicht. Daher darf auch nicht etwa vermöge des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten angenommen werden, daß entweder das eine oder das andere der Fall sei; die Diskriminante ist eine „mit 0 unvergleichbare“ Zahl. Man kann daher nicht entscheiden, ob die vorgelegte Gleichung mehrfache Wurzeln hat, kann solche also auch nicht beseitigen.

So bleibt nur der Ausweg, den Beweis zunächst für den Fall *rationaler* Koeffizienten zu führen, in dem so unglückliche Verhältnisse nicht auftreten können, und dann auf dem Weg von Annäherungen zu Gleichungen mit irrationalen Koeffizienten fortzuschreiten.

8. Die Urintuition des Allgemeinbegriffs der natürlichen Zahl. Nach der vorstehenden Schilderung mag man es vielleicht als paradox empfinden, von einem führenden Intuitionisten die Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen“ bezeichnet zu hören (s. oben S. 220). Der Gegensatz ist jedoch nur ein scheinbarer. Den bisher erwähnten, vorwiegend negativen und namentlich die Beherrschung des Unendlichen einschränkenden Tendenzen des Intuitionismus steht nämlich ein positiver Grundgedanke gegenüber, der, wiewohl oft allzu sehr dogmatisch eingeführt, gleichfalls wesentlich aus der Ausgangsforderung der Konstruierbarkeit herzuleiten ist: *Die Voranstellung der natürlichen Zahlen bzw. des sie erzeugenden Bildungsgesetzes als einer der Begründung oder empirischen Bestätigung weder bedürftigen noch fähigen Urintuition.* Auf ihr baue sich die gesamte Mathematik und damit nach BROUWER auch die Logik auf, insofern als sie die entscheidende konstruktive Operation ermögliche, nämlich die Herleitung *jeder beliebigen* natürlichen Zahl auf induktivem (oder rekurrentem, d. h. schrittweise bis zur Eins zurücklaufendem) Weg[1]. BECKER ([2], S. 446f.) kennzeichnet in weiterem philosophischem Rahmen das Wesen dieser Intuition dahin, daß sie „allerdings nicht als ‚sinnliche‘ oder ‚empirische‘ Anschauung verstanden wird, sondern die Weise der unmittelbaren Gewißheit bezeichnet, in der uns *die logischen, arithmetischen und kombinatorischen Grundtatsachen* gegeben sind“ (vgl. auch ebenda, S. 463)[2]; jedenfalls handelt es sich um ein der Mathematik eigentümliches Anschauungsvermögen. Den die natür-

[1] Man vergleiche folgenden Epilog WEYLS ([4], S. 70): „Die neue Auffassung, sieht man, bringt sehr weitgehende Einschränkungen mit sich gegenüber der ins Vage hinausschwärmenden Allgemeinheit, an welche uns die bisherige Analysis in den letzten Jahrzehnten gewöhnt hat. Wir müssen von neuem Bescheidenheit lernen. Den Himmel wollten wir stürmen und haben nur Nebel auf Nebel getürmt, die niemanden tragen, der ernsthaft auf ihnen zu stehen versucht. Was haltbar bleibt, könnte auf den ersten Blick so geringfügig erscheinen, daß die Möglichkeit der Analysis überhaupt in Frage gestellt ist; dieser Pessimismus ist jedoch unbegründet. ... Aber daran muß man mit aller Energie festhalten: *die Mathematik ist ganz und gar, sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewegt, abhängig vom Wesen der natürlichen Zahl.*“

[2] BECKERS Versuch, sogar den transfiniten Ordnungszahlen ein unmittelbar anschauliches Fundament zu geben, wird freilich auch bei den Intuitionisten schwerlich Anklang finden.

lichen Zahlen betreffenden Kern dieser Urintuition entfaltet BROUWER weiter zur allgemeinen Mengenkonstruktion und „dehnt so die intuitionistische Begründung der (diskreten und abzählbaren) Arithmetik auf die (kontinuierliche und überabzählbare) Analysis aus“. Von jener mit besonderem Nachdruck hervorgehobenen Urintuition haben sich die Intuitionisten diesen ihren (leicht irreführenden) Namen gewählt.

Schon von dem ersten modernen Intuitionisten, KRONECKER, stammt das Wort: die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. POINCARÉ, der als nächster wieder ähnliche Ideen stark hervorhebt, hat ausführlich den Gedanken erörtert, daß die Mathematik mit ihren analytischen Urteilen und den syllogistischen Schlüssen aus ihnen doch nur eine ungeheure Tautologie darzustellen und also trivial zu sein scheine; in Wirklichkeit trage sie dennoch in echtem Sinne schöpferischen Charakter, und zwar einzig und allein deshalb, weil sie in all ihren Teilen durch ein grundlegendes synthetisches Urteil a priori befruchtet werde: eben durch das Prinzip der vollständigen Induktion, d. h. durch die Idee der Gesamtheit der natürlichen Zahlen (POINCARÉ [2], 1. Kapitel). Auch die Auffassung, wonach die vollständige Induktion etwa einen Bestandteil einer verkleideten *Definition* der natürlichen Zahlen (im Sinne der axiomatischen Methode, vgl. §§ 16ff.) und somit kein Urteil darstelle, wird von den Intuitionisten mit Recht nicht anerkannt. Jede Definition, die Wert haben soll, bedarf nämlich eines ergänzenden Satzes, der die *Existenz* von Begriffen der definierten Art auszusagen hat; in diesem Falle aber bedürfe ein solcher Satz, auch nur im Sinne der Widerspruchsfreiheit des Zahlbegriffs verstanden, schon zu seiner eigenen Begründung gerade der vollständigen Induktion, da doch die Unmöglichkeit, mittels *beliebig vieler* logischer Schlüsse zu einem Widerspruch zu gelangen, nachzuweisen sei.

Die Bedeutung des Prinzips der vollständigen Induktion für die intuitionistische Auffassung wird verständlich, wenn man bedenkt, daß zunächst die Grundforderung der reinen Konstruktion mittels endlicher Prozesse überhaupt nur zu Urteilen finiten Charakters führen kann, d. h. zu solchen, deren Gesamtinhalt durch eine endliche Anzahl von Verifikationen nachzuweisen und so gleichzeitig zu erschöpfen ist. Alle von der vollständigen Induktion wesentlich abhängigen Aussagen der Mathematik sind nicht von dieser Art, sondern tragen einen wesentlich anderen Charakter; das gilt schon für die einfachsten Sätze wie z. B. „für jede natürliche Zahl n gilt $n + 1 = 1 + n$“ oder „zu jeder gegebenen Primzahl gibt es in angebbarem Abstand eine noch größere“. Zwischen derartigen Aussagen, die die Intuitionisten eben auf Grund ihrer Bejahung der vollständigen Induktion noch anerkennen, und den eigentlich „transfiniten“ (wie z. B. dem Wohlordnungssatz), die sie verwerfen, besteht aber ein entscheidender Unterschied: Jene sind der Verifikation mit endlichen Mitteln (z. B. „$9 + 1 = 1 + 9$“ oder „auf

7 folgt die Primzahl 11") fähig[1]; sie können allerdings — im Gegensatz zu den finiten Aussagen — erst durch *unendlichviele* endliche Verifikationen erschöpft werden, von denen aber jede einzelne grundsätzlich endlicher Natur ist, mag sich auch die Durchführung (weil z. B. generationenlange Rechenarbeit erfordernd) praktisch verbieten. In dieser Verifizierbarkeit der von ihnen anerkannten mathematischen Aussagen erblickt z. B. POINCARÉ den eigentlichen Grund dafür, weshalb die Mathematiker im Gegensatz etwa zu den Philosophen trotz der Unzulänglichkeiten der Sprache im allgemeinen nicht aneinander vorbeireden; im Zweifelsfall wirkt die Verifikation aufklärend und vor ihr beugt sich alles. Die im engeren Sinn transfiniten Aussagen dagegen sind der endlichen Verifikation überhaupt nicht fähig und werden von den Intuitionisten deshalb als inhaltsleer abgelehnt; bei Aussagen dieser Art, wie z. B. dem Wohlordnungssatz, bleibe daher für Mißverständnisse ein so weiter Spielraum (vgl. POINCARÉ [6], z. B. S. 145f.).

Was die transfiniten Methoden des tertium non datur, des Gebrauchs von „alle" und „es gibt" usw. angeht, so werden wir sehen, daß überraschenderweise gerade die anscheinend schärfsten Gegner des Intuitionismus, nämlich die formalistische Schule HILBERTS, den methodischen Zweifel BROUWERS ihrerseits aufnehmen. Ganz entsprechend zeigt nun gerade eine neue und ganz besonders weittragende formalistische Veröffentlichung (VON NEUMANN [3], vgl. auch HILBERT [10] und namentlich WEYLS Bemerkungen dazu), daß auch hinsichtlich der Anerkennung der Zahlenreihe kaum mehr ein merklicher Unterschied zwischen beiden Richtungen besteht (vgl. S. 378f.). Wie immer man also auf Grund der in den nächsten Paragraphen erörterten Systeme sich auch zu den *Schlußfolgerungen* des Intuitionismus stellen mag, jedenfalls wird die hohe grundsätzliche und spezifisch mathematische Bedeutung vieler seiner *Ausgangspunkte* heute nicht mehr bestritten werden können.

§ 15. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen. RUSSELL und die logizistische Methode.

1. Erwünschtheit einer konservativen Behandlung der Antinomienkrise. Für die Intuitionisten stellen die Antinomien der Mengenlehre nicht den eigentlichen Wesensgrund dar, aus dem heraus sie ihre Reform der Mathematik an Haupt und Gliedern fordern. Die Antinomien wirken vielmehr nur als eines der auslösenden Momente; sie haben

[1] Es erscheint freilich zweifelhaft oder zum mindesten von einer tieferen Analyse des Begriffs „Verifikation" abhängig, ob neben den „realen" auch die nichttransfiniten „idealen" Aussagen der Mathematik (vgl. S. 374) als gleichermaßen verifizierbar und damit als legitim im Sinne POINCARÉS gelten dürften. Auch in der theoretischen Naturwissenschaft lassen sich ja die (idealen) Behauptungen nicht einzeln experimentell nachprüfen, sondern nur als Glieder einer ganzen Theorie.

das angeblich so waghalsige Tun und Treiben der modernen Analytiker und Mengentheoretiker blitzartig beleuchtet und so anscheinend die Gemeingefährlichkeit dieser neuen Entwicklung schlagend dargetan; die Gewissen zu schärfen wird damit zu ihrer wesentlichen Aufgabe. KRONECKER, der erste unter den modernen Intuitionisten, hat in der Tat weder das Aufkommen der Antinomien noch auch nur CANTORs systematische Vollendung und Darstellung der älteren Mengenlehre mehr erlebt.

Anders ist die Sachlage für die jetzt zu erörternde Methode, die Mengenlehre und darüber hinaus die Mathematik überhaupt wieder auf festen Grund und Boden zu stellen. Die Antinomien bilden hier nicht nur Anlaß und Ausgangspunkt, sondern sogar methodischen Wegweiser für die einzuschlagende Richtung bei dem Stützungsunternehmen. Im Anfang ist freilich keineswegs in jeder Beziehung ein scharfes Auseinanderklaffen dieses und des intuitionistischen Weges zu bemerken; vielmehr ist es gerade einer der hervorragendsten gemäßigten Intuitionisten, nämlich kein Geringerer als POINCARÉ, der — einem Hinweis von RICHARD folgend — vor allem auf dem Weg der Polemik mit den Logizisten diese auf den ihm selbst vorschwebenden methodischen Ausgangspunkt drängte (vgl. POINCARÉ [5], zweites Buch). Durch das Hinzutreten andersartiger Momente, die sich mit jenem Ausgangspunkt beinahe „zufällig“ verbanden, ist dann freilich diese wesentlich von RUSSELL (und WHITEHEAD) entwickelte mathematisch-logische Grundanschauung in einen vollen, vielfach konträr erscheinenden Gegensatz zum Intuitionismus gelangt.

Ein starkes Bedürfnis nach einer konservativeren Behandlung der Krankheit am Körper der Mengenlehre und der Mathematik überhaupt, wie sie durch die Antinomien offenbar geworden ist, besteht ja unzweifelhaft. Denn wenn der Intuitionismus einen großen Teil der modernen Mathematik für zusammengebrochen hält und das mathematische Gebäude nur in sehr beschränkten Ausmaßen und mit ebenso komplizierten wie vorsichtigen Aufbaumethoden wieder leidlich herzustellen sucht, so liegt die Frage nahe, ob man nicht das Kind mit dem Bade auszuschütten sich angeschickt hat: ob es nicht möglich ist und auch genügt, die Teile in den Grenzmauern und an den Fundamenten, wo sich Risse gezeigt haben, durch solidere Konstruktionen zu ersetzen, aber den wesentlichen Bestand des Gebäudes unversehrt zu erhalten. In der Tat liegt ja vor allem das folgende argumentum ad hominem nahe. Wo sonst in einem Wissenszweig, etwa in der Philosophie oder in der Nationalökonomie, die Grundlagen unsicher und umstritten sind, da macht sich die Wirkung alsbald aufs deutlichste geltend: auf dem schwankenden Fundament werden die verschiedensten, teilweise einander widersprechenden Theorien aufgebaut und bei den Versuchen zur Lösung eines und desselben Problems (etwa des Erkenntnisproblems oder der

Frage der Willensfreiheit oder der Agrarzölle) reden vielfach die wissenschaftlichen Schulen und Einzelforscher geradezu aneinander vorbei. In scharfem Gegensatz hierzu haben an vielen der mathematischen Aufgaben und Theorien, deren Lösbarkeit oder sogar deren Sinn überhaupt von den Intuitionisten bestritten wird, die verschiedensten Forscher mit ganz und gar abweichenden Methoden gearbeitet, um schließlich in den einzelnen Fragen zu durchweg übereinstimmenden Ergebnissen zu gelangen. Man wird daher rein psychologisch geneigt sein, auf Grund der Antinomien zwar anzuerkennen, daß die Grundlage der klassischen (CANTORschen) Mengenlehre unbefriedigend ist und eine Umgestaltung erfordert, aber gleichzeitig die Bestrebungen der Intuitionisten für eine allzu radikale Kur zu halten; diese Kur erreicht allerdings das (nur nebenbei) gewünschte Ziel, die aufgetauchten Schwierigkeiten auszuschließen, ist aber in der Art, wie sie dieses Ziel durchsetzt, der Polizeibehörde vergleichbar, die den Gefahren eines aussichtsreichen Klettersteiges durch ein Verbot des Begehens vorbeugen will. Man darf eben allgemein wissenschaftliche Methoden, die sich als vielfach fruchtbar und erfolgreich erwiesen haben, nicht einfach um deswillen ablehnen, weil sie in gewissen Fällen in Sackgassen und Widersprüche zu führen scheinen — wie ja auch z. B. die mit den divergenten Reihen auftauchenden Paradoxien nicht dazu geführt haben, die unendlichen Reihen überhaupt in Bausch und Bogen zu verwerfen.

Soweit namentlich die intuitionistischen Einwände das Feld der Mathematik selbst (und nicht der Logik) einengen, wie das vorwiegend der Fall ist, wird zum mindesten derjenige, der die Logik als von der Mathematik unabhängig ansieht, darauf verweisen können, daß die Antinomien einer vielmehr logischen als mathematischen Quelle zu entspringen scheinen; zu dieser Meinung bringt uns nicht nur die sehr allgemeine Natur einiger Paradoxien der Mengenlehre, sondern auch die Art der verwandten logischen Antinomien, in denen weder der Begriff der Menge noch z. T. der des Unendlichen vorkommt.

Es bleiben so für den, der den Intuitionismus als zu radikal oder zu dogmatisch ablehnt, zwei einigermaßen verschiedene, miteinander allerdings eng verwachsene Aufgaben zu erledigen. Die eine, vorwiegend *mathematische*, fordert, das Operationsfeld der Mengenlehre so weit — aber auch nur so weit — zu beschränken, daß aus ihm die bisher aufgetauchten Schwierigkeiten herausfallen und daß neue Widersprüche ausgeschlossen bleiben; was vor einer Gefährdung sicher erscheint, vor allem also was sich als mathematisch wertvoll erwiesen hat, soll im mengentheoretischen Gebiet belassen werden. Faßt man etwa die RUSSELLsche Antinomie (vgl. S. 211) ins Auge, so liegt der Schluß nahe, daß die erforderliche Berichtigung vorzugsweise oder sogar ausschließlich den *Begriff der Menge* betreffen, nämlich seine übergroße Allgemeinheit einschränken muß. Die andere, in erster Linie *allgemein-*

logische Aufgabe, die, obgleich mit der Grundlagenforschung der Mathematik aufs engste verknüpft, für unsere Betrachtung naturgemäß an die zweite Stelle zu treten hat, läßt sich etwa so kennzeichnen: es sollen die inneren Gründe für die Notwendigkeit und das Ausmaß der der Mengenlehre aufzuerlegenden Gebietseinschränkung aufgehellt und allenfalls darüber hinaus die Fragen geklärt werden, die der allgemeinen Logik aus den erwähnten logischen Antinomien erwachsen.

Ein vollkommenes und endgültiges Gelingen der in diesem Sinn notwendigen Einschränkung des Gebiets der Mengenlehre wird man nun freilich nicht erwarten dürfen, sondern sich mit einer in mancherlei Richtung *vorläufigen* Lösung begnügen müssen. Insbesondere ist das der Fall — und auch verhältnismäßig erträglich — in dem Sinn, daß die zu ziehende Grenzlinie zwar keinesfalls *zu weit* verlaufen darf, so daß für gewisse Schwierigkeiten noch Raum verbliebe, aber allenfalls *unnötig eng* sein mag, nämlich enger, als das Ziel der Vermeidung von Widersprüchen an sich erfordern würde; eine solche Grenzlinie liefert eine vielleicht übermäßig eingeengte, aber jedenfalls einwandfreie Wissenschaft und sie muß hingenommen werden, so lange die scharfe Grenze zwischen Zulässigem und Unzulässigem unauffindbar erscheint. *In solchem Sinne und mit einigen wesentlichen, noch hervorzuhebenden Einschränkungen ist es nun tatsächlich gelungen, die erwähnte Aufgabe zu lösen.* Bei dem Mangel an Bestimmtheit, der unserer Aufgabe im Sinne der soeben gemachten Bemerkungen anhaftet, kann es nicht wunder nehmen, daß verschiedene Bearbeitungen zu wesentlich verschiedenartigen und wohl auch verschiedenwertigen Lösungen führten. Von den beiden wichtigsten dieser Lösungswege wird der eine, nach der axiomatischen Methode orientierte im nächsten Kapitel ausführlich geschildert; auf den anderen, wesentlich von RUSSELL gebahnten Weg wollen wir jetzt einen flüchtigen Blick werfen.

2. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen und ihr Verbot. Den Ausgangspunkt bei (POINCARÉ und) RUSSELL bildet die Ablehnung der sog. *nicht-prädikativen* Definitionsverfahren.

Hierunter versteht man zunächst ganz allgemein die Bildung zweier Begriffe in der Art, daß in die Definition eines jeden unter ihnen der andere Begriff notwendig eingeht. Die beiden Begriffe können auch zusammenfallen; dann wird oft[1] die Unmöglichkeit eines solchen Vorgehens besonders augenfällig. Wenn beispielsweise eine Zahl x bestimmt werden sollte als größter gemeinschaftlicher Teiler der *ganzzahligen* unter den Zahlen 6, $\frac{x}{2}$, 8, so kann für ganzzahlige Werte von $\frac{x}{2}$ offenbar dieser Vorschrift nicht Genüge geleistet werden, während anderenfalls,

[1] Es sind freilich auch ganz andersartige, rechtmäßige Fälle denkbar, in denen die zirkelhafte Verknüpfung nur scheinbar ist; etwa wenn x durch die Gleichung $x = 5x - 7$ festgelegt wird.

also bei Fortlassung von $\frac{x}{2}$ gemäß der Vorschrift, sich $x = 2$ ergäbe, also $\frac{x}{2}$ dennoch ganzzahlig würde.

Im engeren, für uns allein in Betracht kommenden Sinn bezeichnet man als nicht-prädikativ jedes Verfahren, welches ein einer gewissen Gesamtheit M als Glied angehöriges Individuum m in der Weise kennzeichnet, daß in die Definition eben jene Gesamtheit eingeht; oder ein wenig eingeschränkter: jedes Verfahren, welches einen *speziellen* Vertreter m eines gewissen Allgemeinbegriffs unter Zuhilfenahme der Gesamtheit M *aller möglichen* Vertreter jenes Allgemeinbegriffs definiert[1]. Z. B. soll in RICHARDs Antinomie (S. 214f.) ein bestimmter, sich als endlich definierbar erweisender Dezimalbruch mittels der Gesamtheit *aller* endlich definierbaren Dezimalbrüche gebildet, nämlich aus dieser Gesamtheit mittels des Diagonalverfahrens hergeleitet werden. Man kann sich Definitionen solcher und etwas allgemeinerer Art veranschaulichen durch das Schema der Beziehung

$$M = \{a, b, c, \ldots x, y, z, \ldots\},$$

in der $a, b, c, \ldots$ *feste* Objekte (z. B. Mengen) darstellen, dagegen $x, y, z, \ldots$ in bestimmter Weise von der Menge M abhängen. RUSSELL hat mit einer gewissen Systematik Antinomien nach Art der im vorletzten Paragraphen beschriebenen entwickelt; nicht etwa um durch deren Häufung das Gewicht der schon durch einen einzigen Widerspruch ausgelösten Bedenken zu verstärken, sondern im Gegenteil um das Unheimliche der einzelnen Antinomie fortzunehmen und in der Massenerscheinung ihr Charakteristikum kenntlicher und greifbarer zu machen. In der Tat weist er bei ihnen allen ein nicht-prädikatives Verfahren auf, in dem er den wesentlichen Kern der auftretenden Widersprüche sieht, und zieht daraus den Schluß, der Mathematiker müsse sich zur Regel machen: *keine Gesamtheit kann Glieder enthalten, die nur mittels jener Gesamtheit definierbar sind* und somit ihrerseits von jener Gesamtheit abhängen („no totality can contain members defined in terms of itself“; „whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection“). Die nur so definierbaren Begriffe können natürlich existieren, aber eben nicht als Glieder jener Gesamtheit. Bei Befolgung dieser Regel[2] („vicious circle principle“), die er zu einem Grundprinzip seines großen logisch-mathematischen Systems macht, können in der Tat Widersprüche wie z. B. der RICHARDsche nicht auftreten; die fragliche Menge von Dezimalbrüchen ist dann nämlich die Menge M all der Dezimalbrüche, die mit endlichvielen Worten definiert werden können, *ohne daß bei dieser Definition der Begriff der Menge M selbst benutzt wird* (vgl. schon RICHARD [1] und POINCARÉ [5], S. 174). Die Verwendung des Diagonal-

[1] Vgl. auch die von SCHOLZ [1] angegebene Charakterisierung.

[2] RUSSELL [3]; WHITEHEAD-RUSSELL [1 I_2], S. 58.

verfahrens im oben angegebenen Sinn, die demnach zu einem in M nicht vorkommenden Dezimalbruch führt, ergibt bei dieser Auffassung keinen Widerspruch.

Natürlich soll durch den Ausschluß der nicht-prädikativen Begriffsbildungen nicht etwa ausgedrückt werden, daß die *nicht* unter das Verbot fallenden Definitionen generell einwandfrei seien; auch andere Definitionen bedürfen noch der Prüfung ihrer Widerspruchslosigkeit, wie etwa das Beispiel „das gleichseitige rechtwinklige Dreieck" zeigt.

Einige weitere Beispiele, die absichtlich (zur Illustration späterer Betrachtungen) sehr verschiedenartig gewählt sind, mögen die nicht-prädikative Begriffsbildung verdeutlichen; dabei bezeichnet stets m dasjenige Glied der Gesamtheit M, welches durch M festgelegt wird.

1. $f(x)$ sei für $0 \leqq x \leqq 1$ eine stetige reelle Funktion einer Veränderlichen x, M die Gesamtheit aller zugehörigen Funktionswerte $f(x)$, m der *kleinste* unter all diesen Funktionswerten, d. h. die kleinste Zahl der Zahlenmenge M. (Daß in M eine kleinste Zahl *existiert*, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß M eine abgeschlossene Menge ist [vgl. S. 159], ist natürlich nicht selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises.)

2. In Zermelos erstem Beweis des Wohlordnungssatzes (S. 200ff.) wurde der Begriff einer Gammafolge einer beliebig gegebenen Menge N eingeführt und dann eine besondere, nämlich die umfassendste aller Gammafolgen (ihre geordnete Vereinigungsmenge), betrachtet. Bezeichnen wir diese besondere (damals Σ genannte) Gammafolge mit m und die Menge aller Gammafolgen von N mit M, so geht M in die Definition von m ersichtlich ein.

3. N sei eine beliebige Menge (z. B. die Menge aller natürlichen Zahlen); $\mathfrak{U}N = M$ bedeute die Menge aller Teilmengen von N (Potenzmenge von N, etwa „das Kontinuum") und zu den Teilmengen von M sei eine beliebige, aber feste Auswahl je eines ausgezeichneten Elements aus jeder Teilmenge gegeben, womit nach Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes eine Wohlordnung von M eindeutig bestimmt ist (S. 200ff.). Das erste Element der erhaltenen Wohlordnung von M werde mit m bezeichnet. Dann ist m (als Element von M) eine spezielle Teilmenge von N, in deren Definition wenigstens bei der hier angegebenen Auffassung die Gesamtheit M *aller* Teilmengen von N eingeht.

4. (Vgl. Hartogs [1] und Sierpiński [2].) Wir gehen aus von der Menge M, deren Elemente alle möglichen wohlgeordneten Punktmengen (Mengen reeller Zahlen) sind, um durch sie eine spezielle derartige Punktmenge m — die überdies, worauf wir an anderer Stelle (S. 295) nochmals zurückkommen, von der Mächtigkeit des Kontinuums sein soll — folgendermaßen zu bestimmen: Die Elemente von M, in denen die reellen Zahlen natürlich nicht gerade ihrer Größe nach aufzutreten brauchen, seien derart in verschiedene Mengen (also Teilmengen von M) aufgeteilt, daß jedesmal lauter Punktmengen von der nämlichen Ordnungszahl (und alle solchen) zu einer und derselben Menge A gerechnet werden; auch $\{0\}$ ist somit

eine dieser Mengen A. **A** sei dann die Menge aller derartigen Mengen A in solcher Anordnung, daß die Menge A der Menge A' vorangeht, falls die Elemente von A eine kleinere Ordnungszahl besitzen als die von A'; offenbar wird **A** durch diese Vorschrift wohlgeordnet, und zwar derart, daß der durch A bestimmte Abschnitt von **A** den Elementen von A ähnlich ist.

Weiter ist die Kardinalzahl von **A** größer als die des Kontinuums. Denn jede Teilmenge $\bar{\mathbf{A}}$ von **A**, deren Kardinalzahl $\leqq \mathfrak{c}$ ist, erlaubt die Bildung einer zu $\bar{\mathbf{A}}$ ähnlichen, also namentlich wohlgeordneten Punktmenge, welche somit einem gewissen Element A von **A** als Element angehören wird und demnach dem durch dieses A bestimmten Abschnitt von **A** ähnlich ist. $\bar{\mathbf{A}}$ muß daher eine *eigentliche* Teilmenge von **A** sein, weil im Falle $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ diese Menge einem Abschnitt von sich selbst ähnlich wäre, entgegen Satz 10 auf S. 180. Nach dem Vergleichbarkeitssatz (S. 205) hat somit **A** eine Kardinalzahl $> \mathfrak{c}$.

Ist schließlich unter den (hiernach sicher vorhandenen) Abschnitten von **A**, die von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ sind, $\mathbf{A}_0$ derjenige von der kleinsten Ordnungszahl, so hat man in $\mathbf{A}_0$ eine eindeutig definierte wohlgeordnete Menge. Jedes Element m der Menge A, die in **A** den Abschnitt $\mathbf{A}_0$ bestimmt, stellt dann eine der Ordnungszahl nach eindeutig bestimmte wohlgeordnete Punktmenge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ dar, in deren Definition die Menge M *aller* wohlgeordneten Punktmengen eingeht.

5. In der BURALI-FORTIschen Antinomie (S. 212) wurde die Gesamtheit M aller Ordnungszahlen, geordnet nach der Größe der einzelnen Ordnungszahlen, betrachtet. Da sich M als wohlgeordnet erweist, schien es möglich, eine Ordnungszahl m als Ordnungszahl der Menge M aller Ordnungszahlen zu definieren. — Für das nicht-prädikative Moment in den verschiedenen anderen Antinomien vergleiche man RUSSELL [3].

Auch das bei den Antinomien (S. 217 f.) angeführte Beispiel einer Eigenschaft $\mathfrak{E}_0$ von natürlichen Zahlen, die von der Gesamtheit *aller* derartigen Eigenschaften abhängt, kann als Beispiel dienen.

Das generelle Verbot der nicht-prädikativen Begriffsbildungen ist in solcher Allgemeinheit keineswegs unbestritten. Die Art und Tragweite der diesbezüglichen Meinungsverschiedenheiten wird an einer Diskussion klar, die sich um die vorhin angeführten Beispiele 1 und 2 dreht[1]. Gegen ZERMELOS ersten Beweis des Wohlordnungssatzes (S. 200ff.) hat POINCARÉ den Einwand erhoben, daß die (darin wesentliche) umfassendste Gammafolge Σ auf nicht-prädikative Art, nämlich als Summe *aller* Gammafolgen, definiert und deshalb unzulässig sei. Dem begegnet ZERMELO ([4], vgl. dazu auch [2]) namentlich mit der Berufung auf das Beispiel 1: der dort zur Verwendung kommende Begriff des Minimums einer Zahlenmenge (die ein Minimum besitzt) wurde nämlich von den Mathematikern stets unbedenklich benutzt und spielt z. B. in einem der bekanntesten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, wo es auf das Minimum der Absolutwerte $|f(x)|$ eines Polynoms $f(x)$ für komplexe x ankommt, eine ganz wesentliche Rolle. Ein Verbot, das derart die klassischen Beweise der Mathematik antaste, könne — so meint ZERMELO — nicht ernst genommen werden.

Nun will allerdings POINCARÉ selbst (siehe [3]) auf Beweise wie den angeführten nicht verzichten. Er weist nämlich das nicht-prädikative Moment darin als entbehrlich nach: statt des kleinsten unter *allen* möglichen Werten

[1] Leser, die mit den nachfolgend benutzten algebraischen und analytischen Begriffen nicht vertraut sind, mögen diesen und die beiden nächsten Absätze überschlagen.

von $|f(x)|$ brauche man nur die untere Grenze aller für *rationales* x sich ergebenden Sonderwerte von $|f(x)|$ zu betrachten, was in der Tat auf dasselbe hinausläuft; diese untere Grenze *könne* zwar unter Umständen selbst ein derartiger Sonderwert von $|f(x)|$ sein, *brauche* es aber nicht zu sein; daher könne auch in dem letzten schlimmsten Fall von einer nicht-prädikativen Definition keine Rede sein, da dann jene untere Grenze zwar Element der Menge *aller* $|f(x)|$ mit rationalem x sei, aber *nicht kraft ihrer Definition, sondern kraft eines Beweises, der ihrer Definition und Existenzsicherung erst nachfolge.*

Nach dieser Selbsteinschränkung des POINCARÉschen Verbotes kann nun freilich ZERMELO darauf hinweisen, daß in seinem von POINCARÉ getadelten Beweise der nämliche Sachverhalt vorliege. Die Gammafolge Σ wird in der Tat zunächst allein in der Eigenschaft als Summe aller Gammafolgen definiert und als existierend erkannt; darnach folgt erst der Beweis, daß im vorliegenden Fall Σ sozusagen „zufällig" (d. h. nicht kraft Definition) selbst eine Gammafolge (und somit die umfassendste) ist. Das entspricht einfach dem in der Logik wohlbekannten Sachverhalt, wonach im allgemeinen sehr verschiedene Arten, ein Objekt zu bestimmen, möglich sind und diese verschiedenen Arten zwar nicht identische, wohl aber umfangsgleiche Begriffe liefern. Jedenfalls sind so die nicht-prädikativen Verfahren in weiter Ausdehnung mit POINCARÉs eigenen Argumenten gerechtfertigt. Ja noch mehr: klammert man sich an POINCARÉs Legitimierung des obigen Beweises, so kann man selbst an Antinomien wie z. B. der BURALI-FORTIschen (obiges Beispiel 5) das nicht-prädikative Moment ausschalten, das für den Widerspruch verantwortlich sein sollte. Man fasse nämlich die (nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete) Menge aller Ordnungszahlen zunächst als eine nur schlechthin *geordnete* Menge O auf und beweise darnach erst für ihren Ordnungstypus, daß er eine Ordnungs*zahl* (d. h. den Typus einer *wohlgeordneten* Menge) darstellt und somit ungereimterweise der Menge O als Element angehören müßte!

Wie schon aus dem Vorangehenden und noch mehr bei einer vergleichenden Durchsicht der einschlägigen Literatur erhellt, bestehen erhebliche Meinungsverschiedenheiten und auch Mißverständnisse über *den Sinn und die Tragweite des Verbotes nicht-prädikativer Prozesse.* Wenn man von der historischen Entwicklung, für die POINCARÉ im Vordergrund steht, nunmehr absieht und die (sicherlich noch nicht endgültigen) Auffassungen der heutigen Forscher, soweit sie dem Problem Beachtung schenken, zu analysieren versucht, so wird man eine Dreigliederung festzustellen berechtigt sein. Zunächst sind da die durchaus harmlosen Fälle, wo ein — auch anderweitig charakterisierbares — Glied einer Gesamtheit M beschrieben wird in einer Form, die auf M selbst Bezug nimmt; dieser Fall liegt etwa beim Beispiel 1 auf S. 249 vor. Weder RUSSELL noch andere ernsthafte Forscher haben gegen Begriffsbildungen dieser Art etwas einzuwenden; der *Begriff* der unteren Grenze oder des Minimums einer Zahlenmenge bleibt vom vicious circle principle und von RUSSELS Typentheorie (Nr. 3) unberührt (nicht aber ebenso der *Beweis* für die Existenz der unteren Grenze). Eine zweite Ausprägung des Nicht-Prädikativen liegt in der Bildung von Mengen, die sich selbst als Element enthalten. In diesem Fall, der vor allem von RUSSELLS Verbotsregel getroffen werden sollte, erweist sich diese für ihn im Grunde hinterher als entbehrlich; denn wie in der folgenden

Nr. 3 zutage tritt, sind derartige Bildungen nicht sowohl (im Sinne der Verbotsregel) *zirkelhaft* als vielmehr *sinnlos* — nämlich auf Grund der Typentheorie, nach der man ebensowenig etwa aussagen kann, eine Menge sei *nicht* Element von sich selbst (vgl. S. 257). Von dieser Art ist z. B. die BURALI-FORTIsche Antinomie. Drittens endlich hat man die Fälle in Betracht zu ziehen, wo wirklich die Gesamtheit aller Objekte (Eigenschaften usw.) von bestimmter Art oder ein Gegenstand, in dessen Definition diese Gesamtheit eingeht, als neues, in gewissem Sinn mit den Ausgangsobjekten gleichartiges Objekt eingeführt werden soll; der Unterschied gegen die zuerst angeführte Art liegt darin, daß hier nicht sichergestellt ist, ob das neue Objekt unabhängig von der Art seiner Einführung schon „existiert", d. h. anderweitig eingeführt werden kann. Mit dieser Art nicht-prädikativer Prozesse sind die wesentlichen und großenteils noch unerledigten Schwierigkeiten verknüpft.

Auch bei Beschränkung auf Fälle von den beiden letzten soeben geschilderten Arten gilt für das POINCARÉ-RUSSELLsche Verbot der nicht-prädikativen Begriffsbildungen jedenfalls: leichter gesagt als getan. Bei strenger Befolgung des Verbotes geht, nicht sehr viel anders als im Intuitionismus, ein großer Teil der modernen Analysis und Mengenlehre verloren, namentlich diejenigen Gebiete, in denen es wesentlich ist über das Abzählbar-Unendliche hinauszuschreiten[1]. Auch der Rettungsgürtel, mit dem POINCARÉ (vgl. S. 250f.) gewissen unbeabsichtigten Opfern seiner Kritik zu Hilfe kommen will, erweist sich für wichtige Begriffsbildungen der Mathematik als nicht tragfähig, während er auf der anderen Seite sogar durchaus unwürdigen, nämlich widerspruchsvollen Objekten zugute kommt. Unter anderem fällt mit dem Ausschluß der nicht-prädikativen Prozesse der Satz, wonach jede beschränkte Zahlenfolge oder -menge eine untere und obere Grenze besitzt, also eine der Hauptgrundlagen der Funktionentheorie (vgl. WEYL [2] und [3]).

Eine besonders wesentliche Folge jener Verbotsregel für die *Mengenlehre* sei noch angedeutet: Bei CANTORS Fassung des Begriffes „Teilmenge" (S. 20) muß zu den Elementen der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ einer Menge M (S. 107), d. h. zu den Teilmengen von M, eine Gesamtheit von Elementen aus M auch dann gerechnet werden, wenn ihre Kennzeichnung nur möglich (oder bekannt) ist mittels einer Definition, in die die Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ selbst eingeht — obgleich zu deren Elementen die zu definierende Gesamtheit ihrerseits gehört (vgl. Beispiel 3 auf S. 249). Eine derartige Verwendung des Begriffes der Potenzmenge ist uns, wenn auch nur im Wege des indirekten Verfahrens, in der Tat schon ganz im Anfang ent-

[1] Übrigens ist keineswegs mit jedem Fall, wo eine Konstruktion unmöglich ist, ein nicht-prädikatives Verfahren verknüpft; *man kann daher diese Verfahren sehr wohl ablehnen, ohne deshalb konsequenter Intuitionist sein und demgemäß alle reinen Existenzsätze verwerfen zu müssen* (S. 226). So hat ja gerade POINCARÉ die typischeste aller Existentialaussagen, nämlich die Behauptung des Auswahlaxioms (S. 283), bejaht und sogar als synthetisches Urteil a priori angesprochen.

gegengetreten, nämlich an der allerwichtigsten Stelle, als wir die Unterscheidbarkeit verschiedener Stufen des Unendlichgroßen erkannten: beim Beweise der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums (S. 46f.); wir definierten damals einen speziellen Dezimalbruch D zwischen 0 und 1 durch die Gesamtheit aller möglichen derartigen Dezimalbrüche. In jenem Fall tritt das nicht-prädikative Moment allerdings nicht allzu stark hervor; es kann nämlich so lange ausgeschaltet werden, als der Beweis in *direkter* Form geführt wird (und daher nur von *abzählbaren* Mengen die Rede ist); der éine indirekte Schluß aber, der den Übergang vom Hilfssatz auf S. 45 zu Satz 1 (und gleichzeitig vom Abzählbaren zum Überabzählbaren) vermittelt, wird je nach dem Sinn[1], den man mit Satz 1 verbindet, nicht notwendig als der Verbotsregel widerstreitend empfunden. Indes scheint es allgemein keineswegs ausgeschlossen, daß es Teilmengen einer etwa abzählbaren Menge M (d. h. wesentlich: reelle Zahlen) gäbe, die nur mittels der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ (der Menge *aller* reellen Zahlen) definierbar wären; die Aufnahme derartiger Mengen in $\mathfrak{U}M$ muß wenigstens *dem* als nicht-prädikativ erscheinen, der nicht in geeigneter Fortbildung der ursprünglichen Denkweise CANTORS (vgl. den Schluß des § 18) den Begriff „Teilmenge" ganz naiv faßt. Überhaupt bemerkt der aufmerksame Betrachter, daß die Heranziehung des nicht-prädikativen Verfahrens zwar meist entbehrlich ist, solange man im Gebiet des Endlichen und des bloß Abzählbar-Unendlichen bleibt; daß sie aber in der Regel da unvermeidbar wird, wo es gilt von einer unendlichen Kardinalzahl zu einer größeren überzugehen, wo also gerade die Überwindung des vagen und bedeutungslosen „Unendlich schlechthin" durch die Rangordnung unterscheidbarer Stufen im Unendlichen erst wirksam wird[2]. Die Potenzmenge, dieses entscheidend wirksame Werkzeug der Mengenlehre, und somit auch die klassische Theorie des Kontinuums (DEDEKIND, CANTOR) kann wohl nicht ganz des nicht-prädikativen Momentes entkleidet werden.

Nach alledem sind die mit dem nicht-prädikativen Verfahren verknüpften Bedenken ernstlich und verlangen gebieterisch nach einer Aufklärung. Dabei tritt offenbar die Frage in den Vordergrund, ob ein auf nicht-prädikative Art eingeführter Begriff auch in *anderer* Weise festlegbar wäre und somit gewissermaßen schon „vor" jener bedenklichen Einführung existiert. In der Tat: wenn z. B. jede beim Diagonal-

---

[1] Wenn man nämlich „nichtabzählbare Menge" als einen rein *negativen* Begriff ansieht, also den erwähnten Hilfssatz nicht auffaßt als „die Menge aller reellen Zahlen läßt sich nicht abzählen", sondern etwa als „eine abzählbare Menge kann keinesfalls die sämtlichen reellen Zahlen umfassen", so wird hiermit jedermann einverstanden sein.

[2] Schon aus diesem Grund, ganz abgesehen von der Rücksicht auf den Intuitionismus, sollte man, wie mir scheint, unter den Gegnern der Mengenlehre einen wesentlichen Unterschied machen zwischen den Leugnern des aktualen Unendlichgroßen überhaupt und den Bekämpfern des Überabzählbar-Unendlichen (anders der im übrigen sehr instruktive Aufsatz BERNSTEIN [5]). Die ersteren werden vornehmlich durch Bedenken allgemein philosophischer Art (den Intuitionismus bestimmter Prägung eingeschlossen) oder auch nur durch Mißverständnisse zu ihrem ablehnenden Standpunkt gebracht. Den letzteren hingegen wird auch der überzeugte und enthusiastische Anhänger der CANTORschen (oder axiomatischen) Mengenlehre zugestehen müssen, daß ihre Bedenken zu einem größeren oder kleineren Teil aus zwingenden mathematischen Erwägungen hervorgehen und einer — übrigens wohl noch nicht endgültig geglückten — Widerlegung mit feingeschmiedeten mathematischen Waffen bedürfen.

verfahren oder bei der Bestimmung der unteren Grenze einer Zahlenmenge benötigte reelle Zahl bzw. die beim Beweis des Wohlordnungssatzes auftretende Vereinigungsmenge Σ auch unabhängig von ihrer nicht-prädikativen Charakterisierung existiert und festlegbar ist, so verschwinden die Schwierigkeiten der nicht-prädikativen *Konstruktion*; eine bloße *Beschreibung* aber braucht vor dem Schein des nicht-prädikativen Gewandes nicht zurückzuschrecken (vgl. S. 324f.). In diesem Sinn verläuft die Rettung der bedrohten Begriffe, wie sie RUSSELL anstrebt; bevor wir ihr nähertreten (Nr. 4), müssen wir erst die systematische Auswirkung der Verbotsregel RUSSELLS kennenlernen.

3. RUSSELLS Typen- und Stufentheorie. Zur wirklichen Durchführung des Verbotes der nicht-prädikativen Begriffsbildungen, wie diese namentlich durch den unvorsichtigen Gebrauch des Wortes „alle" (z. B. Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge „aller" Ordnungszahlen usw.) oft unversehens eingeschmuggelt werden, entwickelt nun RUSSELL (zuerst in [3]) seine berühmte und scharfsinnige *Typentheorie*, die hier nur in den ganz großen Umrissen bezeichnet werden kann. *Die folgenden Ausführungen sollen also nur Hinweise möglichst mannigfacher Art geben und zu dem für ein volles Verständnis unentbehrlichen Studium der tiefergehenden Darstellungen*[1] *anregen*, ohne das der Anfänger aus dem Rest dieses Paragraphen nur beschränkten Gewinn ziehen wird; freilich sind namentlich die Originalarbeiten reichlich spröde und wollen mit Mühe und unter voller Konzentration auf die sehr abstrakten Gedankenfolgen bezwungen sein.

Vor allem fassen wir statt der Mengen (Gesamtheiten von Einzeldingen) vielmehr *Eigenschaften* ins Auge; jeder Eigenschaft $\mathfrak{E}$ entspricht ja eine bestimmte Menge, nämlich die Menge aller derjenigen Dinge, die die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen. Umgekehrt entspricht einer Menge M nicht bloß eine einzige Eigenschaft; mehrere Eigenschaften können vielmehr umfangsgleich sein und demgemäß die nämliche Menge festlegen. Gerade die stark vereinfachende Wirkung dieses Umstandes ist der Grund, weshalb der Mathematiker die Mengen vor den Eigenschaften bevorzugt[2]. So bestimmen z. B. die zwei

[1] Das grandiose Hauptwerk sind die bisher dreibändigen *Principia Mathematica* (WHITEHEAD-RUSSELL [1]); vgl. auch RUSSELL [3], [4], [6]. Von älteren (z. T. überholten) einschlägigen Arbeiten RUSSELLS seien außer [1] und [2] noch die in *Mind*, Bd. 14. 1905; *Revue de Métaph. et de Mor.*, Bd. 13/14, 1905/6 und namentlich im *Amer. Journ. of Math.*, Bd. 28, 1906 erschienenen genannt. Vgl. auch COUTURAT [3], JOURDAIN [4] und NICOD [2] sowie namentlich die Darstellungen bei BEHMANN [2] (ungedruckt), CARNAP [4], CIPOLLA [2], NATUCCI [1] (Kap. 19—26) und RAMSEY [1].

[2] Daß es in der Mathematik nicht sowohl auf die Eigenschaften als auf ihre „Umfänge" (Extensionen, Wertverläufe), d. h. auf die *Mengen* ankommt, ist als der „Umfangscharakter" (extensionality) der Mathematik stark zu betonen vgl. RAMSEY [1]. S. 348ff., sowie nachstehend S. 255ff.).

sicherlich verschiedenen Eigenschaften „eine gerade Primzahl zu sein" und „ein echter Teiler von 4 zu sein" die nämliche Menge mit dem einzigen Element 2; ebenso definieren die Eigenschaften „mit zwei Beinen und Flügeln versehen" und „aus ausgebrüteten Eiern hervorgehend" die nämliche Menge (der Vögel). Während bei endlichen Mengen $\{a, b, \ldots, f\}$ eine passende Eigenschaft, wenn man wünscht, durch Aufzählen gebildet werden kann — als die Eigenschaft „entweder a oder $b \ldots$ oder f zu sein" —, ist das im allgemeinen Fall, wo auch unendliche Mengen in Betracht kommen, nicht angängig. Wir fassen daher allgemeinhin eine Eigenschaft als *Satzfunktion*[1] (propositional function; im folgenden meist kurz „Funktion") auf; ist nämlich $f(a)$ ein „Satz", d. h. eine Aussage über ein Ding a (z. B. SOCRATES [$= a$] ist sterblich), so spricht man, wenn das Ding a durch eine Veränderliche x ersetzt wird, von einer Satzfunktion $f(x)$ (x ist sterblich), die eben die Menge aller x, für die $f(x)$ wahr ist, (die Menge aller sterblichen Wesen) definiert. Auch Satzfunktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ werden dann „umfangsgleich" genannt, wenn für die nämlichen Argumente $x = a$ jeweils die Aussagen $f(a)$ und $\bar{f}(a)$ gleichzeitig wahr bzw. falsch sind. Dabei ist der Bereich der Argumente, den die Veränderliche x durchläuft, natürlich von vornherein auf die „einschlägigen" Dinge x zu beschränken, d. h. auf die, für welche $f(x)$ überhaupt sinnvoll ist. Unter den möglichen Argumentwerten spielen eine besondere Rolle die „Individuen", die einem ein für allemal festen, übrigens nicht näher bekannten Bereich von außerlogisch, etwa durch unsere Empfindungen, „gegebenen" Gegenständen zugehören und den ursprünglichen Stoff für alle Aussagen darstellen.

Wenigstens erwähnt sei noch, daß in ganz entsprechender Weise, wie man von den Funktionen $f(x)$ éines Argumentes x zu den Mengen gelangt, von den Funktionen $f(x, y)$ zweier Argumente x und y der Weg zu den zweigliedrigen *Relationen* (vgl. S. 269; z. B. x ist Element von y oder x ist äquivalent y) führt. Allgemein stellen Satzfunktionen die logistische Einkleidung von *Begriffen* dar, d. h. dessen, was von Objekten x usw. ausgesagt werden kann. Wir beschränken uns indes im folgenden auf Funktionen éines Arguments.

Hier ist noch eine grundsätzliche Bemerkung (wenigstens andeutungsweise) anzuschließen, die in Verbindung steht mit dem extensionalen Charakter der Mathe-

---

[1] „Satz" ist hier natürlich nicht grammatisch, sondern im Sinn von „Behauptung" oder „Aussage" zu verstehen, wobei es auf den Inhalt und nicht etwa auf die durch die Umstände bedingte Einkleidung ankommt; gebräuchlich ist auch die längere Bezeichnung „Aussagefunktion". Die Theorie der Satzfunktionen rührt schon wesentlich von FREGE her. — Die gewöhnlich in der Mathematik verwendeten Funktionen kann man demgegenüber als Gegenstandsfunktionen bezeichnen, weil sie bei Werteinsetzung für die Veränderliche(n) in „Gegenstände" übergehen, wie die Satzfunktionen in Sätze.

matik, also mit dem Umstand, daß es ihr letzten Endes nicht auf die Satzfunktionen (Eigenschaften usw.), sondern auf die zugehörigen Klassen (Mengen, Relationen usw.) ankommt. Zur Klärung der Sachlage schicken wir ein krasses Beispiel voran. In einer Satzfunktion f kann das Argument entweder einen Bereich von Dingen (Gegenständen) x oder auch einen solchen von Sätzen bzw. Satzfunktionen φ durchlaufen. Im letzteren Falle, in dem wir $f(\varphi)$ wie bisher $f(x)$ schreiben, wird für die „extensionalen" Funktionen (f) der Mathematik zu fordern sein, daß sie in Wirklichkeit nicht vom Sinn, sondern nur vom *Umfang* der Argumentfunktion $\varphi(x)$, d. h. von der ihr zugehörigen Menge abhängig sind. Es bedeute nun beispielsweise $\varphi_1(x)$ die Funktion „x ist gleich einer der Zahlen 1, 2, 3, 4", $\varphi_2(x)$ dagegen die Funktion „jede algebraische Gleichung vom Grade x ist algebraisch auflösbar"; beidemal sind die einschlägigen Argumentwerte x die natürlichen Zahlen. Nach dem Satze, wonach die allgemeine Gleichung von höherem als dem vierten Grade nicht mehr algebraisch auflösbar ist (RUFFINI 1799, ABEL 1826), sind die so definierten Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ umfangsgleich; sie bestimmen beide die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Versteht man aber unter $f(\varphi)$ die Funktion „zu Beginn des 18. Jahrhunderts war unbekannt, ob die allgemein algebraisch auflösbaren Gleichungen sich auf die Gradzahlen x beschränken, für welche $\varphi(x)$ zutrifft", so ergibt die Einsetzung von φ_1 bzw. φ_2 für φ, daß zwar $f(\varphi_1)$ wahr, aber $f(\varphi_2)$ falsch wird; denn im letzteren Fall wird der mit „ob" beginnende Satz zur Tautologie.

Gleichviel ob derartige Funktionen $f(\varphi)$ wirklich in der Wissenschaft vorkommen (vgl. den nächsten Absatz) oder ihr Auftreten nur scheinbar ist (im angeführten Beispiel etwa, weil φ_1 in $f(\varphi_1)$ nur dem Scheine nach vorkäme, wofür gewisse Gründe sprechen) — die Mathematik und die mit ihr untrennbar verknüpfte Logik in engeren Sinn werden sich jedenfalls freihalten müssen von Funktionen $f(\varphi)$ einer so unbequemen Art. Zu einer Präzisierung dessen, was hiermit gemeint ist, gelangt man durch die Scheidung zwischen Umfang und Inhalt eines Begriffs, die zwar von jeher gemacht und als mehr oder weniger bekannt angesehen worden ist, ihre strenge Fassung aber wohl erst FREGE verdankt; dieser unterscheidet scharf zwischen einer Satzfunktion (z. B. „x ist rot", der Eigenschaft „rot" entsprechend) und ihrer Extension (der Menge der roten Dinge). Man kommt so zur Prägung des (auf FREGE [2] zurückgehenden) Begriffs der *Wahrheitsfunktion* (truth-function); darunter ist eine Satzfunktion $f(\varphi)$, deren Argumentwerte φ Sätze (oder Satzfunktionen) sind, von der Eigenschaft zu verstehen, daß die Wahrheit der — durch Einsetzen bestimmter Sätze φ_1, φ_2 usw. für φ sich ergebenden — „Werte" von $f(\varphi)$ nur von der *Wahrheit* der einzusetzenden Sätze $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ abhängt, nicht aber von deren Sinn. Eine Wahrheitsfunktion kann, wie jede Satzfunktion, auch von mehreren Argumenten abhängen; bedeutet z. B. die von zwei Argumenten φ und ψ abhängige Funktion $f(\varphi, \psi)$: „mindestens einer der Sätze φ, ψ ist wahr", so ist $f(\varphi, \psi)$ falsch oder wahr, je nachdem φ und ψ beide falsch sind oder nicht; also ist die dem „oder" entsprechende Funktion $f(\varphi, \psi)$ eine Wahrheitsfunktion, wie dies auch für die auf S. 265 erwähnten Grundbegriffe „nicht", „und", „es folgt" usw. gilt (vgl. etwa WEYL [7], § 3).

WHITEHEAD und RUSSELL haben einerseits die intensionale oder Inhaltslogik als Theorie der Satzfunktionen, andererseits die Umfangslogik als Theorie der Extensionen entwickelt und ursprünglich ([1 I_1], S. 76f. und RUSSELL [5], S. 187f.) die Meinung vertreten, daß nicht alle Aussagen der intensionalen Logik sich in solche über Extensionen übertragen lassen (vgl. auch BEHMANN [2]). Das besagt, wie unschwer zu erkennen ist, daß nicht alle Satzfunktionen der Logik, deren Argumentwerte wieder Sätze oder Satzfunktionen sind, deshalb auch schon Wahrheitsfunktionen zu sein brauchen. Ist dem so, so muß die Mathematik Funktionen solcher Art (vgl. das Beispiel im vorletzten Absatz) aus ihrem Bereich streng ausschlie-

([1], S. 243f.) und daran anschließend Carnap ([4], §§ 43ff.) mit guten Gründen die Auffassung, daß in Wirklichkeit auch außerhalb der Mathematik von selbst alle Funktionen der genannten Art den Charakter von Wahrheitsfunktionen besitzen, daß man also zwischen intensionalen und extensionalen Sätzen gar nicht zu unterscheiden braucht[1], vielmehr alle wissenschaftlichen Begriffe als Mengen, Relationen usw. darstellbar sind; auch Russell selbst hat seine Meinung in diesem Punkt geändert, wie z. B. seine Einleitung zur Neuauflage der *Principia Mathematica* zeigt. Hiernach wäre es also nicht mehr nötig, hinsichtlich der in der Mathematik zulässigen Satzfunktionen eine besondere Einschränkung zu machen.

Die *logischen* Antinomien (Nr. 2 von § 13) werden nun einfach beseitigt durch die Bemerkung, daß *eine Satzfunktion nicht sich selbst als Argumentwert annehmen kann*. Sterblich zu sein, kann z. B. nicht von der Eigenschaft „sterblich" oder von der Menge der sterblichen Wesen ausgesagt werden[2]. Damit wird, wie sich beim Übergang von Satzfunktionen zu den zugehörigen Mengen leicht zeigt, das Auftreten einer Menge unter ihren eigenen Elementen (wie bei der Russellschen und im Kern auch bei der Burali-Fortischen Antinomie) ausgeschlossen; eine Behauptung, die für die Elemente einer Menge charakteristisch ist, kann nicht auch für die Menge selbst sinnvoll sein. (Hierin kommt in aller Schärfe der Unterschied zwischen den Begriffen „Teil eines Ganzen" und „Element einer Klasse" zur Geltung; ein Eisenbahnzug ist ebenso wie jeder seiner Wagen ein Gegenstand aus Metall, während für die *Menge* seiner Wagen eine solche Behauptung sinnlos wäre.) Daher kann z. B. die Menge aller Abstrakta sich nicht etwa selbst als Element enthalten, sie ist ein Begriff von „höherem Typus" als ihre Elemente; überhaupt ist die Aussage, eine Menge enthalte sich als Element, nicht sowohl als falsch wie vielmehr (gleich ihrer Negation) als sinnlos zu betrachten, ebenso wie etwa die Behauptung, die Mathematik sei rund — während die Aussage, ein Eisenbahnzug sei gleich einem seiner Wagen 20 m lang, zwar im allgemeinen falsch, aber an sich sinnvoll ist[3]. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist für solche Fälle natürlich nicht anwendbar. Allgemein werden die Satzfunktionen $f(x)$ (und damit die Mengen) so in verschiedene Typen eingeteilt, je nach den Argumentwerten x, die für sie zulässig sind; man unterscheidet demgemäß Satz-

---

[1] Dafür tritt dann (vgl. besonders Carnap [4]) die schon von Frege gemachte Unterscheidung zwischen dem (intensionalen) „Sinn" und der (extensionalen) „Bedeutung" eines Begriffs, d. h. einer Satzfunktion, ein.

[2] Das hängt, wie hier nur angedeutet sei, wesentlich damit zusammen, daß nach Russell das logisch Ursprüngliche nicht die Satzfunktionen und nicht die Dinge, sondern die *Sätze* sind. Eine Satzfunktion $f(x)$ entsteht erst dadurch, daß in einem Satz ein Zeichen — d. h. ein Teilzeichen, insofern als die Sätze die eigentlichen Zeichen stellen — veränderlich gesetzt wird. Darnach ist offenbar $f(f)$ sinnlos, weil das herausgenommene Teilzeichen sonst übereinstimmen müßte mit der „Leerform", die eben durch seine Herausnahme entsteht.

[3] Russell hat in diesem Sinn eine tiefgehende Analyse der Sprache durchgeführt, die vornehmlich auf Eigenschaften (Prädikate) und Relationen zielt und überraschende Bemerkungen zur Grammatik enthält (vgl. besonders [5]),

funktionen, die nur „Individuen" (in dem oben angedeuteten Sinn und im Gegensatz zu den „Mengen") als Argumentwerte zulassen (z. B. „x ist sterblich"; Typus 0), dann Satzfunktionen, deren Argumente Satzfunktionen des Typus 0 sein können (Typus 1) usw. Diese Entwicklung einer „Hierarchie von Typen", für deren Einzelheiten und Folgen auf die *Principia Mathematica* verwiesen werden muß, ist in sich folgerichtig und wohl unangreifbar; dem Kerne nach berührt sie sich auch mit anderen Vorschlägen zur Lösung der logischen Antinomien.

In höherem Maße charakteristisch für RUSSELLS Standpunkt, der übrigens in [1] noch nicht eingenommen ist, sich vielmehr in den Jahren bis 1908 allmählich bei ihm durchgesetzt hat, ist eine weitere Stufeneinteilung der Satzfunktionen, die auch für solche Funktionen gilt, welche nach der vorigen Einteilung einen und denselben Typus besitzen. Um eine annähernde Vorstellung von dieser weiteren Einteilung, der „verzweigten Typentheorie" oder „Stufentheorie", zu geben, sei zuvörderst der Unterschied in der Rolle der Variabeln x hervorgehoben, wie sie einerseits auftritt in Ausdrücken von der Art „x ist sterblich" oder „x ist eine Primzahl zwischen 20 und 30", andererseits in Ausdrücken der Art „für alle x der Kategorie ‚Menschen' gilt ‚x ist sterblich'" oder „es gibt mindestens ein x in der Kategorie ‚natürliche Zahlen', für das gilt ‚x ist eine Primzahl zwischen 20 und 30'". Ausdrücke der ersten Art sind wirklich Satzfunktionen, sie enthalten x als eigentliche Veränderliche; durch Einsetzung einschlägiger *Werte* für x (z. B. $x =$ SOCRATES bzw. $x = 23$) gehen sie in richtige oder auch falsche, aber jedenfalls sinnvolle *Sätze* über. In Ausdrücken der zweiten Art, für die das Vorkommen von „alle" oder „es gibt" (= „irgendein"; „all" und „any") charakteristisch ist, kann für x kein besonderer Wert mehr eingesetzt werden; sie sind selbst Sätze, nicht Satzfunktionen, und x ist nur eine *scheinbare Veränderliche* (apparent variable), ähnlich wie etwa die Integrationsvariable x in einem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. In einer kürzehalber etwas vereinfachenden Schilderung läßt sich dann die Einteilung der Satzfunktionen eines gewissen Typus — z. B. derjenigen des Typus 0 — in *Stufen* folgendermaßen bezeichnen: Man sagt von einer Satzfunktion $f(x)$, sie sei von der Stufe 0 oder kürzer *elementar* (so in der 2. Auflage der *Principia Mathematica*; in der ersten heißt es statt dessen „prädikativ"), wenn die durch Einsetzen bestimmter Werte für die Veränderliche x daraus hervorgehenden Sätze keine scheinbare Veränderliche enthalten. Wenn dagegen durch Werteinsetzung für x sich aus $f(x)$ ein Satz ergibt, in den noch eine scheinbare Veränderliche y eingeht, und zwar eine solche, die nur „individuelle" Werte annehmen kann, so spricht man von einer Satzfunktion der Stufe 1. Über die Fortsetzung des Verfahrens sei nur noch bemerkt, daß eine Funktion, die mittels der Gesamtheit *aller* „elementaren" Funktionen gebildet ist, eine

Funktion von der Stufe 2 genannt wird und daß das Verfahren bis zu beliebig hohen Stufen fortsetzbar ist. Z. B. ist „x ist eine Primzahl" von der Stufe 0, also elementar; „es gibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Punkt x ist" (d. h. ausführlicher: „es gibt in der Kategorie (y) aller Kreise einen Wert y, so daß der Punkt x der Mittelpunkt von y ist") ist von der Stufe 1; ebenso entnimmt man dem WEYLschen Beispiel von S. 217 f. unschwer eine Satzfunktion der Stufe 2. Entsprechend zerfallen die „lügenden Kreter" (S. 213) in elementare Lügner, die stets lügen, nur ausgenommen wenn sie sagen „ich lüge", dann in Lügner 1. Stufe usw. Diese Unterscheidung von Stufen bewirkt, daß z. B. eine Zusammenfassung aller näher bestimmten Begriffe einer gewissen Stufe stets zu einem Begriff *höherer* Stufe führt, der unmöglich jenen Begriffen koordiniert werden (etwa mit ihnen gleichzeitig einer Menge zugehören) kann. Das Ergebnis der Zusammenfassung in éine Stufe mit den zusammengefaßten Begriffen zwingen wollen, hieße versuchen über seinen eigenen Schatten zu springen. „Alle" und „es gibt" können sich immer nur auf Begriffe einer bestimmten Stufe beziehen, niemals auf die aller möglichen Stufen. So wird auch hiermit, ebenso wie durch die Typentheorie, eine methodische Einschränkung des Funktions- und Mengenbegriffs erzielt. Für die Art, wie dadurch die einzelnen Antinomien auch der epistemologischen Art von selbst ausgeschaltet bleiben, werde auf RUSSELL [3] oder auf den ersten Band der *Principia Mathematica* verwiesen.

Jede Verwendung eines wesentlich nicht-prädikativen Verfahrens ist bei dieser Auffassung offenbar ausgeschlossen; denn ein Begriff, in dessen Definition eine Gesamtheit M von Elementen eines gewissen Typus bzw. einer gewissen Stufe eingeht, ist von höherem Typus bzw. höherer Stufe als die Elemente von M, also seinerseits keinesfalls Element von M. Indes scheint es, als ob RUSSELLS Berufung auf das vicious circle principle als Quelle der Typen- und Stufentheorie nur noch historisch zu Recht bestehe; in Wirklichkeit stellt namentlich die Typentheorie ein höchst allgemein und aus sich selbst heraus begründetes Glied in einer Tieferlegung der Fundamente der Logik dar und die Beseitigung der Antinomien kann nur als ein naturgemäß sich ergebendes Nebenprodukt dieses logischen Reformwerks gelten.

4. Das Reduzibilitätsaxiom. Ist hiermit das Verbot der nicht-prädikativen Begriffsbildungen zu einem praktischen und gewissermaßen selbsttätigen Verfahren ausgestaltet, so bleiben natürlich die oben (S. 252) erwähnten unerwünschten Wirkungen nicht aus. Die klassische Mathematik läßt sich auf dieser Grundlage nicht aufbauen; eine Zerstörung von beinahe gleicher Größenordnung wie beim Intuitionismus wäre unvermeidlich. Zwar ist es RUSSELL neuerdings anscheinend gelungen[1]

[1] Vgl. nach dieser Richtung auch SKOLEM [4].

(vgl. die 2. Auflage des 1. Bandes der *Principia Mathematica,* Appendix B), mit der einen der zwei großen kritischen Berührungen der Mathematik mit dem Unendlichen (S. 221), wie sie sich in der Theorie der *natürlichen Zahlen* (vollständige Induktion) ergibt, unter Innehaltung der Typen- und Stufentheorie fertig zu werden. Aber bei der zweiten, noch gefährlicheren Berührung, der Theorie der *reellen Zahlen* (DEDEKINDschen Schnitte), versagen Kräfte und Möglichkeiten. In der Tat ist ja eine reelle Zahl im wesentlichen eine Gesamtheit (oder Eigenschaft) von *rationalen* Zahlen, z. B. ein Schnitt (S. 144) oder eine obere Grenze; ein Schnitt oder eine obere Grenze im Bereich der *reellen* Zahlen ist daher von höherer Stufe und kann nicht mit einer reellen Zahl gleichgesetzt werden. Vielmehr wäre man genötigt, reelle Zahlen erster, zweiter, dritter Stufe usw. zu unterscheiden[1]. Bei der Gesamtheit der reellen Zahlen, um so mehr natürlich gegenüber der Potenzmenge im allgemeinen, erscheint so die Kapitulation vor den Intuitionisten unvermeidlich.

In dieser verzweifelten Lage zwischen der Scylla der Antinomien, die durch die Typen- und Stufentheorie vermieden werden sollen, und der Charybdis einer Opferung der Analysis auf dem Altar eben dieser Stufentheorie entschließt sich RUSSELL zu einem wahrhaft verzweifelten Ausweg, der einem sacrificium intellectus bedenklich nahekommt: Er stellt ein besonderes Axiom auf, das Reduzibilitätsaxiom, das behauptet, jede Satzfunktion einer beliebigen Stufe sei einer elementaren Satzfunktion umfangsgleich (wenn auch natürlich nicht sinnesgleich). Anders ausgedrückt: zu jeder Funktion, in die eine scheinbare Veränderliche eingeht, gibt es eine umfangsgleiche Funktion, die keine scheinbare Veränderliche mehr enthält. Das läuft namentlich darauf hinaus (vgl. auch ZERMELO [4]), daß ein nicht-prädikativ eingeführter Begriff stets als schon vorher, d. h. unabhängig von dieser Charakterisierung, vorhanden betrachtet werden kann, außer wenn der durch die engere Typentheorie getroffene Fall vorliegt, wo eine Menge sich selbst als Element enthalten soll. Man kann, wenn man eine formale Analogie zu HILBERTS Vollständigkeitspostulat (vgl. S. 356) herausarbeiten will, das Axiom auch so deuten: der Kreis der elementaren Funktionen ist so umfassend und in sich abgeschlossen, daß keine Funktion höherer Stufe gebildet werden kann, die nicht schon einer elementaren umfangsgleich wäre. (Man denke an die Abgeschlossenheit der Menge der reellen Zahlen, vermöge deren jeder Schnitt im Bereich der reellen Zahlen schon durch eine reelle Zahl erzeugt wird!) Unser Axiom gestattet also, etwaige nicht-elementare Funktionen, wie sie in mathematischen Untersuchungen (z. B. in der Theorie der reellen Zahlen) auftreten, für die Zwecke der Mathematik stets durch umfangsgleiche elementare Funktionen zu er-

---

[1] Es ist bemerkenswert, daß schon CANTOR ([7 V], S. 569) diese Tatsache klar erkannt hat, wenn er auch keine weiteren Folgerungen aus ihr zog.

setzen und so z. B. auch eine Gesamtheit von Funktionen *beliebiger* Stufe ins Auge zu fassen.

Für den mit der axiomatischen Methode (§§ 16 und 18) schon vertrauten Leser sei bemerkt, daß hier in RUSSELLS System das Wort „Axiom" eine andere Bedeutung hat als in der modernen Axiomatik, wo das einzelne Axiom eine für sich bedeutungslose Aussage darstellt und nicht durch seine „Wahrheit", sondern durch seine Verträglichkeit mit den übrigen Axiomen legitimiert wird. In dem nicht formalen, sondern von vornherein inhaltlich begründeten System der *Principia Mathematica* bezeichnet „Axiom" ähnlich wie in der Antike eine Aussage, die mit den Hilfsmitteln des Systems unbeweisbar oder wenigstens vorläufig unbewiesen ist, aber aus mehr oder weniger zwingenden Gründen gleichsam als Hypothese aufgestellt wird; die mittels derartiger Axiome bewiesenen Teile des Systems hängen somit von der Richtigkeit der in den Axiomen enthaltenen Aussagen ab.

Vor allem erhebt sich nun die Frage, ob der Gewinn, der mit dem neuen Axiom für die rechtmäßig scheinenden mathematischen Methoden erzielt ist, nicht auch den (epistemologischen) Antinomien zugute kommt, wo er natürlich als Verlust zu buchen wäre. M. a. W.: hebt das Reduzibilitätsaxiom nicht einfach wieder die Stufentheorie auf? Das ist glücklicherweise nicht der Fall. Denn während es in der Mathematik (einschließlich wesentlicher Teile der formalen Logik) in der Tat nur auf den Umfangscharakter ankommt, enthalten all die Antinomien, für die man auf die Stufentheorie angewiesen ist, auch noch andere Eingänge, die von Sprache, Bedeutung, Symbolik usw. abhängen; für diese Eingänge aber ist Umfangsgleichheit etwas durchaus Anderes, Bedeutungsärmeres als Sinnesgleichheit[1]. Hier wird daher trotz des neuen Axioms durch die Stufentheorie eben jene Beschränkung erzwungen, welche die unerwünschten Antinomien unmöglich macht. (Freilich legt gerade dieser Unterschied die Frage nahe, ob zur Bekämpfung der epistemologischen Antinomien sich überhaupt die Mathematik zu bemühen braucht, ob sie nicht ruhig von der Stufentheorie absehen und die Aufklärung jener Antinomien anderen Wissenschaften überlassen soll; vgl. RAMSEY [1].)

Ernster ist eine zweite Frage, sie sich sofort an das Reduzibilitätsaxiom knüpft: Ist die Behauptung dieses Axioms überhaupt *wahr*? Nicht nach allen Seiten hin ist diese Frage endgültig geklärt. Manche Erwägungen sprechen dafür, daß es als *falsch*, d. h. als den anerkannten Axiomen der Logik widersprechend, kaum erwiesen werden kann. Wie dem aber auch sei und ob man sich nun der Meinung[2] anschließen mag oder nicht, nach der die Aussage des Axioms eine offene *Tatsachen-*

---

[1] Vgl. S. 254 ff. Schon die „endliche Definierbarkeit" z. B. ist offenbar eine dem bloßen Umfang der betreffenden Satzfunktion oder Menge entsprechende Eigenschaft; beim Übergang zu einer umfangsgleichen Funktion kann sie sehr wohl verlorengehen.

[2] Während des Druckes dieses Buches ist ein Beweis für diese Meinung (und damit a fortiori (ür die Unabhängigkeit des Reduzibilitätsaxioms) erschienen: WAISMANN [1]; er ist indes nicht einwandfrei.

frage, ihre Richtigkeit also sozusagen ein Glücksfall wäre (im Gegensatz zu den übrigen logischen und mathematischen Axiomen, die — mit zwei auf S. 267 zu erwähnenden Ausnahmen — als *analytische Urteile*, d. h. als innerlich notwendig [„tautologisch"] angesprochen werden) — jedenfalls stimmen die Meinungen in dem entscheidenden Punkt nur allzu sehr überein: innere Gründe, das Axiom für wahr anzuerkennen, liegen *nicht* vor, vielmehr nur der äußere Grund, daß man zur Rettung der Mathematik auf es angewiesen scheint. Der Intuitionist zum allermindesten wird die Richtigkeit des Axioms sogar als eine äußerst unwahrscheinliche Sache betrachten müssen; warum sollte es möglich sein, die konstruktiven Methoden, die zunächst zu den Funktionen der Stufe 0 und darüber dann z. B. zu einer gewissen Funktion $f(x)$ höherer Stufe führen, von vornherein so auszudehnen, daß man schon unter den Funktionen der Stufe 0 eine zu $f(x)$ umfangsgleiche Funktion gewänne? Aber auch unter den Gegnern des Intuitionismus hat das Axiom, das nicht im mindesten zwingenden oder auch nur einleuchtenden Charakter zu tragen scheint, begreiflicherweise vorwiegend Ablehnung gefunden und damit — in einer allzu weitgehenden Weise — zur Verwerfung des RUSSELLschen Systems im ganzen geführt.

Die vorwiegend auf diesen schwächsten Punkt konzentrierten Verbesserungsversuche, die von den mehr oder weniger orthodoxen Anhängern der *Principia Mathematica* gerade in jüngster Zeit angestellt worden sind, zeigen sehr verschiedenen Gepräge. Sie stehen übrigens, wie es der Natur des Gegenstandes entspricht, an Schwierigkeit und Abstraktheit dem Werke WHITEHEADS und RUSSELLS keineswegs nach. Soweit diese Arbeiten, wie CHWISTEK [1]-[3] (vgl. auch die an Anregungen reiche Arbeit CHWISTEK [4]) und auch WITTGENSTEIN [1] unter Beibehaltung der wesentlichen Züge der *Principia* wesentlich das Reduzibilitätsaxiom ausmerzen wollen, ist das Ergebnis bei allem Scharfsinn der Bemühungen von vornherein abzusehen: es läuft auf eine so weitgehende Beschränkung der Analysis und Mengenlehre — namentlich auch hinsichtlich des Kontinuums — hinaus, daß trotz der geradezu entgegengesetzten Methoden ein Resultat erzielt wird, das sich von dem der gemäßigten Intuitionisten nur mehr wenig unterscheidet. Namentlich ist der klassische Begriff der Potenzmenge (S. 107; vgl. auch S. 252f.) auf diese Art nicht mehr aufrecht zu erhalten. Einen positiveren Erfolg verspricht vielleicht der von RAMSEY [1] im Anschluß an das (tiefschürfende, aber dunkle) Werk WITTGENSTEIN [1] unternommene Versuch, gleichzeitig mit dem Verzicht auf das Reduzibilitätsaxiom die logische Ausgangsplattform von WHITEHEAD und RUSSELL in wichtigen Punkten umzugestalten und so die unerträglich gewordenen Fesseln des Verbotes der nichtprädikativen Verfahren aufzulockern, statt sie mit dem Reduzibilitätsaxiom zu durchhauen. So gibt RAMSEY u. a. die Stufentheorie im wesentlichen auf, vor allem in der Überzeugung, daß die (oben nur angedeutete)

Charakterisierung der „elementaren" Sätze nicht sowohl die *Aussagen* der Sätze selbst trifft als vielmehr die Art, wie sie *ausgedrückt* werden. Auch BEHMANN [2] und [3] nimmt einen vereinfachenden Standpunkt ein. Von einem endgültigen Abschluß sind diese Fragenkomplexe noch weit entfernt; doch hält es auch RUSSELL selbst, wie seine Einleitung zur Neuauflage der *Principia Mathematica* (S. XIV) zeigt, neuerdings für denkbar, die Stufentheorie und damit das Reduzibilitätsaxiom als entbehrlich anzusehen, was enge mit der auf S. 256 f. gestreiften Möglichkeit zusammenhängt, etwa generell umfangsgleiche Funktionen miteinander zu identifizieren und zwischen intensionalen und extensionalen Aussagen nicht mehr zu unterscheiden.

5. Symbolische Logik. Die „Principia Mathematica". Schließlich ist noch kurz zu schildern, in welcher Weise WHITEHEAD und RUSSELL ihr mathematisches Gebäude (im Sinn der Typentheorie) aufbauen. Sie gehen von der Grundanschauung aus, die Mathematik sei ein *Teil der Logik*, und zwar der Teil, der die analytischen oder „tautologischen" Sätze in einem näher zu charakterisierenden, übrigens noch nicht endgültig geklärten Sinne umfaßt[1]; auf den hierin steckenden tiefgreifenden methodischen Gegensatz nicht bloß zu den Intuitionisten (S. 226), sondern auch zu den modernen Formalisten werden wir auf S. 376 ff. ausführlich eingehen. Man bezeichnet vielfach die zu der bezeichneten Grundanschauung sich bekennende Richtung unter den Mathematikern als die logische oder häufiger *logistische*[2] Schule oder als *Logizismus*. Diese Richtung ist heute unter dem Einfluß RUSSELLS vor allem in England und Amerika vertreten; ihre ältere Geschichte — bis zum Aufkommen der Antinomien und der Typentheorie — liegt aber vorwiegend auf dem europäischen Kontinent. Hier hat sich neben einigen glänzenden deutschen (FREGE, DEDEKIND) und französischen (COUTURAT, NICOD) Forschern frühzeitig vor allem eine ganze Schule in Italien (PEANO, BURALI-FORTI, PADOA u. a.) um die formalen Grundlagen des Logizismus sehr erfolgreich bemüht, ohne indes schon die obige Grundanschauung zu vertreten; aus noch älterer Zeit seien hier nur die Namen BOOLE, PEIRCE und SCHRÖDER genannt mit dem

[1] Man kann freilich auch die Meinung vertreten, daß *alle* Sätze der Logik tautologisch seien, etwa in dem Sinn, daß sie solchen Satzfunktionen entsprechen, die für *jede* zulässige Wahl der Argumentwerte stets wahre Sätze liefern. Man muß dann den als Mathematik angesprochenen Teil der Logik in anderer Weise charakterisieren.

[2] Der Gebrauch des Wortes „logistisch" ist nicht einheitlich (vgl. etwa ZIEHEN [2], S. 173 und LEWIS [1], S. 340ff.); namentlich wird damit bald mehr die oben hervorgehobene wesensmäßige Anschauung, bald mehr die formale Seite der begriffsschriftlichen Methoden (Algebra der Logik, symbolische Logik usw.) bezeichnet. Für die grundsätzliche, die Grundlegung der Mathematik betreffende Einstellung RUSSELLS (vgl. auch S. 376) verwenden wir meist den Ausdruck „logizistisch".

Hinzufügen, daß nicht allein die Grundidee, sondern auch bemerkenswerte Schritte nach der Ausführung hin schon auf LEIBNIZ zurückgehen[1].

Im Rahmen der Auffassung, wonach die Mathematik einen Teil der Logik ausmache, liegt es offenbar durchaus, daß zu den bisher geschilderten, wesentlich *mathematisch* orientierten Auffassungen über Begriffe wie „Menge" usw. auch weitere Bemerkungen über die nämlichen Begriffe treten, die vorwiegend *philosophisch* begründet sind und dem Mathematiker als weniger wesentlich — auch innerhalb des logistischen Systems — erscheinen. So vertritt RUSSELL mit Entschiedenheit die Auffassung, im Gegensatz zu den Objekten mit einer „Bedeutung an sich" (z. B. auch den Satzfunktionen) seien Objekte wie Mengen, Zahlen usw. vielmehr nur der Vereinfachung dienende „symbolisch-logische Konstruktionen", für deren Symbole es lediglich auf *Vorschriften der Handhabung* ankomme (ähnlich wie z. B. für die uneigentlichen Punkte in der Geometrie); demnach entsprechen den Aussagen, in denen Mengen und Zahlen vorkommen, solche an sich

[1] Es genüge hier — gleichzeitig für den bisher behandelten Problemkreis und für die in den nächsten Absätzen genannten formalen Fragen — neben SCHRÖDER [2] und FREGE [2] sowie der schon erwähnten Literatur noch PEANO [3] und HUNTINGTON [2] zu nennen (vgl. dazu FRINK [1], SKOLEM [1], TAYLOR [1] und [2], YULE [1]), ferner (zur ersten Einführung für Mathematiker bzw. Philosophen) GONSETH [1] und WEYL [7] bzw. MALLY [1], als tiefergehende, moderne und kurze Darstellungen BEHMANN [3], BERNAYS [5], CARNAP [4] und ZAREMBA [2]; auch COUTURAT [2] (und [3]) ist, wiewohl teilweise überholt, immer noch empfehlenswert, besonders da er im Gegensatz zu den bisher vorliegenden Bänden der *Principia Mathematica* auch die Geometrie als Teil der Logik behandelt. Im übrigen werde für Literaturangaben vor allem auf das historisch wie sachlich vorzügliche und mit erschöpfendem Literaturverzeichnis (bis 1918) versehene Werk LEWIS [1] verwiesen. Von den darnach erschienenen einschlägigen Arbeiten seien (außer den an anderer Stelle dieses und des nächsten Kapitels, bes. in § 18 [namentlich S. 366], genannten) erwähnt: BELL [1], BERNAYS [4], B. A. BERNSTEIN [1]—[5], BURALI-FORTI [3], CHADWICK [1] und [2], CLAUBERG-DUBISLAV [1], EATON [1], FEYS [1], VAN HORN [1], JOHNSON [1], KEYSER [6], LANGER [1] und [2], LANGFORD [2]—[7], LEWIS [2], ŁUKASIEWICZ [1], NICOD [1], [4] und [5], POST [1], RIEFFERT [1] (3. Teil), L. J. RUSSELL [1], SHAW [1], SHEFFER [3], H. B. SMITH [1], TAJTELBAUM-TARSKI [2], WIENER [1] sowie für einen historischen Überblick in weiterem Rahmen ENRIQUES [4]. An vorwiegend kritischen Äußerungen zur Logistik mögen BOUTROUX [1], BRUNSCHVICQ [1] (Kap. 18f.), CASSIRER [1], ENRIQUES [1], FECHNER [1], HÖLDER [3], JOSEPH [1], LUQUET [1], MANNOURY [1] (S. 129—154), PFÄNDER [1] (besonders S. 430f.), POINCARÉ [5] (vgl. VOROVKA [1]), SMART [1] (vgl. auch [2]) angeführt werden; besonders hervorgehoben sei die kritische Beurteilung der Gesamtmethode und wichtiger Einzelprobleme bei BURKAMP [1], wo man auch eine gerechte Würdigung der viel zu wenig beachteten Verdienste FREGES auf rein logischem Gebiet findet. Für die Leistungen von LEIBNIZ auf dem Gebiete der Symbolik überhaupt werde auf CAJORI [1], MAHNKE [2] und die dort angeführte Literatur verwiesen. Schließlich seien von der intuitionistischen Logistik (vgl. S. 231 ff.) namentlich BECKER [2] (S. 494ff. und 775ff.), BROUWER [18], LÉVY [1] und [2], WAVRE [2] und [3] hervorgehoben. — Bei Abschluß des Druckes erscheint noch STAMMLER [2].

bedeutungsvolle Sachverhalte, die überhaupt keinen jenen Symbolen entsprechenden Bestandteil mehr aufweisen[1]. In einer anderen Abwandlung und noch allgemeiner erscheint diese Betrachtungsweise auch in der formalisierten Mathematik HILBERTS wieder (S. 367). Bei RUSSELLS ausgesprochen realistischem (bzw. positivistischem) Standpunkt, wie er namentlich in seiner Auffassung von den Individuen (vgl. auch HILBERTS „Zeichen") zutage tritt[2], besagt die geschilderte Einstellung in CANTORS Terminologie (Fußnoten auf S. 119 und 381), daß die ganze Mathematik transiente Bedeutung hat und auch haben muß, da eine nur immanente Realität abgelehnt wird.

Mehr oder minder eng verknüpft mit der bisher in den Vordergrund gerückten wesensmäßigen Anschauung des Logizismus ist eine formale Tendenz: die grundsätzliche Ausschaltung der *Sprache* mit ihren Unklarheiten und Mehrdeutigkeiten zugunsten einer rein *symbolischen*, formelmäßigen Schreibweise, deren Anblick beim Aufschlagen eines einschlägigen Werkes (z. B. der *Principia Mathematica*) auch auf den Mathematiker noch vielfach eine ähnlich entsetzenerregende Wirkung ausübt, wie etwa ein Lehrbuch der Integralrechnung auf den Nichtmathematiker. Beispiele wie die Menge aller Abstrakta oder aller endlich definierbaren Dezimalbrüche haben uns ja schon hinlänglich gezeigt, wie leicht sich manche Dinge aussprechen lassen, die dann, je näher man zusieht, um so schwieriger und verwickelter werden und sich schließlich als schlechthin sinnlos erweisen; ein anderes Beispiel bieten die zuweilen beschämenden Verwechslungen zwischen Kopula, Gleichheit und Existenz, die auf Grund der Mehrdeutigkeit des Wortes „ist" in manchen philosophischen Schriften aufgetreten sind. So werden zur radikalen und automatischen Abstellung dieses Übelstandes die logischen Begriffe und Prozesse, die sich als auf nur wenige Grundbegriffe zurückführbar erweisen, lückenlos formalisiert und symbolisch durch Zeichen und Formeln ausgedrückt, angefangen mit den finiten Verknüpfungsprinzipien „nicht", „und", „oder", „es folgt" (Implikation, nicht etwa kausal zu verstehen; vgl. S. 369)[3] und den auch in transfiniter Weise zur Verwendung kommenden „alle" und „es gibt", sowie den weiteren Ele-

---

[1] Vgl. (neben der schon angeführten Literatur) besonders das Vorwort zu RUSSELL [8].

[2] In vollem Gegensatz hierzu steht die rein „idealistische" Auffassung in KORTMULDER [1].

[3] Man kann formal diese Grundbegriffe auf einen einzigen (für gewöhnlich als abgeleitet auftretenden), nämlich auf „unverträglich mit —" zurückführen (SHEFFER [1]; zu diesem wichtigen Aufsatz vergleiche man noch DINES [1], SCHÖNFINKEL [1], TAJTELBAUM [1] und TAYLOR [3]). Ebenso läßt sich „es gibt" mittels der Negation unmittelbar auf „alle" zurückführen. Das ist freilich nur vom axiomatischen Standpunkt aus von Bedeutung, für den die Reduktion der Zahl der Grundrelationen methodisch erstrebenswert erscheint (vgl. S. 343).

mentarbegriffen „Aussage" (Satz), „Satzfunktion", „wahr (Behauptung)", die mit den Verknüpfungsprinzipien zusammen die Bildung der logischen und mathematischen Begriffe gestatten. Mit den so gewonnenen Symbolen, von denen jedes einen eindeutigen Sinn zugewiesen erhält, wird ähnlich operiert wie mit den üblichen Symbolen der Algebra. Bei streng formalem Aufbau (§ 18, Nr. 7) legt man den so geschaffenen Zeichen überhaupt keine Wesensbedeutung bei, sondern behandelt sie wie Figuren, mit denen von einer gewissen Ausgangsstellung aus, die durch die *logischen Axiome* bestimmt wird, nach festen „Spielregeln" zu operieren ist, namentlich nach den Regeln der Substitution und des Syllogismus, von denen letztere das deduktive Schließen ermöglicht. Innerhalb der finiten (nur endliche Bereiche umfassenden) Logik ist die vollständige Aufstellung der logischen Axiome gelungen (vgl. z. B. ACKERMANN [1]), während im übrigen einerseits auf die *Principia Mathematica*, andererseits auf HILBERT [7] bis [10] und v. NEUMANN [3] verwiesen sei; ein Lehrbuch der „theoretischen Logik" (HILBERT-ACKERMANN [1]) ist soeben erschienen. Unter anderem gewinnt man auf solchem Weg auch für das Entscheidungsproblem (S. 234 und 347) bei gegebenen Prämissen einen scharfen Ausdruck, der sogar eine Lösungsmethode anbahnt — freilich einstweilen nur für Fälle, die, obgleich keineswegs trivial, doch wegen ihrer allzugroßen Einfachheit sich zur Anwendung auf die mathematisch interessanten Fragen noch kaum eignen (vgl. LÖWENHEIM [1] und BEHMANN [1] und [4])[1].

In den tiefgehenden Wesenschwierigkeiten durch die Typentheorie geleitet, in der formalen Entwicklung auf die symbolische Logik in dem etwas veränderten Gewand PEANOS gestützt und durch sie gesichert, führen WHITEHEAD und RUSSELL in ihrem dreibändigen Werk [1] das stolze und bis in die Einzelheiten sorgsam durchgearbeitete Gebäude auf, das gleichzeitig die Logik und die Mathematik (bis auf die Geometrie, die einem noch ausstehenden vierten Band vorbehalten ist) in ihren grundlegenden Teilen entwickelt. Dabei erscheint die (ganze) *Zahl*, nach den älteren Anschauungen (vgl. KRONECKERS auf S. 243 zitierten Ausspruch) und auch nach den modernen Intuitionisten die Grundlage der Mathematik, nicht etwa am Anfang des Ganzen, sondern sozusagen in der Mitte[2]; an einer Stelle, von der gewissermaßen nach unten die allgemeineren Begriffe und die feineren Methoden der Grundlagenforschung, nach oben die vielfältigen Tendenzen der mathematischen Konstruktionen und Theorien ausstrahlen. Zahlen sind nach FREGE und RUSSELL Mengen von äquivalenten Mengen, nämlich die Mengen all derjenigen Mengen von Individuen, welche einer gewissen unter ihnen äquivalent (gleichzahlig) sind (vgl. S. 58f.), und

[1] Vgl. hierzu auch etwa FINSLER [2] und POST [2].

[2] Der logistischen Begründung der Arithmetik (unter Mitberücksichtigung der transfiniten Kardinalzahlen) ist speziell BEHMANN [2] gewidmet.

Mengen sind ja im wesentlichen Satzfunktionen (Eigenschaften). Da der analytische oder „tautologische", übrigens von WITTGENSTEIN wie auch von RAMSEY jeweils etwas anders gekennzeichnete Charakter des Axiomensystems und der aus ihm abgeleiteten logisch-mathematischen Wissenschaft betont wird, so erscheint die doch wohl andersartige Aussage, daß *unendlichviele „Individuen" existieren*, gewissermaßen nur als eine Hypothese, der der Charakter eines synthetischen Urteils oder auch einer offenen Tatsachenfrage beizulegen ist (vgl. das Axiom des Unendlichen in der Axiomatik, S. 307); die von dieser Hypothese abhängigen Partien des Gebäudes, wozu namentlich die Gesamtheit der natürlichen Zahlen gehört, sind als solche gekennzeichnet. Eine ähnliche hypothetische Stellung wird, außer dem Reduzibilitätsaxiom, auch dem Auswahlprinzip (S. 283), hier Multiplikationsaxiom genannt, zugewiesen; doch ist eine derartige Einordnung dieses Axioms nicht unumstritten.

Das Urteil der Geschichte über die *Principia Mathematica* und über den durch sie gewiesenen Weg zur Lösung der Antinomien der Mengenlehre und zu einem widerspruchslosen Aufbau der Grundlagen der Mathematik wird — abgesehen von der zu Ende des § 18 (S. 376ff.) zu erörternden grundsätzlichen Frage — wohl wesentlich von den weiteren Forschungen über das Reduzibilitätsaxiom und die (günstig erscheinenden) Möglichkeiten seiner Ausmerzung bzw. der Beseitigung der verzweigten Typentheorie überhaupt abhängen. Auch ob nicht schon die *engere* Typentheorie in ihrer einschränkenden Tendenz weiter geht, als es der logischen Sachlage entspricht und zur Beseitigung der Antinomien nötig ist, muß noch offen bleiben (vgl. H. B. SMITH' Vortrag auf dem *27th Annual Meeting of the American Philosophical Association*, Ende 1927); man wird gegebenenfalls eine noch geringere Einschränkung anzustreben suchen. Aber wie immer der Ausgang und Erfolg dieser Arbeiten sein mag: aus der modernen Grundlagenforschung ist das Werk von WHITEHEAD und RUSSELL nicht mehr fortzudenken; es hat namentlich auch auf die axiomatisch-metamathematischen Untersuchungen HILBERTS und seiner Schule (S. 366ff.) einen nachhaltigen Einfluß ausgeübt. Schließlich dürften auch die im engsten Zusammenhang mit den mathematischen Ausgangspunkten und Zielen stehenden Forschungen RUSSELLS auf dem Gebiet der formalen *Logik* (namentlich der Relationslogik), die seit ARISTOTELES so wenig wirkliche Fortschritte aufzuweisen hat, zu seinen Verdiensten und Erfolgen gerechnet werden (vgl. die bequem verständlichen Darstellungen in [5] und [6]); gegenüber dem praktisch recht bedeutungslosen und in der Tragweite beschränkten Gebäude der alten Logik ersteht hier ein vielgegliedertes, inhaltsreiches und durchaus anwendungsfähiges System. Diese Erfolge scheinen zu zeigen, daß auch die Philosophie, sofern sie Wissenschaft im strengen Sinn ist und sein will, nicht immer gut getan hat, sich

sogleich an die umfassendsten und schwierigsten Aufgaben zu wagen; auch hier wie auf den Gebieten der Mathematik und der exakten Naturwissenschaft mag vielmehr gerade die mühsame und beharrliche Kleinarbeit allmählich zu zwar bescheidenen, aber dafür sicheren und als solide Unterlage für die weitere Forschung geeigneten Ergebnissen führen.

Fünftes Kapitel.

Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre. Die axiomatische Methode.

§ 16. Das Axiomensystem.

1. Einleitendes über das Wesen einer Axiomatik. Wir gehen nun zur ausführlichen Darstellung der axiomatischen Begründung der Mengenlehre über, wie sie in den wesentlichsten Zügen schon 1908 von ZERMELO [3] gegeben worden ist. Dieser Aufbau der Mengenlehre[1] verläuft nach der sog. *axiomatischen Methode*, die vom historischen Bestand einer Wissenschaft (hier der Mengenlehre) ausgeht, um durch logische Analyse der darin enthaltenen Begriffe, Methoden und Beweise die zu ihrer Begründung erforderlichen Prinzipien — die *Axiome* — aufzusuchen und aus ihnen die Wissenschaft deduktiv herzuleiten. Gemäß dem Wesen dieser Methode sehen wir ganz davon ab, den Mengenbegriff zu *definieren* oder näher zu zergliedern; vielmehr gehen wir lediglich von gewissen Axiomen aus, in denen der Mengenbegriff wie auch die Relation[2] „als Element enthaltensein" auftritt und die Existenz gewisser Mengen gefordert wird. Durch die Gesamtheit der Axiome wird so der Begriff der Menge gewissermaßen unausgesprochen festgelegt, nachdem die *ausdrückliche* Umgrenzung, wie sie die Definition CANTORS (S. 4)

---

[1] Wesentlich andere Methoden, die Mengenlehre axiomatisch zu begründen, stammen von SCHOENFLIES ([9], vgl. auch [7] und [10]; diese Methode ist nur in sehr beschränktem Maße durchgeführt und durchführbar, siehe MERZBACH [1]) sowie von v. NEUMANN [2] (vgl. auch die umfassende Ausführung in der nach Fertigstellung dieses Buches erschienenen Abhandlung [4]); der Ausgangspunkt der letzteren Arbeiten, nach der der Kreis der existierenden Mengen ein weiterer ist als nach der hier durchgeführten Axiomatik, besitzt bemerkenswerte Vorzüge, wenn er auch — u. a. wegen der Voranstellung der *Funktion* an Stelle der *Menge* — als ungewohnt und darum im Anfang als schwierig erscheint. Eine weitere Axiomatisierung der Mengenlehre, von FINSLER ([3], vgl. auch [1] und [2]) stammend, verfügt ihrer ganzen Anlage nach nicht über hinreichend zuverlässige und scharfe Methoden, um das gesteckte Ziel zu erreichen (vgl. BAER [3]).

[2] Dieses in der mathematischen Grundlagenforschung (wie in der Philosophie) üblichen Ausdruckes bedienen wir uns fortan an Stelle des in den ersten Kapiteln gebrauchten farbloseren Ausdruckes „Beziehung" (der in der Logik zuweilen von jenem ausdrücklich geschieden wird).

enthielt, sich als unhaltbar erwiesen hat und auch augenscheinlich (abgesehen von den Methoden der beiden vorangehenden Paragraphen) nicht etwa durch eine brauchbarere Definition ersetzt werden kann (vgl. indes S. 385f.). Sachlich kann man diesen Verzicht auf eine Definition übrigens mit der Erwägung rechtfertigen, daß der Mengenbegriff für die Mathematik (und nicht bloß für sie!) als ein ursprünglicher Grundbegriff in dem nämlichen Sinne gelten kann, wie auch in der Logik oder Metaphysik letzte Begriffe als nicht mehr „definierbar", d. h. auf andere zurückführbar, zugrunde gelegt werden müssen. Nach Aufstellung der Axiome wird vor allem zu zeigen sein (in § 17), daß aus den Axiomen durch deduktives Schließen der Bestand der CANTORschen Mengenlehre folgt, daß dagegen für die Antinomien in diesem System kein Raum bleibt. Diese Aufgabe ist heute im wesentlichen gelöst. Demgegenüber trat bisher die weitere Frage zurück, wie etwa die (mehr oder weniger einleuchtend erscheinenden) Axiome zu begründen sind oder wenigstens ihre logische Widerspruchslosigkeit und damit ihre Zulässigkeit nachzuweisen ist; nach dieser Richtung ergeben sich gewisse Ausblicke auf Grund der in § 18 zu schildernden neuesten Arbeiten HILBERTS. Mehr als im Systeme RUSSELLS ist bei dieser Art des Aufbaus der rein mathematische Teil, nämlich die Zurückführung der Mengenlehre auf einige wenige scharf ausdrückbare Voraussetzungen, reinlich geschieden von der anderen, logischen oder „metamathematischen" Aufgabe der Begründung eben jener Voraussetzungen.

Die axiomatische Methode, deren sich die jetzt zu schildernde Begründung bedient, wird eingehender erst später (Beginn des § 18) besprochen werden, wenn die recht abstrakten Gedankengänge an Hand des nachfolgenden Axiomensystems im einzelnen illustriert werden können; auch die Literaturangaben allgemeiner Art sind dort zu finden. An dieser Stelle genügen einige Vorbemerkungen. Von einer *Definition* des Begriffs „Menge" und der Relation „m ist ein Element der Menge M" wird überhaupt abgesehen; die durch die Antinomien als unhaltbar erwiesene Definition CANTORS[1] (S. 4 und 13f.) — d. h. letzten Endes das Verfahren, einem beliebigen logischen Begriff eine Menge, die den „Umfang des Begriffs" bezeichnet, zuzuordnen — wird also aufgegeben und auch nicht eine andere Mengendefinition an ihre Stelle gesetzt. Statt dessen soll der Begriff der Menge wie auch die angeführte Relation, die als Grundrelation der Axiomatik bezeichnet wird, ihren Sinn[2] ausschließlich durch die Grundsätze oder Axiome der Axiomatik

[1] Allerdings trägt die ältere (und vielleicht originalere) Auffassung CANTORS über den Mengenbegriff einen fühlbar anderen, mehr konstruktiven Charakter (vgl. etwa [7 V]).

[2] Daß „Sinn" hier nur ganz formal zu verstehen ist, wird in § 18 eingehender zur Sprache kommen. Vgl. hierzu und zum nächsten Absatz namentlich Nr. 5 des § 18, S. 354.

erhalten. In den Axiomen ist nämlich von Mengen und vom Enthaltensein gewisser Elemente einer Menge die Rede: die Axiome sind Aussagen, die entweder gewisse Relationen zwischen einer „Menge" und den „in ihr enthaltenen Elementen" ausdrücken oder die Existenz bestimmter Mengen fordern oder endlich gestatten, aus der Existenz gewisser Mengen allgemein auf die Existenz gewisser anderer Mengen zu schließen. Danach dürfen der Grundrelation „m ist Element der Menge M" keine anderen Eigenschaften zugeschrieben werden als die, die in den Axiomen ausgedrückt sind oder sich aus den Axiomen deduktiv ergeben. Ebenso ist unter „Menge" nicht etwa jede „Zusammenfassung von Elementen" zu verstehen, sondern es gibt nur diejenigen Mengen, die auf Grund der Axiome existieren oder herleitbar sind. Schließlich wird das Wort „Element" überhaupt nicht zur Bezeichnung eines selbständigen Begriffs (etwa der „Menge" gegenüberstehend) gebraucht, sondern nur als Bestandteil der Grund*relation* „Element (einer Menge) sein"; in der Axiomatik tritt also nur eine einzige Kategorie von „Dingen" oder „Objekten" auf, nämlich die „Mengen", womit von vornherein keine bestimmtere Vorstellung als mit dem allgemeinen Ausdruck „Ding" verbunden zu werden braucht. Die einzelnen zu betrachtenden Mengen gelten uns also einfach als *Objekte der Grundkategorie „Menge"*; diese Grundkategorie stellt nicht eigentlich einen neuen Grundbegriff *neben* der Grundrelation ε dar, vielmehr bestimmt diese die Grundkategorie als den Bereich der Objekte, zwischen denen die Verknüpfung durch ε einen Sinn hat; die Kategorie der Mengen ist, wie man sagt, das „Feld" der Grundrelation ε.

Diese ganz formale, jedes sachlichen Inhalts entkleidete Auffassung, die auf eine Charakterisierung der Begriffe „Menge" und „Element sein" durch *Definition* bewußt verzichtet und sich mit einer Festlegung der Beziehungen zwischen den uns interessierenden Begriffen begnügt, wird vielleicht deutlicher durch den (auf S. 338 weiter auszuführenden) Hinweis, daß jede *mit den Axiomen verträgliche* Interpretation der Begriffe „Menge" und „als Element enthalten sein" zulässig und mit jeder anderen solchen Interpretation gleichberechtigt ist. Wären beispielsweise die Axiome so beschaffen, daß neben unserer gewöhnlichen Auffassung von jenen Begriffen etwa auch die Interpretation von „Menge" als „Vorfahre", von „Element einer Menge sein" als „Nachkomme eines Vorfahren sein" mit den Axiomen im Einklang stünde, so würden alle Folgerungen aus den Axiomen (d. h. etwa die ganze Mengenlehre) für die Theorie der Vorfahren einer Gesamtheit von Nachkommen gelten. Die meisten denkbaren Deutungen werden indes allmählich durch die Axiome ausgeschlossen, welche die infolge der Inhaltslosigkeit der Grundbegriffe zunächst bestehende Fülle von Möglichkeiten schrittweise einengen[1]. Man kann hiernach naturgemäß

[1] Vgl. SPINOZAS Wort „omnis determinatio est negatio" und die systematische Ausführung des obigen Gedankens bei GEIGER [1] (besonders S. 32f.).

niemals entscheiden, was eine Menge „an sich" ist, ob z. B. ein Pferd eine Menge darstellt; eine inhaltliche Bestimmung der Grundbegriffe entspricht eben gar nicht dem Wesen der axiomatischen Methode. Vielmehr liegt eine nur implizite, unausgesprochene, überdies gegenseitig verkettete Definition der Begriffe „Menge" und „Elementsein" mittels der Gesamtheit der in den Axiomen auftretenden Aussagen vor.

Der Sachverhalt kann cum grano salis auch durch Vergleich mit anderen Wissenschaften, z. B. der Physik, verdeutlicht werden. Begriffe wie der der Wärme oder der Elektrizität, auch etwa der des Äthers, sind in der Naturbetrachtung zunächst implizit gegeben durch ihre Wirkungen und Verknüpfungen bei den experimentell feststellbaren Tatsachen; das Wesen dieser physikalischen Begriffe wird anschaulicher (und auch unabhängiger von dem Wechsel der wissenschaftlichen Theorien) durch die Beschreibung charakteristischer Wirkungen gekennzeichnet als durch eine rein begriffliche Definition dessen, was beim augenblicklichen Stand der Forschung unter dem „Wesen" der Wärme, der Elektrizität, des Äthers verstanden wird.

Einer der Haupterfolge dieser axiomatischen Methode wird sich im Falle der Mengenlehre in folgendem Umstand zeigen müssen: faßt man die Grundrelation „als Element enhaltensein" im üblichen Sinn und versteht man unter einer „Menge" die Gesamtheit der Objekte unserer Axiomatik, die jeweils in einem Objekt „als Elemente enthalten sind", etwa im Sinne CANTORS (S. 4), so soll durch die Axiomatik ganz von selbst eine erhebliche *Beschränkung des Mengenbegriffs* gegenüber CANTOR erzielt werden; eine Beschränkung, die radikal genug ist, um die Antinomien zu beseitigen, aber doch nicht so weit geht, um etwa brauchbare Mengen der CANTORschen Mengenlehre auszuschließen.

Nach diesen Vorbemerkungen, die für den mit der axiomatischen Methode noch nicht vertrauten Leser ihren vollen Sinn erst durch das nachfolgende System und die daran zu knüpfenden allgemeinen Bemerkungen gewinnen werden, gehen wir zur Konstruktion der Axiomatik über.

2. Die Grundrelation ε. Vorbereitende Definitionen. Den Gegenstand unserer axiomatischen Betrachtung (kurz: Axiomatik) bilden gewisse „Objekte", die wir Mengen (oder ausführlicher: Objekte der Grundkategorie „Menge") nennen und mit (in der Regel kleinen) lateinischen Buchstaben wie a, b, m, n usw. bezeichnen. Es ist für die Ausdrucksweise zuweilen bequem, von den in unserer Betrachtung vorkommenden Mengen zu sagen, daß sie „existieren"; die Behauptung „m existiert" will also nichts anderes ausdrücken, als daß m eines der für uns in Betracht kommenden Objekte bezeichnet. Welche Mengen existieren, ist lediglich aus den Axiomen zu erschließen; andere Objekte als Mengen existieren für uns überhaupt nicht.

Zwischen je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Objekten m und n der Grundkategorie „Menge" soll die durch das Zeichen ε (Anfangsbuchstabe der Kopula ἐστί) dargestellte Grundrelation *entweder bestehen oder nicht bestehen*. Im ersten Fall schreiben wir $m \varepsilon n$, oder in Worten: m ist ein Element von n, n enthält oder besitzt das Element m, m kommt in n (als Element) vor usw.; im zweiten Fall, wenn also m nicht Element von n ist, schreiben wir $m \bar{\varepsilon} n$.

Um die Axiome bequem aussprechen zu können, beginnen wir mit einigen Erklärungen, die aus den Grundbegriffen neue „abgeleitete" Begriffe auf dem üblichen definitorischen Wege bilden. Es handelt sich hier also nicht etwa, wie bei den Axiomen, um tragende und unentbehrliche Pfeiler des zu errichtenden Gebäudes, sondern wesentlich um Abkürzungen der Redeweise, welche bei stetem unmittelbarem Zurückgehen auf „Menge" und ε bis zur Unerträglichkeit schleppend und unübersichtlich würde.

Definition 1. Sind m und n Mengen von der Art, daß jedes Element der Menge m auch in n als Element vorkommt (daß also aus $a \varepsilon m$ stets $a \varepsilon n$ folgt), so wird m eine Teilmenge der Menge n genannt[1].

Hiernach ist im besonderen jede Menge eine Teilmenge von sich selbst. Weiter folgt aus dieser Definition, daß *jede Teilmenge einer Teilmenge von n wiederum eine Teilmenge von n ist*. Denn sind m, p, n Mengen, von denen m eine Teilmenge von p, p eine Teilmenge von n ist, so folgt aus $a \varepsilon m$ stets $a \varepsilon p$, hieraus stets $a \varepsilon n$, also aus $a \varepsilon m$ stets $a \varepsilon n$, wie zu zeigen war.

Der Unterschied zwischen dieser Definition und der entsprechenden in der CANTORschen Mengenlehre (Definition 2 auf S. 20) liegt darin, daß hier von wesentlicher Bedeutung die Voraussetzung ist, wonach nicht nur n, sondern auch m eine *Menge* sein muß. Die Menge m muß also von vornherein als existierend vorliegen, um Teilmenge von n sein zu können; sie kann nicht wie a. a. O. einfach als „Zusammenfassung gewisser Elemente von n" gebildet werden und auf Grund dessen den Charakter als Teilmenge von n erhalten. Das entspricht unserem Grundsatz, keine Mengen außer den durch die Axiome geforderten zuzulassen, also namentlich auch nicht mittels einer Definition Mengen „herzustellen".

Es ist wichtig, die beiden Relationen „Element sein" und „Teilmenge sein" scharf voneinander zu scheiden; ihre Verwechslung, die durch sprachliche Momente (doppelte Verwendungsfähigkeit des Wortes „enthalten" oder auch „umfassen") begünstigt wurde, hat in der Logik öfters unerwünschte Folgen gezeitigt. Während eine Menge stets Teilmenge von sich selbst ist, wird sie in der Regel nicht Element von sich selbst sein.

Definition 2. *Sind m und n Mengen und ist sowohl m eine Teilmenge von n wie auch n eine Teilmenge von m, so heißt m* gleich *n; in*

[1] Man benutzt für diese (aus der Grundrelation ε abgeleitete) Relation vielfach das Subsumptionszeichen $\Subset$, schreibt also $m \Subset n$. Doch soll nachstehend vom Gebrauch dieses Zeichens abgesehen werden.

Zeichen: $m = n$. *In jedem anderen Fall heißt m* ***verschieden*** *von n* $(m \neq n)$.

Anders ausgedrückt: ist jedes Element von m gleichzeitig Element von n und umgekehrt, so ist $m = n$.

Nach der auf Definition 1 folgenden Bemerkung ist hiernach jede Menge sich selbst gleich ($m = m$); die definierte Gleichheit enthält also die Identität als Spezialfall. Ferner schließen wir aus der Definition unmittelbar, daß die Relation der Gleichheit symmetrisch und transitiv ist, d. h. daß aus $m = n$ stets $n = m$, aus $m = n$ und $n = p$ stets $m = p$ folgt. (Die durch Definition 1 festgelegte Relation „Teilmenge sein" dagegen ist zwar transitiv, nicht aber symmetrisch.) Schließlich ergibt sich aus Definition 2, daß in jeder Relation der Form $a \varepsilon A$ die Menge A durch jede ihr gleiche Menge B ersetzt werden darf, d. h. daß aus $a \varepsilon A$ und $A = B$ stets $a \varepsilon B$ folgt.

Definition 2 beschränkt stillschweigend die Gleichheit auf die Identität, so lange nicht anderweitig besondere Festsetzungen darüber vorliegen, die dann im Einklang mit Definition 2 stehen müssen. Auf die hieran sich knüpfenden subtilen Fragen und auf die etwaigen Vorteile einer Verschmelzung von Definition 2 und Axiom I zu einem andersartigen Axiom soll hier nicht eingegangen werden.

Definition 3. Sind m und n Mengen ohne gemeinsame Elemente, d. h. kommt kein Element von m auch in n als Element vor, so werden m und n **elementefremd** genannt. Sind allgemeiner je zwei beliebige Elemente einer Menge M stets elementefremde Mengen, so heißen die Elemente von M **paarweise elementefremd** oder auch kurz **fremd**.

Diesen Vorbereitungen sollen jetzt die Axiome folgen, durch die ja der Begriff „Menge" und die Grundrelation $m \varepsilon n$ erst zu bestimmen sind. Wir benötigen für die allgemeine Mengenlehre sieben Axiome und teilen diese nach ihrem allgemein-logischen Charakter in drei Gruppen, von denen übrigens die erste und die letzte nur je ein einziges Axiom enthält[1]. Die den Axiomen jeweils vorangeschickten oder angefügten Bemerkungen sollen namentlich darauf hinweisen, *weshalb* das betreffende Axiom erforderlich ist oder weshalb noch weitere Axiome benötigt werden. Diese Überlegungen wie überhaupt den Inhalt der Axiome wird man sich naturgemäß immer an der gewöhnlichen Mengenlehre, d. h. am CANTORschen Begriff von „Menge" und an der üblichen Bedeutung der Relation „Element sein" zu veranschaulichen suchen.

3. Relationales Axiom (Axiom der Bestimmtheit). Unter der *Gleichheit* wird in den verschiedenen Zweigen der Mathematik zwar keineswegs immer dasselbe verstanden, wohl aber stets eine Relation von ganz bestimmter Prägung, die in vielem an die logische

---

[1] Wegen einer eventuell noch dazu tretenden abschließenden Forderung siehe S. 355f.

Beziehung der Identität erinnert. Ob auch der durch Definition 2 eingeführte Gleichheitsbegriff diese Prägung besitzt, läßt sich vorerst nicht vollständig feststellen; denn wir haben ja die Gleichheit definitorisch zurückgeführt auf die Relation ε, welche Grundrelation der Axiomatik ist und über deren Natur wir daher einstweilen gar nichts wissen. Fragen wir uns einmal, worin eigentlich jene besondere Prägung des mathematischen Gleichheitsbegriffes besteht! Sie liegt darin, daß jedes mathematische Objekt sich selbst gleich ist, daß die Gleichheit einen symmetrischen und transitiven[1] Charakter trägt und daß in einer richtigen Aussage, die verschiedene mathematische Objekte miteinander verknüpft, jedes Objekt durch ein ihm gleich erklärtes ersetzt werden darf, ohne daß dadurch die Richtigkeit der Aussage beeinträchtigt würde. Fast alle diese Eigenschaften besitzt auch die hier eingeführte Gleichheit, wie wir vorhin in den Bemerkungen zu Definition 2 festgestellt haben. Nur eins fehlt noch: In den innerhalb unserer Axiomatik möglichen Aussagen, die entweder schon die Form $a \varepsilon A$ bzw. $a \not\varepsilon A$ haben oder sich auf derartige Formen zurückführen lassen, darf, wie wir oben sahen, die Menge A durch jede ihr gleiche B ersetzt werden. Soll aber die Gleichheit die sonst übliche Prägung besitzen, so muß es erlaubt sein, in der Relation $a \varepsilon A$ auch die Menge a durch eine ihr gleiche b zu ersetzen, d. h. es muß aus $a \varepsilon A$ und $a = b$ stets auch $b \varepsilon A$ folgen.

Wenn wir diese Aussage als Axiom formulieren, so legen wir damit — übereinstimmend mit der sonst üblichen Art einer Gleichheitsrelation — den Charakter der Gleichheit präziser fest, als es zunächst durch Definition 2 geschah. Schärfer ausgedrückt: wir sprechen mit einem solchen Axiom eine weitergehende Behauptung über die gegenseitige Verknüpfung der Relationen ε und $=$ aus, als schon in Definition 2 enthalten. Dieses Axiom, das also nur eine nähere Charakterisierung der Gleichheitsrelation und damit auch der Grundrelation ε bezweckt, muß demnach lauten:

Axiom I. *Sind a, b, A Mengen, ist a Element von A und gilt $a = b$, so ist auch b Element von A.* (Axiom der Bestimmtheit.)

Das eigentliche Wesen dieses Axioms und damit auch die Bezeichnung „Axiom der Bestimmtheit" erklärt sich folgendermaßen: Nach dem Axiom besitzt die hier eingeführte Gleichheit im vollen Maße die Eigenschaft, die ihr auch sonst überall in der Mathematik zukommt, daß nämlich je zwei als gleich erklärte Objekte — hier: Mengen — unterschiedslos einander vertreten können. Zwei gleiche Mengen können daher in allen Fragen, die in der axiomatisierten Mengenlehre überhaupt denk-

[1] Man erinnere sich an das angebliche „Axiom": wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich. Vom oben eingenommenen Standpunkt aus dient diese Eigenschaft der Gleichheit zusammen mit den übrigen oben angeführten Eigenschaften dazu, die Gleichheit zu *definieren*.

bar sind, nicht voneinander unterschieden werden; man kann sie für alle solchen Probleme als miteinander identisch ansehen, mögen sie auch *logisch* das keineswegs sein[1]. Man kann also gemäß Definition 2 zwei Mengen, die die nämlichen Elemente enthalten, miteinander unterschiedslos identifizieren, wozu jene Definition für sich allein noch nicht berechtigen würde. Eine nähere Kennzeichnung einer Menge als die, daß sie diese und jene Elemente enthält, kommt also für den Mengenbegriff, als axiomatischen Grundbegriff gefaßt, überhaupt nicht in Frage; ein etwaiges Wie? des Enthaltenseins der Elemente, z. B. eine gewisse Reihenfolge des Vorkommens der Elemente in der Menge, spielt keine Rolle. Man kann somit vermöge des Axioms I der Definition 2 die folgende Tatsache entnehmen: *Eine Menge ist durch die Gesamtheit ihrer Elemente völlig bestimmt.*

Infolgedessen kann eine Menge m außer durch Angabe ihres „Namens" m auch durch Angabe sämtlicher in ihr vorkommenden Elemente eindeutig bezeichnet werden. Will oder kann man diese Elemente nicht alle aussprechen bzw. anschreiben, so wird man sich oft unmißverständlich mit „usw." oder mit Punkten behelfen können. Man gelangt so zu unserer schon auf S. 15 eingeführten Schreibweise $M = \{a, b, c, \ldots\}$, wo $a, b, c, \ldots$ die sämtlichen Elemente der Menge M bezeichnen; im Gegensatz zu dort stellen hier die Elemente selbst notwendig Mengen dar, da in unserer Axiomatik ja überhaupt nur Mengen auftreten.

Hiermit wird freilich nur ganz formal wieder die Bestimmung und Bezeichnung einer Menge durch ihre Elemente erreicht, wie sie uns ganz im Anfang (§ 2) entgegengetreten ist. Das damals allenfalls mögliche Mißverständnis, als „bestehe" eine Menge aus ihren Elementen, hat jetzt sicherlich keine Berechtigung mehr; es ist eine völlig inhaltsfreie, übrigens eindeutige Zuordnung, vermöge deren jeweils gegebenen Objekten eine „Menge" entspricht, die jene „als Elemente enthält".

4. Die „erweiternden" bedingten Existenzaxiome (Axiome der Paarung, der Vereinigung, der Potenzmenge). Bis jetzt haben wir nur formal verabredet, die mathematischen Objekte, die in der aufzubauenden Axiomatik auftreten, als „Mengen" zu bezeichnen; *was für* „Mengen" aber überhaupt vorkommen sollen, darüber wissen wir nichts. Dieser Frage sollen jetzt unsere Betrachtungen gelten.

Während Axiom I nur über die *Art* des Mengenbegriffs bzw. der Grundrelation ε, nicht aber über die *Existenz* von Mengen etwas aussagt, haben die folgenden fünf Axiome, die den wesentlichsten Teil des ganzen Axiomensystems darstellen, sämtlich die folgende logische

[1] Z. B. behauptet das letzte FERMATsche Theorem (S. 229), daß die Menge der natürlichen Zahlen n, für die die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ganzzahlig lösbar ist, gleich der Menge $\{1, 2\}$ sei. Von der logischen Identität dieser beiden Zahlenmengen kann aber doch keine Rede sein! Man vergleiche auch das, was auf S. 254ff. über den extensionalen Charakter der Mathematik bemerkt worden ist.

Form: wenn gewisse Mengen existieren, so existiert auch eine gewisse weitere Menge, die durch jene in einem anzugebenden Sinn bestimmt ist. Diese Axiome fordern also unter der Voraussetzung der Existenz gewisser Mengen die Existenz weiterer Mengen von bestimmter Art; sie drücken *bedingte Existenzforderungen* aus. In lockerer und anschaulicher Formulierung kann man sagen, die Axiome gestatten die Bildung neuer Mengen aus gegebenen; hierbei ist aber „Bildung" in der scharfen Präzisierung der vorangehenden Sätze zu verstehen, nicht etwa mit dem Beigeschmack der Konstruktion. Ihre wahre existenzschaffende Kraft gewinnen derartige bedingte Existenzforderungen natürlich nur durch die *voraussetzungslose* Sicherung irgendwelcher Mengen, d. h. durch ein absolutes (unbedingtes) Existenzaxiom, wie ein solches auf S. 306f. ausgedrückt wird; ohne eine derartige Forderung würden ja die bedingten Existenzaxiome auch dann erfüllt sein, wenn es überhaupt keine Mengen gäbe. Übrigens ist diese Auffassung der folgenden Axiome als bedingter Existenzaxiome, die die Bildung neuer Mengen gestatten, mehr auf das psychologische Verständnis zugeschnitten; rein systematisch gesehen liefern die Axiome eine Art relationaler Verknüpfungen zwischen gewissen der vorhandenen Mengen (ähnlich wie das bei einer Axiomatisierung der Arithmetik auch für die „Operationen" der Addition usw. gilt).

Es wäre am kürzesten und mathematisch durchaus zureichend (und üblich), jetzt die Axiome als fertige Gebilde unvermittelt aufmarschieren zu lassen, daran rein deduktiv die aus ihnen ableitbaren Folgerungen zu knüpfen und sich so einen Überblick über die Tragweite der Axiome zu verschaffen. Eine tiefere Einsicht in das Wesen der einzelnen Axiome und in die Gründe, aus denen man gerade *sie* und nicht andere Aussagen zum Fundament des Gebäudes der Mengenlehre macht, würde auf diese Weise nicht oder nur auf weiten Umwegen zu gewinnen sein. Wir wollen daher zur Vorbereitung einen mehr induktiven Weg einschlagen, der die Zweckmäßigkeit, in gewissem Sinne sogar die Notwendigkeit der Aufstellung der einzelnen Axiome in helles Licht setzt und so gleichzeitig für die Untersuchung der „Unabhängigkeit" der Axiome (vgl. S. 340 ff.) Fingerzeige liefert. Leitender Gedanke von einem freilich nur heuristischen, niemals beweiskräftigen Werte ist uns dabei die Erkenntnis, welche Prozesse der Mengenbildung in der CANTORschen Mengenlehre von ausschlaggebender Bedeutung gewesen sind.

Soll die axiomatische Methode im vorliegenden Fall ihr nächstes Ziel, den automatischen Ausschluß der Antinomien, erreichen, so müssen natürlich die durch die Axiome ermöglichten Prozesse der Mengenbildung von so eingeschränkter Natur sein, daß Widersprüche aus ihnen nicht ableitbar sind. Eine uferlose „Zusammenfassung" ganz beliebiger Mengen als Elemente der neu zu bildenden Mengen wird also keinesfalls in Frage kommen.

Die denkbar einfachste Operation der Mengenbildung besteht in der Zusammenfassung zweier gegebener Mengen zu einer neuen Menge, deren Elemente die gegebenen Mengen sind. Wir verlangen die ausnahmslose Ausführbarkeit dieser Operation, also:

Axiom II. *Sind a und b verschiedene Mengen, so existiert eine Menge, die die Elemente a und b, aber kein von ihnen verschiedenes Element enthält.* Diese Menge ist nach dem Vorangehenden mit $\{a, b\}$ zu bezeichnen und wird das Paar von a und b genannt. **(Axiom der Paarung.)**

Dieses Axiom erlaubt, aus zwei verschiedenen gegebenen Mengen a und b eine neue $\{a, b\}$ „zu bilden", was immer wieder nichts anderes bedeuten soll, als „aus der vorausgesetzten Existenz der Mengen a und b auf die Existenz der neuen Menge $\{a, b\}$ zu schließen". Wenn man sich des (vom abstrakt axiomatischen Standpunkt aus allzu gegenständlichen) Ausdrucks der „Zusammenfassung" bedienen will, so kann man sagen: das Axiom der Paarung gestattet, je zwei verschiedene Mengen zu einer neuen Menge zusammenzufassen. Es sei noch bemerkt, daß nur *ein einziges* Paar von a und b existieren kann; denn zwei solche Paare müssen, da sie die nämlichen Elemente enthalten, nach dem Axiom der Bestimmtheit miteinander übereinstimmen. Die nämliche Bemerkung über die eindeutige Bestimmtheit der durch das Axiom geforderten neuen Menge gilt auch für die folgenden Axiome III, IV und V, und zwar immer aus demselben Grunde (wegen des Axioms der Bestimmtheit).

Wenn man im Vordersatz des Axioms das Wort „verschiedene" wegließe, so wäre die Existenz des (seinen Namen dann freilich nicht mehr verdienenden) Paares auch noch für den Fall $a = b$ verlangt; das Axiom würde also eine *weitergehende* Forderung enthalten. Die obige schwächere und somit einfachere Fassung genügt aber für unsere Zwecke.

Sind $a, b, c, d, \ldots$ lauter verschiedene Mengen, so kann man durch wiederholte Anwendung des Axioms der Paarung auch schon kompliziertere Mengen sichern, so z. B. die Menge $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ oder $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$. Alle auf solche Weise herstellbaren Mengen enthalten indes stets zwei Elemente.

Das Axiom der Paarung gestattet die Zusammenfassung zweier *Mengen* zu einer neuen Menge. Die nächsteinfache Verknüpfung von Mengen, die uns in der Mengenlehre entgegengetreten ist, war die Bildung der Summe oder Vereinigungsmenge von Mengen (S. 71 f. und 79 f.), d. h. die Zusammenfassung der *Elemente* gewisser Mengen $m, n, p, \ldots$ zu einer neuen Menge. Die Existenz einer solchen Vereinigungsmenge muß auch durch unsere Axiome gesichert werden. Sie kann aber, entsprechend unserem Standpunkt, natürlich nicht für jede beliebige „Gesamtheit" von Mengen $m, n, p, \ldots$ in Betracht kommen, sondern nur dann, wenn diese Mengen $m, n, p, \ldots$ sämtlich in legitimer Form gegeben sind: nämlich als die Elemente einer und derselben schon als existierend vorausgesetzten Menge M[1]. Also:

[1] So sind wir formal schon früher (a. a. O.) verfahren.

Axiom III. *Ist M eine Menge, die mindestens éin Element enthält, so existiert eine Menge, die die Elemente der Elemente von M als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt.* Oder ausführlicher: Ist M eine Menge mit den Elementen $m, n, p, \ldots$, so existiert eine Menge, deren Elemente die sämtlichen Elemente der Mengen $m, n, p, \ldots$ sind, während keine anderen Elemente in ihr vorkommen. Die neue Menge wird die Vereinigungsmenge der Menge M genannt und mit $\mathfrak{S}M$ bezeichnet; $a \varepsilon \mathfrak{S}M$ gilt also dann und nur dann, wenn mindestens éin $q \varepsilon M$ existiert, für das $a \varepsilon q$ gilt. **(Axiom der Vereinigung.)**

Hiernach existiert z. B, wenn a und b zwei verschiedene Mengen sind, stets die Menge, die wir früher mit $a + b$ bezeichnet und die „Vereinigungsmenge von a und b" genannt haben. Denn nach dem Axiom der Paarung existiert das (nur die Elemente a und b enthaltende) Paar $M = \{a, b\}$; die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ ist dann die gewünschte Menge. Wir werden nachstehend zuweilen wie früher das Zeichen $+$ verwenden; ebenso sollen die Elemente $m, n, p, \ldots$ der in Axiom III vorkommenden Menge M gelegentlich die *Summanden* der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ genannt werden.

Daß die Vereinigungsmenge unabhängig ist von einer etwaigen Reihenfolge der Summanden, folgt unmittelbar aus Definition 2 und dem Axiom der Vereinigung.

Die Axiome der Paarung und der Vereinigung geben zusammengenommen schon eine gewisse Freiheit in der „Bildung von Mengen", d. h. sie gestatten auf Grund gewisser Voraussetzungen schon, auf die Existenz zahlreicher Mengen zu schließen. Sind z. B. drei verschiedene Mengen a, b, c gegeben, so ermöglicht das Axiom der Paarung zunächst die Bildung der Mengen $\{a, b\} = m$ und $\{b, c\} = n$, dann auch die der Mengen[1] $\{m, c\} = \{\{a, b\}, c\}$ und $\{a, n\} = \{a, \{b, c\}\}$. Nach dem Axiom der Vereinigung existieren weiter z. B. die Mengen $\mathfrak{S}m = a + b$ und $\mathfrak{S}n = b + c$, ferner nach dem Axiom der Paarung die Mengen $\{\mathfrak{S}m, c\} = C$ und $\{a, \mathfrak{S}n\} = A$, schließlich nach dem Axiom der Vereinigung die Mengen

$$\mathfrak{S}C = \mathfrak{S}m + c = (a + b) + c, \quad \mathfrak{S}A = a + \mathfrak{S}n = a + (b + c).$$ [2]

Man erkennt leicht, wie man so allmählich zu umfassenderen Mengen gelangen kann; $\mathfrak{S}A$ und $\mathfrak{S}C$ enthalten ja schon sämtliche Elemente

[1] Hier und im nächstfolgenden wäre eigentlich (im Sinn des Axioms der Paarung) noch die Bedingung zu stellen, daß die zu paarenden Mengen voneinander verschieden sind; von dieser Bedingung werden wir uns jedoch bald freimachen (S. 287 oben und 312).

[2] Ganz wie in § 7 (S. 85f.) ist (auf Grund der Definition 2) leicht zu sehen, daß die Vereinigungsmengen $\mathfrak{S}A$ und $\mathfrak{S}C$ gleich sind und daß auch für beliebig viele Summanden (d. h. im allgemeinen Fall des Axioms III) das assoziative Gesetz gilt. Die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes ist schon im vorigen Absatz festgestellt worden.

der drei Mengen a, b, c zusammen und auf dem gleichen oder einem ähnlichen Weg kann man weiterschreiten.

Dennoch gewähren die bisherigen Axiome uns bei weitem nicht diejenige Freiheit in der Mengenbildung, die erforderlich ist, um Mengenlehre in einem mit CANTORS Werk irgendwie vergleichbaren Umfang zu treiben. Um dies einzusehen, braucht man sich nur an die Tatsache zu erinnern, daß in der CANTORschen Mengenlehre die Vereinigung endlichvieler endlicher Mengen stets eine endliche, die Vereinigung abzählbar unendlichvieler endlicher oder abzählbarer Mengen stets eine höchstens abzählbar unendliche Menge liefert. Selbst wenn unsere Axiomatik über endliche und abzählbare Mengen ausreichend verfügte, wären also die Mittel der Paarung und der Vereinigung nicht kräftig genug, um noch umfassenderen, also überabzählbaren unendlichen Mengen die Existenz zu sichern. Schon zum Kontinuum könnten wir also auf diese Art nicht vordringen.

Auf das zu diesem Zweck erforderliche Hilfsmittel werden wir aufmerksam, wenn wir auf die Methode zurückblicken, die uns in der CANTORschen Mengenlehre erlaubte, zu jeder Menge M eine Menge von höherer Mächtigkeit nachzuweisen. Es war das die Bildung der Potenzmenge von M, also der Menge, deren Elemente die sämtlichen Teilmengen von M sind (S. 67f.). Obgleich für unseren jetzigen Standpunkt der Begriff der Teilmenge weit enger gefaßt ist als damals (vgl. Definition 1 und Axiom V), wird sich doch auch hier die entsprechende Methode als ausreichend erweisen, um von einer beliebigen Menge auf eine Menge von höherer Mächtigkeit zu schließen. Das diesem Zweck dienende nachfolgende Axiom enthält demgemäß eine sehr weitgehende Forderung, was von den Kritikern der ZERMELOschen Auffassung nicht immer beachtet worden ist; wer die Forderungen unseres Axiomensystems für zu weitgehend hält, wird Axiom IV mindestens ebenso scharf mustern müssen wie das (freilich neuartigere) Axiom VI, das viel weniger fordert und viel mehr bestritten worden ist (vgl. S. 302f.).

Axiom IV. *Ist m eine Menge, so existiert eine Menge, die sämtliche Teilmengen von m als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt.* Die neue Menge wird die Menge aller Teilmengen von m oder kürzer (wie auf S. 107) die Potenzmenge der Menge m genannt und mit $\mathfrak{U}m$ bezeichnet; $a \varepsilon \mathfrak{U} m$ gilt also dann und nur dann, wenn a Teilmenge von m ist. **(Axiom der Potenzmenge.)**

Es werde hier nochmals hervorgehoben, daß, wie in Definition 1, so auch in Axiom IV der Begriff „Teilmenge" eine andere, wesentlich engere Bedeutung hat als in der CANTORschen Mengenlehre. In dieser konnten wir bei der Bildung der Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ eine beliebige Gesamtheit von Elementen aus m zu einer Teilmenge von m zusammenfassen und waren dann sicher, daß diese sich unter den Elementen von $\mathfrak{U}m$ findet. Jetzt ist uns eine derartige, weitgehende Freiheit gewährende

„Bildung“ einer Teilmenge von m nicht gestattet, also auch ihr Auftreten unter den Elementen von $\mathfrak{U}m$ keineswegs gesichert. Vielmehr *muß uns eine Menge erst anderweitig als existierend gegeben sein*, damit wir sie nach Definition 1 darauf prüfen können, ob sie etwa Teilmenge von m ist; dann erst können wir bei günstigem Ausfall der Prüfung ihres Auftretens in $\mathfrak{U}m$ sicher sein.

5. Die „einschränkenden“ bedingten Existenzaxiome (Axiome der Aussonderung und der Auswahl). Die nächsten beiden Axiome haben einen wesentlich anderen Charakter als die drei vorangehenden. Diese bezweckten vor allem, dem Begriff der Menge eine gewisse Expansion zu geben, derart, daß aus der Existenz gegebener Mengen auf das Vorhandensein anderer, in gewissem Sinne umfassenderer Mengen geschlossen werden könne; das wurde erreicht durch Paarung, durch Vereinigung, durch Potenzmengenbildung. Dagegen fehlt uns in der Hauptsache noch ein entgegengesetztes Verfahren: eine Methode der Bildung von Mengen eingeschränkteren Umfangs oder, schärfer ausgedrückt, eine Forderung, wonach die Existenz einer gewissen Menge die Existenz gewisser Teilmengen von ihr zur Folge hat.

Dieser Mangel bewirkt, daß der Begriff der Teilmenge und daher auch der der Potenzmenge vorerst fast trivial erscheint. Denn ist eine Menge m gegeben, so können wir mit den bisherigen Mitteln über die Teilmengen von m zunächst nur das eine aussagen: sind a und b irgend zwei verschiedene Elemente von m, so existiert nach dem Axiom der Paarung das Paar $\{a, b\}$, das nach Definition 1 eine Teilmenge von m ist; daher ist jedes solche Paar $\{a, b\}$ ein Element der Potenzmenge $\mathfrak{U}m$. Wir bekommen so alle möglichen Teilmengen mit zwei Elementen, aber auch *nur* solche Teilmengen. Durch wiederholte Anwendung des Axioms der Paarung und gleichzeitig auch des Axioms der Vereinigung kann man noch zu allgemeineren Teilmengen von m gelangen[1], aber immer nur zu Teilmengen, die (im naiven Sinn) *endlichviele* Elemente umfassen. Dagegen ist es nicht möglich, aus der Existenz einer im gewöhnlichen Sinn unendlichen Menge m allgemeinhin das Vorhandensein irgendeiner *unendlichen* Teilmenge von m (außer m selbst) zu folgern, also aus der etwaigen Existenz der Menge aller natürlichen Zahlen auf die Existenz der Menge aller geraden Zahlen oder auch nur auf die Existenz der Menge aller natürlichen Zahlen außer 1 zu schließen. (Wie eine solche negative Behauptung sich beweisen läßt, davon wird auf S. 341 f. die Rede sein.)

[1] Sind z. B. a, b, c drei verschiedene Elemente von m, so existieren nach dem A. d. Paarung die Paare $\{a, b\} = n$ und $\{a, c\} = p$, also auch das Paar $M = \{n, p\} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$; dessen Vereinigungsmenge ist $\mathfrak{S}M = \{a, b, c\}$, d. i. (nach Definition 1) eine Teilmenge von m. Entsprechend kann man Teilmengen von vier, fünf usw. Elementen bilden.

Andererseits zeigt uns schon ein flüchtiger Rückblick auf CANTORS Aufbau der Mengenlehre, daß die Bildung von Teilmengen — und keineswegs etwa nur endlicher — eine der wichtigsten Methoden unserer Wissenschaft ist. Es genügt z. B. an die Menge der transzendenten Zahlen (Teilmenge der Menge der reellen Zahlen, vgl. S. 12f. und 53f.) oder an die Menge u' zu erinnern, die in dem Beweise des grundlegenden CANTORschen Satzes über die Mächtigkeit der Potenzmenge (S. 68f.) die entscheidende Rolle spielt; mit bloß endlichen Teilmengen werden wir das bei der Aufstellung von Axiom IV gesteckte Ziel, den Übergang von einer beliebigen Mächtigkeit zu einer größeren, jedenfalls nicht erreichen.

Demgemäß verfolgen die Axiome V und VI den Zweck, die Existenz von Teilmengen einer gegebenen Menge in ausreichendem Maße zu sichern. Axiom V läßt Teilmengen sehr allgemeiner Art zu. Dagegen bezieht sich Axiom VI nur auf die Existenz von Teilmengen einer ganz speziellen Beschaffenheit, und zwar werden diese Teilmengen (im Gegensatz zu den durch die Axiome II—V bezeichneten Mengen) durch Axiom VI *nicht eindeutig* bestimmt; es wird da nicht eine Menge gefordert, die gewisse Elemente enthalten soll und daher nach dem Axiom der Bestimmtheit eindeutig festgelegt ist, sondern irgendeine Vertreterin eines Mengentyps, der durch weniger weitgehende Eigenschaften charakterisiert ist. Daß die speziellere Forderung VI nicht etwa in der allgemeinen V miteingeschlossen ist, daß es also wirklich der Aufstellung der *beiden* Axiome bedarf, wird auf S. 345 f. zur Erörterung kommen.

Axiom V. *Ist m eine Menge und $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft, die für jedes einzelne Element von m sinnvoll (zutreffend oder auch unzutreffend) ist, so existiert eine Menge, die alle diejenigen Elemente von m, denen die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt, als Elemente enthält, aber keine anderen Elemente besitzt.* Diese Menge ist demnach eine Teilmenge von m, die aus m durch „Aussonderung" der Elemente von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ entsteht und mit $m_{\mathfrak{E}}$ bezeichnet wird. **(Axiom der Aussonderung** oder **der Teilmengen.)**

Der in diesem Axiom vorkommende und ganz wesentliche Begriff „sinnvolle Eigenschaft" entbehrt jener Präzision und Eindeutigkeit, die wir in der Mathematik und ganz gewiß in dem strengen Aufbau einer Axiomatik mit Recht zu fordern gewohnt sind. Er ist sogar geeignet unangenehme Erinnerungen an gewisse Antinomien wach zu rufen, in denen der Eigenschaftsbegriff eine wesentliche Rolle spielt. Wir werden diesen anstößigen Begriff später ausmerzen (S. 285 f.). Einstweilen genügt es, unter „sinnvollen Eigenschaften" solche zu verstehen, die jedem beliebigen Element von m entweder wohl oder nicht zukommen; das braucht freilich nicht etwa durchaus auf konstruktivem Weg entscheidbar zu sein, sondern auch z. B. die Anwendung des Satzes vom aus-

geschlossenen Dritten ist zulässig. Ist etwa m eine Menge verschiedenfarbiger Kugeln und $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft, weiß zu sein, so existiert die Menge $m_{\mathfrak{E}}$ aller weißen Kugeln der Menge. Ist m die Menge aller reellen Zahlen, $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft, transzendent zu sein, so ist auch diese Eigenschaft für jede reelle Zahl sinnvoll, da sie nach der Definition der Transzendenz jedenfalls einer beliebigen reellen Zahl entweder zukommt oder nicht, mag auch die Entscheidung beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft nicht immer möglich sein; daher existiert mit m gleichzeitig auch die Menge $m_{\mathfrak{E}}$ aller reellen transzendenten Zahlen. Dagegen ist z. B. die Eigenschaft „ewig" für die Elemente einer Zahlenmenge nicht sinnvoll und daher auch nicht dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten unterworfen (vgl. S. 232).

Um zu Axiom VI zu gelangen, stellen wir eine Betrachtung an, die uns das Vorhandensein einer Lücke innerhalb des Systems der bisherigen Axiome vermuten läßt und die gleichzeitig die Tragweite der bisherigen Axiome teilweise beleuchtet. Es sei eine Menge M gegeben, deren Elemente $m, n, p, \ldots$ *paarweise elementefremd* sind; ferner wollen wir voraussetzen, daß jede dieser Mengen $m, n, p, \ldots$ auch ihrerseits *überhaupt Elemente enthält* (was nicht selbstverständlich ist, vgl. die Nullmenge, S. 21 und 312), d. h. daß es zu jedem Element m von M mindestens eine Menge x gibt, so daß $x \varepsilon m$. Dann existiert nach dem A. d. Vereinigung die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$, die alle Elemente der Mengen $m, n, p, \ldots$ enthält. Jede Teilmenge von $\mathfrak{S}M$ enthält also *gewisse* Elemente der Mengen $m, n, p, \ldots$ Möglicherweise gibt es insbesondere Teilmengen S der Menge $\mathfrak{S}M$ von der Eigenschaft, daß S aus jeder der Mengen $m, n, p, \ldots$ *ein einziges* Element enthält (m. a. W.: daß S mit jedem Element von M gerade éin Element gemein hat.) Hierin liegt eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$, die einer jeden Teilmenge S von $\mathfrak{S}M$ entweder zukommt oder nicht zukommt[1]. Das Axiom VI soll nun fordern, daß *derartige Mengen S überhaupt existieren*, daß es also mindestens éine Teilmenge S von jener Eigenschaft $\mathfrak{E}$ gibt.

Wir können dies umständlicher, aber systematischer auch so ausdrücken: die Potenzmenge der Menge $\mathfrak{S}M$ existiert nach dem A. d. Potenzmenge und enthält als Elemente *alle* Teilmengen von $\mathfrak{S}M$; statt mit $\mathfrak{U}\mathfrak{S}M$ bezeichnen wir diese Potenzmenge kürzer mit U. Die gewünschten Mengen S sind dann diejenigen Elemente von U (d. h. die-

[1] Man kann diese Eigenschaft noch schärfer folgendermaßen zergliedern: Ist S irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{S}M$, so kommt einem beliebigen Element von M (d. h. einer der Mengen $m, n, p, \ldots$) die Eigenschaft $\mathfrak{E}_1$, gerade *ein einziges* Element von S zu enthalten, entweder zu oder nicht zu. Die Teilmenge der diese Eigenschaft besitzenden Elemente von M ist demnach mit $M_{\mathfrak{E}_1}$ zu bezeichnen (A. d. Aussonderung). Ist $M_{\mathfrak{E}_1} = M$, d. h. besitzt *jede* der Mengen $m, n, p, \ldots$ die Eigenschaft $\mathfrak{E}_1$, so heißt das im Sinn der obigen Bezeichnung: Die Menge S besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ (nämlich mit jedem Element von M ein einziges Element gemein zu haben).

jenigen Teilmengen von $\mathfrak{S}M$), denen die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt. Nach dem A. d. Aussonderung existiert sicher die Teilmenge $U_{\mathfrak{E}}$ von U, deren Elemente die Mengen S sind; falls keine derartigen Mengen S vorhanden wären, würde $U_{\mathfrak{E}}$ zwar immer noch existieren, aber $= 0$ sein. Unsere Forderung läßt sich demnach auch so aussprechen: Die Menge $U_{\mathfrak{E}}$, d. i. die Teilmenge der die angeführte Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzenden Elemente S von U, soll von der Nullmenge verschieden sein, somit mindestens éin Element S enthalten. Also:

Axiom VI. *M sei eine Menge, deren Elemente sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementefremd sind. Dann existiert mindestens eine Menge S — nämlich eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ —, die mit jedem Element von M gerade ein einziges Element gemein hat, aber keine anderen Elemente besitzt.* Jede derartige Menge S wird eine Auswahlmenge von M genannt. (**Axiom der Auswahl.**)

Man kann (mit ZERMELO) anschaulich, wenn auch weniger scharf, die Aussage dieses Axioms so formulieren: Ist $M = \{m, n, p, \ldots\}$ eine Menge von den angeführten Eigenschaften, so läßt sich aus jeder der Mengen $m, n, p, \ldots$ je ein einziges Element $m_0, n_0, p_0, \ldots$ „auswählen" und eine Menge S bilden, die all die ausgewählten Elemente und nur sie enthält. Die ausgewählten Elemente sind untereinander verschieden, da die Mengen $m, n, p, \ldots$ paarweise elementefremd sein sollten. Natürlich ist die „Auswahl" im allgemeinen auf mehrere Arten möglich; so entstehen verschiedene Auswahlmengen von M. Hiermit ist auch die Bezeichnung „Axiom der Auswahl" erklärt; sie ist freilich nicht sehr glücklich und gibt, ebenso wie die angegebene Verdeutlichung des Axioms, mancherlei Mißverständnissen Raum, die bei der ursprünglichen Fassung ZERMELOs und bei den (mit ihr sachlich übereinstimmenden) Formulierungen im vorigen und im folgenden Absatz nicht möglich sind (vgl. S. 289 ff.). Die Aussage des Axioms hat nämlich *nichts* zu tun mit der Möglichkeit eines bestimmten Verfahrens, um die Auswahl geeigneter Elemente $m_0, n_0, p_0, \ldots$ wirklich vorzunehmen, oder auch nur mit der Existenz einer für diese Elemente charakteristischen Eigenschaft; diese mißverständliche Auffassung, die durch die etwas unpassende, aber nun einmal historisch gewordene Bezeichnung des Axioms[1] nahegelegt wird, hat öfters auch noch in neuerer philosophischer und mathematischer Literatur zu Irrtümern geführt.

Eine noch etwas andere, vor Mißverständnissen besonders gut gesicherte Fassung gewinnt das Axiom VI, wenn man an den Begriff des Produkts oder der Verbindungsmenge von Mengen (S. 89) anknüpft. Wir definierten ein solches Produkt $\mathfrak{P}M = m \cdot n \cdot p \cdot \ldots$ als die

[1] Französisch wird das Axiom „axiome du choix" oder auch „axiome de ZERMELO" genannt, englisch meist „multiplicative axiom" (vgl. den folgenden Absatz).

Menge aller möglichen „Komplexe", die aus jedem der (hier überdies als paarweise fremd vorausgesetzten) Faktoren m, n, p, ... je ein einziges Element enthalten. Daher ergab sich $\mathfrak{P}M = 0$, wenn unter den Faktoren die Nullmenge vorkommt. Es fragt sich nun aber, ob $\mathfrak{P}M$ auch gleich der Nullmenge sein kann, *ohne daß diese unter den Elementen von M auftritt.* Von unserem früheren Standpunkt aus konnten wir diese Frage verneinen (S. 90). Man braucht ja nur aus jeder der sämtlich von 0 verschiedenen Mengen m, n, p, ... je ein beliebiges Element $m_0, n_0, p_0, \ldots$ herauszugreifen und all diese Elemente zu einer Menge zusammenzufassen, die dann einen Komplex darstellt; die Menge aller Komplexe ist also von 0 verschieden. Vom jetzigen axiomatischen Standpunkte aus dürfen wir aber nicht so vorgehen. Die Elemente $m_0, n_0, p_0, \ldots$, die freilich alle in $\mathfrak{S}M$ vorkommen, sind ja ganz beliebig den zugehörigen Mengen entnommen, brauchen also keineswegs durch eine gemeinsame sinnvolle Eigenschaft charakterisiert zu sein, die *ihnen allein* unter allen Elementen von $\mathfrak{S}M$ zukäme. Das Axiom der Aussonderung gibt uns dann kein Recht, den Komplex $\{m_0, n_0, p_0, \ldots\}$ oder irgendeinen speziellen anderen (als Teilmenge von $\mathfrak{S}M$) zu bilden. Es kann freilich der Fall sein, daß eine gewisse, anderweitig definierte und axiomatisch gesicherte Menge gerade einen Komplex der gewünschten Art darstellt und somit dem Produkt $\mathfrak{P}M$ einen von 0 verschiedenen Umfang garantiert; eine *Sicherheit,* daß ein derartiger Fall eintritt, daß also Komplexe überhaupt vorhanden sind, ist aber nicht zu erkennen. Es wäre so der paradoxe und mit der CANTORschen Mengenlehre in scharfem Widerstreit stehende Fall denkbar, daß ein Produkt aus lauter von 0 verschiedenen Mengen sich selbst auf die Nullmenge reduzierte. So unangenehm wirken sich, auch nach Aufstellung von Axiom V, die immer noch bestehenden Schranken in der Bildung von Mengen aus! Um eben diesen Übelstand zu vermeiden, stellen wir mit Axiom VI einfach die Forderung auf, daß es Komplexe der angegebenen Art immer gebe, daß also *ein Produkt $\mathfrak{P}M$ der geschilderten Art nur dann gleich der Nullmenge sei, wenn diese unter den Elementen von M vorkommt.* Dies ist die schärfste und unmißverständlichste Fassung des Auswahlaxioms.

Axiom VI fordert im Gegensatz zu den bisherigen Existenzaxiomen nicht eine *bestimmte* Menge, sondern nur *irgendeine* Menge einer gewissen Art. Vom Standpunkte CANTORS aus ist es klar, daß es *verschiedene* Komplexe der gewünschten Art geben muß, außer wenn etwa jede der Mengen m, n, p, ... nur je ein einziges Element enthalten sollte.

Die beiden noch übrigen Axiome, die im einzelnen grundsätzlich weniger bedeutsam sind als die sechs vorstehenden, sollen erst später angeführt werden (S. 307ff.). Zuvor wollen wir die nach mancher Richtung besonders interessanten Axiome der Aussonderung und der Auswahl näher erörtern.

6. Verschärfung des Aussonderungsaxioms. Während ZERMELOS Axiomatik sonst die allgemeinen logischen Begriffe tunlichst zu vermeiden sucht (und so verfahren *muß*, entsprechend dem allgemeinen Charakter der axiomatischen Methode und im besonderen zur Vermeidung der in den Antinomien liegenden, nach der Logik hinweisenden Gefahren), tritt im A. d. Aussonderung ein Begriff auf, der mathematisch nicht scharf umgrenzt ist und eine neue Quelle der Beunruhigung werden könnte: der Begriff einer für die Elemente von m „sinnvollen" Eigenschaft. So einfach und unzweideutig dieser Eigenschaftsbegriff, der übrigens noch von der Menge m abhängt, zunächst auch scheint, so verlangt er doch, wie die „epistemologischen Antinomien" (S. 214 ff.) genügend lehren, nach einer schärferen Bestimmung, um derentwillen auch eine abstrakte Sonderbetrachtung nicht gescheut werden darf. Mit dieser Forderung größerer Schärfe ist nicht etwa an die intuitionistische Anschauung gedacht, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten allgemein ablehnt; vielmehr kann auch für den gewöhnlichen, gegenteiligen Standpunkt der Begriff einer solchen Eigenschaft schlechthin bedenklich sein. *Eine scharfe Umgrenzung jenes Eigenschaftsbegriffs muß als ein entscheidender Punkt der Axiomatik angesehen werden*[1]. (Es wird sich indes empfehlen, bei der erstmaligen Lektüre die folgenden kleingedruckten, ziemlich schwierigen Absätze zu überschlagen.)

ZERMELO hat den in Frage stehenden Begriff folgendermaßen gekennzeichnet ([3], S. 263): Eine Frage oder Aussage (Eigenschaft) $\mathfrak{E}$ heißt *definit* für die Elemente der Menge m, wenn für jedes einzelne Element x von m die Grundbeziehungen der Axiomatik vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, ob $\mathfrak{E}$ für x gilt oder nicht. Er fügt hinzu: „So ist die Frage, ob $a \varepsilon b$ ist oder nicht, immer definit, ebenso die Frage, ob m Teilmenge von n ist oder nicht." Das Axiom der Aussonderung fordert hiernach, wenn $\mathfrak{E}$ eine für alle Elemente der Menge m definite Aussage ist, die Existenz einer Teilmenge $m_{\mathfrak{E}}$ von m, welche die Elemente von m enthält, für die $\mathfrak{E}$ zutrifft.

Diese Umgrenzung, ebenso wie auch die nachstehend anzuführende, steht vor allem der intuitionistischen Auffassung entgegen. Das entspricht dem Ziel der ZERMELOschen Axiomatik, die ja CANTORS Gebäude in seinen wesentlichen Teilen erhalten und nur fester begründen will. Dagegen wird man die Art, wie die Entscheidung über die Gültigkeit einer Aussage den Grundrelationen „vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze" überantwortet wird, noch nicht als hinreichend scharf und von den Unsicherheiten der Logik unabhängig ansehen können. CANTORS Kriterium des „internen Bestimmtseins" (S. 14) ist hier merklich verschärft, bedarf aber doch einer weiteren, *rein mathematischen* Umgrenzung, um unseren Ansprüchen auf Strenge und Sicherheit voll zu genügen.

Die im folgenden zu schildernde Umgrenzung, die diese Anforderungen zu erfüllen bestrebt ist, stützt sich auf einen durch *Definition* (also nicht etwa als neuer Grundbegriff der Axiomatik) eingeführten „Funktionsbegriff". Es wird

[1] Das Unbefriedigende der ZERMELOschen Umgrenzung jenes Eigenschaftsbegriffs hat z. B. auch für WEYL einen Hauptanstoß zu seiner (im § 14 besprochenen) Revolutionierung der Mathematik gegeben (vgl. WEYL [1] sowie [2], S. 36).

nämlich folgende Erklärung gegeben, in der x eine Unbestimmte (unbestimmte Menge) bedeutet, die übrigens bei jeder wirklichen Verwendung einer Funktion jeweils die Elemente einer gewissen Menge zu durchlaufen hat:

Definition 4a. *Als Funktion von x gilt jede feste (konstante) Menge, die Menge x selbst, die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}x$, die Potenzmenge $\mathfrak{U}x$; ferner, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Funktionen von x sind, das Paar $\{\varphi(x), \psi(x)\}$*[1] *und die Funktion einer Funktion $\varphi(\psi(x))$.*

Schon hier sei bemerkt, wie man entsprechende Funktionen von zwei (und auf induktivem Weg von beliebig vielen) Argumenten erhält: falls man eine der konstanten Mengen, die bei der Bildung der Funktion $\varphi(x)$ herangezogen werden, unbestimmt bzw. veränderlich läßt und mit y bezeichnet — m. a. W. falls in $\varphi(x)$ eine Funktion von y eingeht —, so kann man $\varphi(x)$ als Funktion $\Phi(x, y)$ zweier Argumente x und y ansehen.

Auf Grund der alsbald noch zu ergänzenden Definition 4a formulieren wir das Axiom der Aussonderung folgendermaßen:

Axiom V′. *Gegeben sei eine Menge m und zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$; dann existiert eine Teilmenge $m_{\mathfrak{E}}$ von m, die alle diejenigen Elemente x von m (und nur sie) als Elemente enthält, für die $\varphi(x)\,\varepsilon\,\psi(x)$ ist,* d. h. *für die die Menge $\varphi(x)$ Element der Menge $\psi(x)$ ist.* Die Menge $m_{\mathfrak{E}}$, die hierdurch nach Axiom I eindeutig bestimmt ist, wird gemäß ihrer Definition auch als $m_{\varphi\varepsilon\psi}$ bezeichnet. Genau Entsprechendes soll gelten, wenn statt der Grundrelation ε ihre Negation $\bar{\varepsilon}$ eingesetzt wird; dann erhält man also die Teilmenge derjenigen Elemente x von m, für die $\varphi(x)$ *nicht* Element von $\psi(x)$ ist.

Erst jetzt wird, um eine umständliche Wiederholung zu vermeiden, die Erklärung des Funktionsbegriffs vervollständigt:

Definition 4b. *Die nach Axiom V′ existierende Menge $m_{\varphi\varepsilon\psi}$ heißt eine Funktion der unbestimmten Menge y, falls in die Bestimmungsstücke m, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Funktionen von y eingehen (abgesehen von der Hilfsveränderlichen x), m. a. W. falls φ und ψ Funktionen der Hilfsveränderlichen x und einer eigentlichen Veränderlichen oder Unbestimmten y sind.*

Diese abstrakte Erörterung wird durch einige einfache Beispiele verständlicher werden:

Beispiel 1. m und n seien gegebene Mengen. Dann existiert nach A. V′ die Menge der Elemente, die sowohl in m wie in n vorkommen. Das ist nämlich die Menge derjenigen Elemente x von m, für die $x\,\varepsilon\,n$ — oder ausführlicher, wenn $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = n$ gesetzt wird: derjenigen Elemente x von m, für die $\varphi(x)\,\varepsilon\,\psi(x)$ ist. Man nennt diese Menge, die nach Axiom V′ mit $m_{x\varepsilon n}$ zu bezeichnen ist, bekanntlich den *Durchschnitt* $\mathfrak{D}\{m, n\}$ der Mengen m und n (vgl. S. 71f.).

Beispiel 2. m sei eine beliebige Menge und x durchlaufe die Elemente von m. Setzen wir $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = m$ und wählen wir jetzt die Relation $\bar{\varepsilon}$ statt ε, so erhalten wir nach Axiom V′ die Teilmenge $m_{x\bar{\varepsilon}m}$, d. h. die Menge derjenigen Elemente x von m, die *nicht* Elemente von m sind. Da kein solches Element x von m existieren kann, so enthält die Menge $m_{x\bar{\varepsilon}m}$ überhaupt kein Element. Hierdurch ist die Menge nach dem A. d. Bestimmtheit völlig festgelegt; sie wird wie gewöhnlich die *Nullmenge* genannt und mit 0 bezeichnet. Nach Definition 1 ist (wie früher S. 21) die Nullmenge *Teilmenge jeder Menge*; ferner ist offenbar die Potenzmenge $\mathfrak{U}0 = \{0\}$, d. h. sie enthält 0 als einziges Element. — Man erhält übrigens die Nullmenge auch auf dem Weg des vorigen Beispiels, falls die dortigen Mengen m und n elementefremd sind.

---

[1] Genau genommen kann man noch die Verschiedenheit von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ voraussetzen, was sich aber nachträglich als bedeutungslos erweisen würde (vgl. Beispiel 3 und S. 312).

Beispiel 3. a sei eine von 0 verschiedene Menge. Nach dem A. d. Paarung existiert das Paar $m = \{a, 0\}$; setzen wir $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = \{0\}$ (d. h. $= \mathfrak{U}0$) und wählen wir wieder die Relation $\bar{\varepsilon}$, so existiert nach A. V′ die Menge *der* Elemente x von m, die nicht in $\{0\}$ enthalten sind. Diese Menge enthält nur das Element a und ist daher mit $\{a\}$ zu bezeichnen. — Sollte a nicht von 0 verschieden sein, so ist die Existenz von $\{a\} = \{0\}$ schon durch Axiom IV gesichert.

Beispiel 4. Es werde auch noch die Bildung und Benutzung von Funktionen der in Definition 4b geschilderten Art durch ein möglichst einfaches Beispiel illustriert, das freilich schärfere Aufmerksamkeit erfordert. Gegeben sei eine Menge $M = \{m, n, p, \ldots\}$; es soll gezeigt werden, daß der Durchschnitt $\mathfrak{D}M$ existiert, d. h. die Menge, welche die *allen Elementen von M gemeinsamen* Elemente umfaßt (vgl. S. 72). Als Werte von y seien die Elemente eines beliebigen Elements von M, etwa die von m, zugelassen. Wir bilden gemäß A. V′ die Teilmenge Y von M, die diejenigen Elemente x von M (d. h. diejenigen der Mengen $m, n, p, \ldots$) umfaßt, in denen y vorkommt; es ist also $Y = M_{y \varepsilon x}$[1]. Y ist, sobald für y ein bestimmtes Element von m gewählt wird, eine feste Menge; solange y veränderlich bleibt, hängt Y von y ab und ist nach Definition 4b eine — etwa mit $\chi(y)$ zu bezeichnende — Funktion von y (nicht etwa von x, da x nur während der Bildung von Y als scheinbare Veränderliche — vgl. S. 258 — eingeht, um nach erfolgtem Bildungsprozeß herausgefallen zu sein). Wir betrachten weiter die Teilmenge $m_{\mathfrak{S}}$ von m, die diejenigen Elemente y von m enthält, für die $Y = M$, d. h. $\chi(y)\, \varepsilon \{M\}$ ist[2], m. a. W. die Menge $m_{Y = M}$, wo y die die Menge m durchlaufende Veränderliche bezeichnet. Diese Menge läßt sich ausführlicher so charakterisieren: sie umfaßt die Elemente y von m, für die die Menge Y der das Element y enthaltenden Elemente von M zusammenfällt mit der Gesamtmenge M; oder kürzer: sie umfaßt die Elemente y von m, die gleichzeitig in *allen* Elementen $m, n, p, \ldots$ von M vorkommen. Das ist aber gerade der Durchschnitt $\mathfrak{D}M$.

Es könnte scheinen, als liege eine unzulässige zirkelhafte Verflechtung darin, daß in Axiom V′ der Funktionsbegriff, in der Definition des Funktionsbegriffs aber (nämlich im Teile b) das Axiom V′ verwendet wird. Das angewandte Verfahren ist indes einwandfrei. Die Festsetzung in Definition 4a, daß eine Funktion einer Funktion von x wiederum als Funktion von x zu gelten hat, enthält nämlich ein induktives Moment: es wird hiermit zwecks Bildung einer Funktion eine *beliebig* (*endlich*) *oft* wiederholte Anwendung der in den Axionen II—V gekennzeichneten Elementarprozesse gestattet. Da also auch der Prozeß des Axioms V′ nur endlich oft ausgeführt werden kann, so vollzieht sich die Anwendung von Axiom V′ und Definition 4b von selbst abwechselnd der Reihe nach. Dies wird so recht augenscheinlich, wenn man für die Funktionen eine Stufenanzahl einführt, je nachdem wie oft Definition 4b *hintereinander* angewandt worden ist. Danach kommt Funktionen, die *ohne* Anwendung von Definition 4b gebildet sind, die Stufe Null zu. Die mittels Funktionen der Stufe Null gemäß Axiom V′ gebildeten Aussonderungsmengen stellen, sobald eine der in sie eingehenden Konstanten unbestimmt gelassen (gleich y gesetzt) wird, Funktionen von der Stufe 1 dar; so ist z. B. die im Beispiel 4 benutzte Funktion $Y = \chi(y)$ von der Stufe 1.

---

[1] Bei systematischer Verwendung dieser Schreibweise muß man diejenige (scheinbare) Veränderliche, die bei der Aussonderung die sämtlichen Elemente der Ausgangsmenge (hier M) zu durchlaufen hat, durch besondere Schreibweise (z. B. Fettdruck) auszeichnen gegenüber der anderen, eigentlichen Veränderlichen (Unbestimmten), von der nach erfolgter Anwendung des Axioms V′ die entstandene Teilmenge abhängig bleibt (vgl. den Unterschied zwischen der Integrationsvariabeln und einem unter dem Integralzeichen vorkommenden Parameter).

[2] In dieser Weise läßt sich allgemein die Relation $\varphi(x) = \psi(x)$ auf die Relation $\varphi(x)\, \varepsilon \{\psi(x)\}$ zurückführen und dem Schema des Axioms V′ einordnen.

Bei Verwendung mindestens einer solchen Funktion (sowie evtl. von Funktionen der Stufe Null) entsteht gemäß Axiom V′ nach Einführung einer Unbestimmten eine Funktion der Stufe 2; usw. Es gibt also nur Funktionen endlicher Stufe. Eine zirkelhafte Verflechtung ist hierin demnach nicht gelegen, vielmehr vollzieht sich in diesem Sinne die Funktionsbildung auf formell *konstruktivem* Wege.

In einer anderen Beziehung allerdings steckt in der Definition 4 und somit auch im Axiom V′ in der Tat ganz wesentlich ein gewissermaßen zirkelhaftes, nämlich ein *nicht-prädikatives* Moment (vgl. S. 248), das sich auch wohl auf keine Weise ausschalten läßt und das einem durchweg konstruktiven Vollzug der Teilmengenbildung den Weg versperrt. (Auch die Verwandlung der Definition 4 in Axiome — mit den Funktionen als neuen Grundrelationen — würde höchstens formal etwas ändern.) Hierin liegt übrigens keineswegs etwas Neues; vielmehr wird hier, wie auch sonst häufig, auf dem durch Axiom V′ beschrittenen Wege der begrifflichen Präzisierung erst offenbar, was in verhüllter Form schon im Begriff der „sinnvollen Eigenschaft" in Axiom V vorlag. Es ist nämlich durchaus nicht ausgeschlossen, daß z. B. bei der Bildung der Teilmenge $m_{\varphi \varepsilon \psi}$ von m unter den konstanten Mengen, mit Hilfe deren die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gebildet sind, auch die Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ oder eine ähnliche Menge vorkommt. Man hat dann den Fall, daß eine spezielle Teilmenge der Menge m erklärt wird mittels einer Definition, in die z. B. die Menge $\mathfrak{U}m$ *aller* Teilmengen von m eingeht, und zwar unter Umständen *notwendig* eingeht. Es liegt also ein Schulbeispiel einer nicht-prädikativen Definition vor (vgl. auch Beispiel 3 auf S. 249). Die *Konstruktion* einer solchen Teilmenge von m ist offenbar unmöglich, vorausgesetzt, daß keine andersartige Definition dafür angegeben werden kann; denn um die gewünschte Teilmenge zu bilden, bedarf man der Kenntnis der Menge $\mathfrak{U}m$, die aber ihrerseits die gewünschte Menge m zu ihren Elementen zählt. — Einfacher und grundsätzlich ganz entsprechend ist der häufig vorkommende Fall, daß bei Anwendung des A. d. Aussonderung die einzelnen Elemente x von m mit *allen* übrigen Elementen von m — d. h. mit m selbst — in Beziehung gesetzt werden müssen, wie das z. B. schon bei der Bestimmung von Extremwerten der Fall ist (vgl. Beispiel 1, S. 249).

Schließlich sei hervorgehoben, daß es Funktionen nicht bloß von éiner, sondern von beliebig (endlich) vielen Argumenten sind, die gemäß Definition 4 für den Aussonderungsprozeß in Betracht kommen; bei der Anwendung von Definition 4b liegen zunächst schon zwei Argumente vor, denen sich bei Fortsetzung des Verfahrens ersichtlich weitere zugesellen. Im eigentlichen Sinn „veränderlich", nämlich die Elemente einer gewissen Menge durchlaufend, ist aber hierbei stets nur éin Argument, während die anderen bei dem betreffenden Schritt des Verfahrens die Rolle von „Unbestimmten" spielen.

Für eine ausführliche, an Hand von Beispielen geschilderte Entwicklung der Gedankengänge dieser Nr. und für die Anwendungsfähigkeit des Axioms V′ sei auf die Darstellung in Fraenkel [10] (7. und 8. Vorlesung) verwiesen, wo auch die damit verknüpften grundsätzlichen Fragen eingehende Erörterung finden.

7. Das Auswahlaxiom als reines Existenzaxiom. Wir gehen nunmehr zur Besprechung des Axioms der Auswahl (S. 283), auch kurz *Auswahlprinzip* genannt, in sachlicher und historischer Hinsicht über. Vor allem sei bemerkt, daß wir für den Fall einer *endlichen* Menge M des Axioms gar nicht bedürfen, um die Existenz einer Auswahlmenge von M zu sichern. Enthält M z. B. nur zwei Elemente m und n, die nach der Voraussetzung des Axioms je mindestens éin Element, aber kein gemeinsames Element enthalten, und ist m_0 irgendein Element von m, n_0 irgendein Element

von n, so existiert (wegen $m_0 \neq n_0$) nach dem A. d. Paarung das Paar $\{m_0, n_0\}$, das schon eine Auswahlmenge von M darstellt. Entsprechend kann man im Fall irgendeiner gegebenen endlichen Menge M schließen, wie man durch sukzessive Verwendung der Axiome der Paarung und der Vereinigung erkennt (vgl. S. 280). Die Bedeutung des Axioms liegt also in der Forderung, die es für den Fall einer *unendlichen* Menge M aufstellt.

Zu einer Spezialisierung, d. h. zu einem schwächeren Axiom gelangt man offenbar, wenn man die Aussage des Axioms nur für *gewisse* unendliche Mengen M fordert, z. B. nur für abzählbare Mengen, oder aber nur unter gewissen Beschränkungen für die *Elemente* von M, z. B. nur für den Fall, daß diese Elemente sämtlich endlich oder sämtlich höchstens abzählbar sind. Durch Kombination beider Einschränkungsarten erhält man den einfachsten überhaupt denkbaren Spezialfall des Axioms, bei dem nämlich M eine abzählbare Menge von lauter endlichen Mengen (eventuell von lauter Paaren) bedeutet. Ob schon aus einem derartigen Spezialfall die allgemeine Aussage sich folgern läßt, ist eine noch nicht geklärte Frage, die aber vermutlich doch zu verneinen ist.

Was die *Voraussetzungen des Axioms* in seiner obigen Form betrifft, so ist die erste — daß in jedem Element von M wirklich Elemente vorkommen sollen — von Natur aus notwendig. Denn ist die Nullmenge (Beispiel 2 auf S. 286) ein Element von M, so kann es unmöglich eine Auswahlmenge S von M geben, da S mit der Nullmenge, die doch überhaupt kein Element enthält, kein Element gemein haben kann. Dagegen ist die zweite Voraussetzung des Auswahlaxioms, wonach die Elemente von M paarweise elementefremd sein sollen, keineswegs erforderlich. Läßt man diese Voraussetzung weg, so fordert das Axiom wesentlich mehr, nämlich die Existenz einer Auswahlmenge auch in den Fällen, wo M der zweiten Voraussetzung nicht genügt. In einer so weiten Fassung würde das Axiom weniger anschaulich sein. Denn so wie wir es ausgesprochen haben, verlangt es offenbar: wenn eine Menge (in unserem Fall $\mathfrak{S}M$) in paarweise elementefremde Teilmengen $m, n, p, \ldots$ „zerlegt" ist, so daß $\mathfrak{S}M = m + n + p + \ldots$, so gibt es eine Menge, die durch Zusammenfassung je eines beliebigen Elements aus jedem Summanden entsteht. Das ist eine anschaulich näherliegende und engere Behauptung, als wenn man dasselbe auch noch fordern wollte für den Fall, wo manche Summanden miteinander Elemente gemeinsam haben. Dagegen kann die letztere, allgemeinere Tatsache aus der engeren Aussage des Axioms (unter Benutzung der übrigen Axiome) nachträglich gefolgert werden (siehe S. 315).

Von besonderer Wichtigkeit ist es, sich den Charakter des Auswahlaxioms als eines reinen *Existenzaxioms* klarzumachen; in dieser Richtung sind nämlich vielerlei Mißverständnisse vorgekommen[1]. Das

[1] Vgl. z. B. J. König [5], S. 170f; Dingler [5], S. 88ff. Auch Poincarés Ansicht, wonach man selbst im Fall einer *endlichen* Menge M unter Umständen des Auswahlaxioms als eines besonderen Prinzips bedarf, erklärt sich aus einer nicht rein existentialen Auffassung des Axioms. Ebenso ist die hypothetische Rolle, die in den *Principia Mathematica* dem Auswahlaxiom zugewiesen wird, vielleicht doch von einer konstruktiven Vorstellung durchsetzt; im rein existentialen Sinn, dem nicht jede zulässige Menge als „angebbar" zu gelten braucht, könnte von Russells Standpunkt aus auch wohl dem Auswahlaxiom ein „tautologischer" Charakter zugebilligt werden. Vgl. Ramsey [1], S. 355.

Axiom behauptet keineswegs, es sei stets möglich, mit den (derzeitigen oder auch künftigen) Mitteln der Wissenschaft eine Auswahlmenge von M herzustellen, d. h. etwa eine Vorschrift anzugeben, vermittels deren aus jedem der Elemente von M ein *bestimmtes* Element ausgewählt wird, und dann die ausgewählten Elemente zu einer Menge zu vereinigen. Das Axiom behauptet, wie schon erwähnt, nichts über die *Konstruktion* einer Auswahlmenge, sondern lediglich die *Existenz* einer solchen; es besagt somit nur, daß die auf S. 283 definierte, jedenfalls vorhandene Teilmenge $U_{\mathfrak{C}}$ der Menge $U = \mathfrak{U}\mathfrak{S}M$ mindestens éin Element enthält, also nicht gerade auf die Nullmenge zusammenschrumpft; oder ausführlicher: *daß unter den verschiedenen Teilmengen von* $\mathfrak{S}M$ *sich auch solche befinden, die mit jedem Element von* M *je ein einziges Element gemein haben, gleichviel, ob man derartige Teilmengen durch irgendwelche Methoden auffinden kann oder nicht.* Zieht man es vor, von Funktionen zu sprechen, so lautet die Behauptung: es gibt mindestens éine Funktion $f(x)$, die für die Elemente von M definiert ist und die, sobald x eines dieser Elemente darstellt, als Funktionswert ein Element von x liefert — ohne Rücksicht darauf, ob eine derartige Funktion wirklich bestimmbar ist. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen beiden Auffassungen, dessen ungenügende Beachtung manche neuere Diskussionen unfruchtbar gestaltet hat, wird am deutlichsten an Hand einiger Beispiele hervortreten, die der Einfachheit halber nicht auf das Feld unseres Axiomensystems beschränkt werden.

Beispiel 1. $M = \{m\}$ enthalte éin von 0 verschiedenes Element m. In diesem Fall bedarf es nach S. 288 des Auswahlaxioms überhaupt nicht. Man mag es vielleicht in diesem Fall für selbstverständlich halten, daß eine Menge, die ein einziges Element von m und kein weiteres Element enthält, nicht nur existiert, sondern auch in jedem Fall angebbar ist. Nehmen wir, um uns den Sachverhalt anschaulicher zu machen, für m die Menge aller transzendenten Zahlen (die nicht nur in der CANTORschen Mengenlehre, sondern auch in unserer Axiomatik existiert)! Wir kennen heute gewisse transzendente Zahlen und können also eine Menge bilden, die eine einzige transzendente Zahl enthält. Lebten wir aber um ein Jahrhundert früher und wäre uns demgemäß weder eine transzendente Zahl noch überhaupt die Tatsache der Existenz transzendenter Zahlen bekannt, so könnten wir immerhin (und zwar ohne Auswahlaxiom) so schließen: m ist entweder $= 0$ oder von 0 verschieden, enthält dann also mindestens éin Element; ist m_0 ein beliebiges (wenn auch unbekanntes) Element von m, so existiert die Menge $\{m_0\}$; sie ist offenbar eine Auswahlmenge von $M = \{m\}$[1]. Die Existenz

[1] Ob man freilich ohne Heranziehung des Auswahlprinzips eine *nachweislich von 0 verschiedene* Menge angeben kann, in der man kein einzelnes Element hervorzuheben, d. h. von den übrigen Elementen zu unterscheiden vermöchte, er-

einer Auswahlmenge ist in diesem Fall (wie überhaupt für eine endliche Menge M) ohne das Auswahlaxiom beweisbar; die Leugnung ihrer Existenz würde besagen: es gibt keine Teilmenge von m, die mit m ein einziges Element gemein hat — und das wäre, da m jedenfalls Elemente enthalten sollte, offenbar im Widerspruch mit dem Resultat des Beispiels 3 auf S. 287. (Man vergleiche auch die multiplikative Fassung der Auswahlaussage [S. 284] in Verbindung mit Hilfssatz 2 von S. 313, der die Bildung des zu $\{m\}$ gehörigen Produkts — d. h. der Menge aller Mengen, die je éin Element von m enthalten — bequem gestattet.)

Trotzdem läge offenbar auch in diesem einfachsten Fall ein typisch nichtkonstruktives, über die Kreise der Intuitionisten hinaus anstößiges Verfahren darin, wenn man etwa das Nichtverschwinden von m dazu ausnutzen wollte, um mit einer speziellen Auswahlmenge $\{m_0\}$ zu operieren. Das ist indes nur *scheinbar* dann der Fall, wenn man den in allen Teilen der Mathematik sehr gebräuchlichen, freilich meist anders eingekleideten Gedankengang durchführt: „. . . also ist m von 0 verschieden. Es sei nun m_0 irgendein Element von m; dann . . ." In derartigen Fällen werden nämlich nur solche Eigenschaften von m_0 herangezogen, *die* m_0 *mit allen anderen Elementen von* m *teilt*, d. h. es wird in Wirklichkeit nur das Nichtverschwinden von m, nicht aber eine „Auswahl" eines Elements von m benutzt; im Laufe der Betrachtung fällt dann auch das benutzte Element m_0 wieder heraus. Nur wo der Gedankengang in der Behauptung endet, daß also ein m_0 oder ein durch m_0 bestimmtes Objekt vorhanden ist, liegt eine wirkliche Existentialaussage vor, die auf Grund des hier behandelten (endlichen, beweisbaren) Sonderfalls der Auswahl genau denselben Charakter trägt, wie es bei Anwendung des allgemeinen Auswahlaxioms auf unendliche Mengen der Fall ist.

Beispiel 2. Die Menge M in Axiom VI sei eine abzählbare Menge von Mengen *natürlicher Zahlen*, d. h. jedes ihrer abzählbar unendlichvielen Elemente $m_1, m_2, m_3, \ldots$ enthalte (endlichviele oder unendlichviele) natürliche Zahlen, und zwar der Voraussetzung gemäß derart, daß niemals die gleiche Zahl in mehreren der Mengen $m_1, m_2, \ldots$ vorkommt. (Es mag z. B. m_1 alle Primzahlen umfassen, m_2 alle als Produkt zweier, m_3 alle als Produkt dreier Primzahlen darstellbaren Zahlen usw.) Dann kann man wiederum ohne das Auswahlaxiom eine Auswahlmenge von M nicht nur als existierend nachweisen, sondern sogar ausdrücklich angeben. In jeder der Mengen $m_1, m_2, \ldots$ läßt sich nämlich einheitlich je ein Element eindeutig auszeichnen; z. B. gibt es ja in jeder Menge von natürlichen Zahlen eine *kleinste* natürliche Zahl, die als das ausgezeichnete Element definiert werden kann. Hat man so abzählbar unendlichviele Zahlen ausgezeichnet, so ist unter Verwendung des A. d.

---

scheint zum mindesten recht zweifelhaft. Mit der Menge aller (mittels eines gegebenen Bezugssystems) nicht „endlich darstellbaren" reellen Zahlen (HESSENBERG [3]; vgl. auch S. 214f.) wird man sich schwerlich befreunden.

Aussonderung leicht zu sehen, daß unter den Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ eine Menge S vorkommt, die all die ausgezeichneten natürlichen Zahlen und nur sie zu Elementen besitzt; die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ kann darin bestehen, die kleinste Zahl in einem Element von M zu sein[1]. S ist dann eine der gesuchten Auswahlmengen von M.

Beispiel 3. Ganz anders gestaltet sich die Sachlage, wenn wir unter M eine (unendliche) Menge von Mengen *reeller Zahlen* verstehen, wenn also in den Elementen von M beliebige reelle Zahlen auftreten können. Dann wird die Angabe einer Regel, die jedem Element von M eine darin vorkommende reelle Zahl zuordnet, im allgemeinen mit den derzeitigen Mitteln der Wissenschaft unmöglich sein; „im allgemeinen", das heißt nämlich, wenn nicht zufällig die Menge M und ihre Elemente so gebaut sind, daß ausnahmsweise ein geeignetes Gesetz angebbar ist. Dies steht in scharfem Gegensatz zum vorigen Beispiel, wo eine solche Regel für die Elemente von M leicht aufzustellen war, die Regel nämlich: jedem Element von M — d. i. stets eine Menge von natürlichen Zahlen — wird *die kleinste* der darin vorkommenden natürlichen Zahlen zugeordnet. Der Leser wird sich die ungeheure, bisher nicht überwundene Schwierigkeit der Angabe einer solchen Regel in unserem Fall einigermaßen anschaulich machen können, wenn von der (nicht wesentlichen, vgl. S. 289) Bedingung der Elementefremdheit der Elemente von M abgesehen wird, wenn also die Elemente von M *beliebige* Mengen reeller Zahlen sein dürfen. Dann kann und soll für M die *Menge aller Mengen von reellen Zahlen* genommen werden, d. h. die Potenzmenge $\mathfrak{U}N$, wo N die Menge aller reellen Zahlen (oder aller Punkte einer gegebenen Geraden) bedeutet, und zwar unter Ausschluß der (in $\mathfrak{U}N$ zunächst vorkommenden) Nullmenge. Um dann wie im vorigen Beispiel ein Gesetz für die Auswahl je eines Elementes aus den Elementen von M angeben zu können, hätte man eine Regel aufzustellen, durch die *in jeder Menge von reellen Zahlen eine dieser Zahlen eindeutig hervorgehoben wird.* Das scheint vielleicht auf den ersten Blick gar nicht so schwierig, um so mehr aber bei näherem Zusehen. In jeder solchen Menge etwa wieder die *kleinste* Zahl hervorzuheben, geht nicht an; denn in einer Menge reeller Zahlen braucht eine kleinste Zahl gar nicht vorzukommen, wie etwa die Menge *aller* reellen Zahlen zeigt oder auch die Menge *aller positiven* reellen Zahlen, in der doch gleichzeitig mit jeder in ihr enthaltenen Zahl z. B. auch die halb so

[1] Ähnlich ist übrigens die Sachlage bei jeder „abzählbaren" Menge M, sofern man diesen Ausdruck nicht im üblichen, sondern im streng intuitionistischen Sinne versteht. Für diesen ist nämlich eine tatsächliche Abzählung der Elemente $m, n, p, \ldots$ von M nicht wohl anders möglich, als daß aus jeder dieser Mengen je ein bestimmtes Element systematisch angegeben wird, und dann erscheint die Aussage des Auswahlprinzips wiederum beweisbar. Vgl. LUSIN [2], S. 81. Entsprechendes gilt für jede „effektiv wohlgeordnete" Menge.

große Zahl auftritt. Es nützt auch nichts, wenn man etwa mit einer gewissen reellen Zahl a beginnt und festsetzt: in jeder Menge, in der a vorkommt, soll a das ausgezeichnete Element sein. Von diesem Gedanken aus fortschreitend, könnte man etwa zu folgender Idee kommen: Man legt die auf S. 36 ff. angegebene Abzählung der algebraischen Zahlen zugrunde. In jeder Menge m reeller Zahlen, in der überhaupt algebraische Zahlen vorkommen, zeichnet man dann diejenige unter allen in m auftretenden algebraischen Zahlen aus, die in der erwähnten Abzählung am frühesten vorkommt; damit ist in jeder solchen Menge m ein bestimmtes Element eindeutig ausgewählt. Aber für die Mengen, die *ausschließlich transzendente Zahlen* enthalten, ist mit einer solchen Festsetzung gar nichts genützt; für sie kommt man in der Tat auf einem derartigen Weg nicht weiter.

Über diese etwas vagen Betrachtungen hinaus kann man in aller Schärfe zeigen, daß sich für unsere Menge $M = \mathfrak{U}N$ und ähnliche Mengen „gesetzmäßige" Regeln (nämlich durch — in einem näher bestimmbaren Sinn — „analytisch darstellbare" Funktionen) für die Auswahl ausgezeichneter Elemente überhaupt nicht angeben lassen; für die nähere Kennzeichnung und den Beweis dieser von LEBESGUE bemerkten Tatsache werde der mit der Theorie der Punktmengen vertraute Leser auf LEBESGUE [3] oder auch auf die Darstellung bei SCHOENFLIES [8], S. 177 ff., verwiesen.

Im allgemeinen Fall ist es also auf dem Wege des vorigen Beispiels sicher nicht möglich, die Existenz einer Teilmenge von $\mathfrak{S}M$, die den Charakter einer Auswahlmenge von M besäße, auf Grund des A. d. Aussonderung nachzuweisen. Ein anderer Weg zu diesem Ziele ist bis jetzt jedenfalls nicht gefunden und allgemeinhin in einem ganz bestimmten Sinne sogar *ausgeschlossen* (vgl. S. 345 f.). *Nur das Axiom der Auswahl gestattet uns also, zwar nicht eine solche Auswahlmenge zu konstruieren, wohl aber die Existenz einer solchen zu behaupten.* Dieser Charakter des Auswahlaxioms als eines reinen Existenzaxioms wird besonders anschaulich in negativer Fassung, wenn man es etwa so ausspricht: Die Annahme, daß unter den Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ gerade solche Teilmengen *fehlen*, die mit jedem Element von M ein einziges Element gemeinsam haben, wird ausgeschlossen — auch dann, wenn dieser Ausschluß nicht schon so möglich ist, daß derartige Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ direkt nach dem A. d. Aussonderung gebildet werden. Überhaupt wird man dem existentialen Charakter des Auswahlaxioms wohl am besten gerecht durch die folgende Formulierung, die selbst vom intuitionistischen Standpunkt aus annehmbar sein mag und andererseits den modernen Anschauungen HILBERTS entspricht: der Beweis eines mathematischen Satzes unter Mitbenutzung des Auswahlaxioms ist *eine Bekräftigung der Aussichtslosigkeit jedes Versuchs, das Gegenteil des betreffenden Satzes nachzuweisen.*

Schließlich sei hier noch auf eine von dem Gegensatz „Konstruktion—Existentialaussage" abweichende, aber ihm verwandte Unterscheidung aufmerksam gemacht, für die wiederum das Auswahlaxiom eine hervorragende Rolle spielt. Um einer Definition — innerhalb oder außerhalb der Mathematik — richtigen Wert zu geben, hat man vor allem die Existenz von Gegenständen oder Begriffen nachzuweisen, die unter die Definition fallen. Dies geschieht in der Regel durch Angabe eines *effektiven Beispiels*[1], das die Merkmale der Definition besitzt. Ein solches Beispiel muß nicht unter allen Umständen konstruktiv gegeben werden; der Nachweis mag sich etwa eines nicht-prädikativen Verfahrens bedienen (vgl S. 248f.), oder aber es wird durch einen reinen Existenzbeweis zunächst nur überhaupt das Vorhandensein *irgendwelcher* Objekte mit den gewünschten Merkmalen gezeigt, während man unabhängig davon findet, daß *höchstens éin* Objekt dieser Art denkbar ist. Auch in diesem Fall ist wie vorher ein einziger bestimmter Vertreter der definitionsgemäßen Kategorie, ein „Beispiel", festgelegt.

Es kommt indes auch vor, daß es zwar unmöglich wird, ein *bestimmtes* Beispiel mit den gewünschten Eigenschaften anzugeben, daß man aber *überhaupt irgendwelche* unter die Definition fallende Objekte als vorhanden nachweisen kann. Z. B. läßt sich aus den beiden Tatsachen, daß die Mächtigkeit des Kontinuums größer ist als $\aleph_0$ und daß das Kontinuum (nach dem Wohlordnungssatz) wohlordnungsfähig ist, unmittelbar folgern, daß das Kontinuum Teilmengen besitzen muß, deren Kardinalzahl dem zweitkleinsten Alef $\aleph_1$ gleich ist[2]. Man kann indes auf konstruktivem Weg, also namentlich ohne Benutzung des Auswahlaxioms, kein effektives Beispiel einer derartigen Teilmenge des Kontinuums angeben. Ferner folgt z. B. aus der Beziehung $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (S. 112; vgl. Aufgabe 8 auf S. 120), daß die Menge aller *abzählbaren* Teilmengen des Kontinuums dem Kontinuum selbst äquivalent ist, daß also Abbildungen zwischen beiden Mengen existieren; ein effektives Beispiel einer derartigen Abbildung läßt sich indes nach SIERPIŃSKI [1] (S. 145f.) nicht herstellen. Solche Beweise für die Existenz von Begriffen vorgeschriebener Art, die nicht die Angabe eines Beispiels gestatten, stützen sich in der Regel[3] entscheidend auf das Auswahlaxiom oder auf das analoge Schlußverfahren für den

[1] Für die Bedeutung dieses — in gleicher Art auf *Beweise* anwendbaren — Begriffs vgl. F. BERNSTEIN [4], § 4, namentlich aber SIERPIŃSKI [2] sowie KNASTER-KURATOWSKI [1] und LUSIN [1] und [2].

[2] Auf schärfer umrissenem Weg gehen HARDY [1] (vgl. [2] und HOBSON [1]) und HAUSDORFF [1 II] (S. 156) zur Ermittlung derartiger Teilmengen des Kontinuums vor; indes ergibt sich beim heutigen Stand der Wissenschaft auch hierbei kein effektives Beispiel.

[3] Vgl. SIERPIŃSKI [2]. Es gibt freilich auch andere Fälle, wo die rein existentiale Schlußweise des tertium non datur verantwortlich ist, wie z. B. in HILBERTS sogenanntem „theologischem" Nachweis eines endlichen Invariantensystems (siehe S. 227).

Fall einer endlichen Ausgangsmenge (vgl. S. 288 f.). In der Tat ist ja das Auswahlaxiom vorbildlich für diesen Fall: es behauptet, daß Teilmengen der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ mit der im Axiom ausgedrückten Eigenschaft existieren, ohne daß doch unter allen derartigen Teilmengen eine einzige ausgezeichnet würde. Begreiflicherweise werden Intuitionisten selbst gemäßigter Art Existenzbeweisen von diesem Typ ihren Wert absprechen und nur die Konstruktion bestimmter Beispiele im erstgenannten Sinne gelten lassen (vgl. z. B. LEBESGUE [4]); aber auch der Vertreter der entgegengesetzten Anschauung wird die Sonderbedeutung einer solchen Konstruktion nicht leugnen.

Eine Art Zwischenstellung zwischen den in den beiden letzten Absätzen erörterten Möglichkeiten nimmt der Fall ein, wo (ohne das Auswahlaxiom) die Herstellung eines wohlbestimmten Begriffs gelingt, aber sich erst mittels des Auswahlaxioms nachweisen läßt, daß dieser Begriff die Merkmale der fraglichen Definition besitzt und somit ein *Beispiel* darstellt. Dieser Fall zeigt, daß die Verwendung des Auswahlaxioms nicht etwa der Gewinnung eines effektiven Beispiels im Wege zu stehen braucht. So ist z. B. auf S. 249 f. (Beispiel 4) ohne Benutzung des Auswahlaxioms in der eindeutig bestimmten Menge $\mathbf{A}$ ein Beispiel einer wohlgeordneten Menge von größerer Kardinalzahl als $\mathfrak{c}$ hergestellt worden; daß $\mathbf{A}$ wirklich von dieser Art ist, wurde allerdings wesentlich mittels des Auswahlaxioms bewiesen, nämlich auf Grund des Vergleichbarkeitssatzes. Ebenso ergab sich dort (als Abschnitt von $\mathbf{A}$) eine wohlgeordnete Menge $\mathbf{A}_0$ von der Mächtigkeit des Kontinuums, wobei freilich diesmal schon in die *Definition* das Auswahlaxiom eingeht (in Form der wesentlich benutzten obigen Eigenschaft von $\mathbf{A}$); doch kann man es auch in diesem Fall so einrichten, daß das Auswahlaxiom nicht schon bei der Definition der Menge, sondern erst beim Nachweis ihrer charakteristischen Eigenschaft in die Erscheinung tritt (siehe SIERPIŃSKI [2], S. 117 f.).

8. Bedeutung und Geschichte des Auswahlaxioms. Der Leser, der diesen etwas langen und der Natur der Sache nach einigermaßen blutleeren Ausführungen über das *Wesen* des Auswahlaxioms gefolgt ist, wird nun je nach Veranlagung eine der folgenden die *Bedeutung* des Axioms betreffenden Fragen zu stellen geneigt sein: Ist denn die Behauptung des Auswahlaxioms nicht allzu selbstverständlich, um so eingehender Erörterung zu bedürfen, ist nicht die Annahme der *Nichtexistenz* einer Teilmenge vom Charakter einer Auswahlmenge absurd? Oder aber: Ist das Auswahlaxiom wirklich wichtig genug, um so breiten Raum zu beanspruchen; enthält es nicht eine nur sehr spezielle Aussage, deren wir in unseren Betrachtungen über Mengenlehre (mindestens in den ersten 11 Paragraphen) gar nicht bedurften und deren Diskussion bloß eine Detailfrage der Axiomatik der Mengenlehre ist, die in eine wissenschaftliche Monographie und nicht in ein Lehrbuch gehört? Die Ant-

worten auf diese Fragen sollen den Abschluß der Besprechung unseres Axioms bilden.

Zunächst zur zweiten Frage, die anscheinend noch mehr Berechtigung erhält durch die Tatsache, daß die wesentliche Behauptung des Auswahlaxioms zum erstenmal zu Beginn dieses Jahrhunderts ausgesprochen wurde (vgl. S. 302), zu einer Zeit also, da die Mengenlehre als eine umfangreiche und anerkannte Disziplin längst existierte! Die Antwort lautet: Lange vor seiner Formulierung ist das Auswahlaxiom stillschweigend vorausgesetzt worden, als eine selbstverständliche Tatsache, von deren Benutzung man sich gar keine Rechenschaft gab; an vielen Stellen auch schon der einfachsten und grundlegenden Gedankengänge der Mengenlehre und ihrer Anwendungen (z. B. der Theorie der reellen Funktionen) ist das Auswahlaxiom ein, wie es scheint, unentbehrliches Beweishilfsmittel; ja noch mehr: auch für die Lösung von Problemen auf den verschiedensten anderen Gebieten der Mathematik sind wir auf das Auswahlaxiom angewiesen und selbst die „reinste" mathematische Disziplin, die Arithmetik, macht hiervon keine Ausnahme[1]. Das Axiom muß also, wenn es nicht mittels anderer Axiome beweisbar ist (vgl. S. 345f.) und wenn man nicht die Mengenlehre durch Amputation vieler wichtigster Teile radikal einengen will, zu den Prinzipien der Mathematik gerechnet werden, die die Grundlage für die (aus ihnen deduktiv herzuleitenden) mathematischen Wissensgebiete bilden; es beruht nach HILBERT ([8], S. 152) auf „einem allgemein logischen Prinzip, das schon für die ersten Anfangsgründe des mathematischen Schließens notwendig und unentbehrlich ist" (vgl. S. 372).

Um die Sachlage selbständig übersehen zu können, wollen wir uns fragen, wo im Verlaufe unserer früheren Überlegungen wir das Auswahlaxiom stillschweigend oder ausdrücklich verwendet haben. Es mag genügen, auf vier charakteristische Stellen hierfür hinzuweisen.

Zunächst sei an das Rechnen mit Kardinalzahlen erinnert, z. B. an ihre Addition (S. 82ff.). Um die Summe gegebener Kardinalzahlen zu bilden, wählten wir zu jeder der gegebenen Kardinalzahlen je eine Menge m von dieser Kardinalzahl (und zwar so, daß die Mengen paar-

---

[1] Für eine umfassende Übersicht über solche Stellen innerhalb und außerhalb der Mengenlehre sowie für eine Erörterung der Frage, ob das Auswahlaxiom an diesen Stellen unvermeidlich ist, vergleiche man besonders SIERPIŃSKI [1]. Von den (dort nicht genannten) einschlägigen arithmetischen Problemen ist vor allem das der algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen eines Körpers oder Ringes (STEINITZ [1], S. 170 und 286f.; KRULL [1], S. 110ff.) zu nennen; man vergleiche ferner ARTIN-SCHREIER [1], BAER [1] und [2], KAMKE [2], NOETHER [1] und [2], OSTROWSKI [1], PRÜFER [1], SOUSLIN [1], TAMBS LYCHE [1] und ZERMELO [6], Arbeiten, die meist in enger Beziehung stehen zur angeführten Methode von STEINITZ oder zu der von HAMEL [1] (gleichfalls mittels des Wohlordnungssatzes) ermöglichten Basisbildung. Gegenüber STEINITZ [1] vgl. auch v. NEUMANN [5].

weise elementefremd waren) und bildeten die Vereinigungsmenge all dieser Mengen; die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge wurde als die Summe der gegebenen Kardinalzahlen definiert. Diese Summe ist aber von der Wahl der einzelnen Mengen m (als Vertreterinnen der Kardinalzahlen) nur deshalb unabhängig, weil nach Satz 1 auf S. 82 bei verschiedenen Arten der Wahl jener Mengen stets die Vereinigungsmengen äquivalent, also von gleicher Kardinalzahl sind; dieser Satz macht somit die Addition von Kardinalzahlen erst möglich. (Entsprechendes gilt für die Multiplikation; siehe S. 91.) Beim Beweise jenes Satzes schließlich war entscheidend der Inbegriff von (im allgemeinen Fall unendlichvielen) einzelnen Abbildungen, nämlich je einer beliebigen Abbildung Φ_1, Φ_2 usw. zwischen je zwei äquivalenten Mengen M_1 und N_1, M_2 und N_2 usw. Wir haben also gleichzeitig jeweils aus der Menge[1] aller möglichen Abbildungen zwischen je zwei äquivalenten Mengen (M_1 und N_1, M_2 und N_2 usw.) je eine einzige Abbildung „auszuwählen" und den Inbegriff der gewählten Abbildungen zu bilden; dieser Inbegriff ist, genauer gesagt, eine Auswahlmenge der Menge, deren Elemente die Mengen aller Abbildungen zwischen den Paaren gegebener äquivalenter Mengen sind. Existierte keine solche Auswahlmenge, so wäre schon die Addition von Kardinalzahlen im allgemeinen unmöglich; *das Rechnen mit Kardinalzahlen und genau entsprechend das Rechnen mit Ordnungstypen und Ordnungszahlen* (S. 134ff.) *stützt sich also auf das Auswahlaxiom als wesentliche Grundlage.*

Ein zweites Beispiel betrifft einen Satz über die Multiplikation von Mengen, der schon bei der letzten Art, das Auswahlaxiom zu formulieren (S. 284), gebührend hervorgehoben worden ist. Ist M eine Menge, deren Elemente $m, n, p, \ldots$ alle auch ihrerseits Elemente enthalten und paarweise elementefremd sind, so hat man zur Bildung des Produktes $\mathfrak{P}M$ alle Komplexe (oder, was in diesem Fall infolge der Elementefremdheit dasselbe besagt, alle Mengen) aufzusuchen, die aus jeder der Mengen m, $n, p, \ldots$ je ein einziges Element enthalten, ohne aber sonstige Elemente zu umfassen. Die Menge all dieser Komplexe existiert nach der auf S. 282f. angestellten Betrachtung und ist eine Teilmenge von $U = \mathfrak{U}\mathfrak{S}M$. Damit ist aber noch nichts darüber entschieden, ob jenes Produkt überhaupt Elemente enthält oder sich etwa auf die Nullmenge reduziert, m. a. W. *ob es überhaupt Komplexe der angegebenen Art gibt.* Zur Bejahung der letzteren Frage verhalf uns auf S. 90 der Schluß: da in jeder der Mengen $m, n, p, \ldots$ Elemente vorkommen, so muß mindestens éin Komplex existieren, der aus jeder dieser Mengen je ein einziges Element enthält. Das ist nun gerade das (uns damals als selbstverständlich erscheinende) Auswahlaxiom. Dessen Ablehnung

[1] Die Menge aller möglichen Abbildungen zwischen zwei gegebenen äquivalenten Mengen erweist sich auf Grund unseres Axiomensystems als existierend; vgl. S. 314f.

würde also besagen: Ein Produkt von Mengen, die sämtlich Elemente enthalten, kann dennoch die Nullmenge sein, und zwar müssen wir mit dieser Eventualität so lange rechnen, als es uns nicht gelingt, einen Komplex *anzugeben*, der aus jedem Faktor je ein einziges Element enthält.

Als drittes Beispiel ziehen wir eine Bemerkung heran, die ganz im Anfang unseres Aufbaus der Cantorschen Mengenlehre (§ 3) zu den Begriffen „endliche und unendliche Menge" gemacht worden ist. Wir lernten einerseits die endliche Menge im „naiven" Sinn als eine Menge von n Elementen kennen, wo n irgendeine natürliche Zahl (einschließlich 0) bezeichnet, und die unendliche Menge als ihr Gegenbild, d. h. als nicht-endlich in diesem Sinn; andererseits definierten wir mit Dedekind die unendliche Menge als eine solche, die einer eigentlichen Teilmenge von sich äquivalent ist, und die endliche als nicht-unendlich gemäß dieser Definition. Im Anschluß an Russell kann man endliche Mengen im erstgenannten Sinn (in Rücksicht auf den innigen Zusammenhang, der zwischen dem Begriff der natürlichen Zahl und der vollständigen Induktion besteht, siehe S. 181) kurz als *induktive* Mengen und ihre Kardinalzahlen als induktive Zahlen bezeichnen, während für eine Menge, die einer eigentlichen Teilmenge von sich äquivalent ist, bzw. für ihre Kardinalzahl der Ausdruck *reflexive* Menge bzw. Zahl gebraucht wird. Auf S. 25f. wurde bewiesen, daß beide Definitionen im Ergebnis übereinstimmen, d. h. daß eine induktive Menge nicht-reflexiv ist *und umgekehrt*.

Dieser Beweis aber stützt sich wiederum auf das Auswahlaxiom als wesentliches Hilfsmittel[1]. Zwar wird ohne dieses in der Elementarmathematik gezeigt (vgl. S. 22), daß eine induktive Menge niemals reflexiv sein kann; durch bloße logische Umkehrung folgt, daß eine reflexive Menge nicht induktiv ist, d. h. nicht endlich im naiven Sinn. Um aber die umgekehrte Tatsache zu zeigen, daß nämlich eine nicht-induktive Menge M stets reflexiv (und somit eine nicht-reflexive Menge auch immer induktiv) ist, griffen wir auf S. 26 aus M ein beliebiges Element m_1, dann aus der Restmenge $M - \{m_1\}$ ein beliebiges Element m_2 usw. heraus, allgemein aus $M - \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ ein beliebiges darin noch vorkommendes Element m_{k+1}; erst mittels der so gebildeten abzählbaren Teilmenge $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ von M ließ sich der Beweis zu Ende führen. Wir hatten also aus unendlichvielen Teilmengen von M je ein Element auszuwählen und diese ausgezeichneten Elemente zu einer neuen Menge zu vereinigen; diese kann in einem — gegenüber der Formulierung

---

[1] Für andere vom Auswahlprinzip abhängige Gleichwertigkeiten zwischen verschiedenen Definitionen der Endlichkeit bzw. Unendlichkeit vgl. Tarski [4], S. 94f., sowie nachstehend S. 320f. Zu dem ganzen Gegenstand siehe ferner Wrinch [1] sowie Chwistek [3]. Überraschend ist auch folgendes (vgl. Lindenbaum-Tarski [1]): Daß für irgendwelche Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ aus $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} > \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ stets $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ folgt, ist ohne Auswahlprinzip beweisbar; dagegen ist die Aussage, daß $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ stets $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ nach sich zieht, dem Auswahlprinzip gleichwertig.

in Axiom VI etwas erweiterten — Sinn, auf den wir im nächsten Beispiel ausführlicher eingehen, als eine Auswahlmenge bezeichnet werden. Übrigens wird das nämliche Auswahlverfahren beim Beweise des Satzes verwandt, wonach jede unendliche Menge abzählbare Teilmengen besitzt (S. 41), m. a. W. $\aleph_0$ die kleinste unendliche Kardinalzahl ist.

Wenn man vom Auswahlprinzip absehen will, muß man also neben den endlichen (induktiven) und den unendlichen (reflexiven) Mengen und Kardinalzahlen noch eine dritte Sorte von Mengen und Zahlen unterscheiden, die nicht-induktiven und gleichzeitig nicht-reflexiven Mengen und Kardinalzahlen. Umgekehrt würde ein Nachweis der — offenbar höchst plausiblen — *Unmöglichkeit* einer so seltsamen Zahlenart, die ein Zwischenglied zwischen endlichen und unendlichen Zahlen darstellte, gleichzeitig das Auswahlprinzip (oder doch wenigstens einen wichtigen Spezialfall davon) als beweisbaren Satz erscheinen lassen; ein solcher Nachweis ist indes kaum zu erwarten (vgl. S. 345). Jedenfalls hängt also die übliche reinliche Scheidung zwischen endlichen und unendlichen Kardinalzahlen und damit die Eigenschaft von $\aleph_0$, die kleinste unendliche Kardinalzahl darzustellen, wesentlich von der Gültigkeit des Auswahlprinzips ab.

Das letzte Beispiel behandle den Platz, wo das A. d. Auswahl am deutlichsten in Erscheinung trat und auch historisch zum erstenmal ausdrücklich formuliert wurde: den *Beweis des Wohlordnungssatzes* (vgl. ZERMELO [1] und [2]). Der Nerv des Beweises für die Wohlordnungsfähigkeit einer beliebigen Menge M ist in beiden Beweisen (vgl. S. 197 ff. und 206) die Zugrundelegung einer Auswahl ausgezeichneter Elemente in sämtlichen (von 0 verschiedenen) Teilmengen von M; d. h. die Zugrundelegung einer „Auswahlmenge" von $\mathfrak{U}M - \{0\}$, wenn dieser Ausdruck ähnlich wie im Auswahlaxiom, nur ohne die beschränkende Annahme der Elementefremdheit der Elemente verstanden wird, also im Sinne einer Zuordnung, die zu jeder von 0 verschiedenen Teilmenge von M ein bestimmtes Element daraus festlegt. Ohne diese Grundlage erscheint ein Beweis des Wohlordnungssatzes gar nicht denkbar; auch der Satz von der Vergleichbarkeit beliebiger Mengen oder Kardinalzahlen (S. 205) ruht demnach ganz und gar auf dem Fundament des Auswahlaxioms, wie dies auch direkt der Beweis von S. 206f. zeigt. Ja, noch mehr: *Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz sind gleichwertig* in dem Sinn, daß nicht nur (mittels der übrigen Axiome) dieser aus jenem, sondern erst recht umgekehrt jenes aus diesem folgt[1]. In der Tat: soll z. B. eine Auswahlmenge für die Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ einer beliebigen Menge M angegeben werden und wird eine beliebige Wohlordnung von M zu-

[1] Gewisse Kardinalzahlrelationen, die gleichfalls mit dem Auswahlaxiom gleichwertig sind, findet man bei TARSKI [3]; vgl. ferner LINDENBAUM-TARSKI [1], S. 312ff.

grunde gelegt und festgehalten, so kann man (wie in Beispiel 2 auf S. 291 f.) eine einfache Regel angeben, durch die in jedem Element von $\mathfrak{U}M$, d. h. in jeder Teilmenge von M (außer 0), ein bestimmtes Element ausgezeichnet wird. Durch die zugrunde gelegte Wohlordnung wird nämlich gleichzeitig mit M auch jede Teilmenge von M wohlgeordnet, so daß jede Teilmenge ein erstes Element besitzt. Man kann daher festsetzen: in jeder (wohlgeordneten) Teilmenge von M soll das erste Element als ausgezeichnetes ausgewählt werden. Hiermit ist eine Eigenschaft von der beim A. d. Aussonderung besprochenen Art gefunden, die zu jeder Teilmenge von M ein ausgezeichnetes Element eindeutig charakterisiert. Zu $\mathfrak{U}M$ und jeder Teilmenge hiervon existiert also (mindestens) eine Auswahlmenge, ohne daß man sich zu deren Sicherung auf das Auswahlaxiom zu berufen brauchte. Entsprechend kommt man in dem engeren, durch die Voraussetzung des Auswahlaxioms bezeichneten Fall zum Ziel, falls man von einer beliebigen Wohlordnung der Summe $\mathfrak{S}M$ ausgeht. Das Auswahlaxiom ist also auf Grund des Wohlordnungssatzes beweisbar, wie wir das nämliche auf S. 204 für die Vergleichbarkeit der Mengen feststellten. Schließlich ist, wenn man die Vergleichbarkeit der Mengen, d. h. den Satz von S. 205 voraussetzt, auch auf dieser Grundlage der Wohlordnungssatz und damit das Auswahlaxiom beweisbar, wie Hartogs [1] gezeigt hat; man entnimmt das Wesentliche seiner Beweisführung leicht dem Beispiel 4 auf S. 249 f. (vgl. auch S. 295). *Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Vergleichbarkeit der Mengen (oder Kardinalzahlen) sind also gleichwertige Prinzipien,* insofern als aus jedem von ihnen die beiden anderen (mittels der übrigen Axiome) deduktiv gefolgert werden können; es ist gleichgültig, welches von ihnen zu den Axiomen gerechnet wird, die beiden anderen erscheinen dann als beweisbare Sätze. Man wird naturgemäß unter jenen drei Prinzipien das Auswahlaxiom bevorzugen als das allgemeinste, vielleicht auch einleuchtendste von jenen Prinzipien, das überdies nicht bloß der Mengenlehre, sondern der Mathematik bzw. Logik überhaupt angehört (S. 372). Damit ist indes nichts über die praktische Seite der Aufgabe gesagt; vielmehr wird die wirkliche Angabe einer Auswahlmenge schon bei einer abzählbaren Ausgangsmenge in der Regel nicht leichter sein als die Herstellung einer Wohlordnung (vgl. z. B. Borel [2], S. 150).

Bei der Anwendung des Auswahlaxioms zur Begründung des Wohlordnungssatzes und der Mengenvergleichbarkeit zeigt sich besonders scharf und unbequem der rein existentiale, nicht konstruktive Charakter des Axioms. Es wird genügen, dies an dem wichtigsten und am meisten erörterten Beispiel auseinanderzusetzen, an der Frage der *Wohlordnung des Kontinuums* und dem *Kontinuumproblem.* Nimmt man nämlich für die im vorigen Absatz genannte Menge M das Kontinuum, also etwa die Menge aller reellen Zahlen, so folgt auf der

Grundlage des Auswahlaxioms, daß das Kontinuum wohlgeordnet werden kann und seine Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ unter den Alefs, den Kardinalzahlen wohlgeordneter Mengen, vorkommt (vgl. S. 205); es ist also $\mathfrak{c} = \aleph_n$, wo n eine (endliche oder unendliche) Ordnungszahl bezeichnet. Die Frage, *welche* Ordnungszahl hier für n zu setzen ist, *wo* unter den Alefs also die Mächtigkeit des Kontinuums vorkommt, stellt das schon mehrfach erwähnte Kontinuumproblem dar. CANTOR hat angenommen, daß $n = 1$, d. h. $\mathfrak{c} = \aleph_1$ sei, daß also $\mathfrak{c}$ die zweitkleinste unendliche Kardinalzahl darstelle und somit unmittelbar auf die Kardinalzahl $\mathfrak{a} = \aleph_0$ der abzählbaren Mengen nachfolge; sein vergebliches, dramatischer Wechselfälle nicht entbehrendes Ringen um diese Frage hat sein Leben auch über die spezifisch wissenschaftliche Sphäre hinaus tiefgehend beeinflußt (vgl. SCHOENFLIES [11], S. 100, und besonders [12], S. 16 ff.). Jahrzehntelange Versuche, CANTORS Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen, sind indes gescheitert; auch heute haben wir noch gar keinen begründeten Anhalt selbst nur über die Richtung, in der ein gangbarer Weg zur Lösung des Kontinuumproblems gefunden werden könnte. Wenn in der allerjüngsten Zeit von HILBERT ein Weg zum Beweis der CANTORschen Vermutung (oder vielmehr eigentlich nur zum Beweis ihrer *Verträglichkeit*[1] mit den Axiomen der Mengenlehre) vorgezeichnet worden ist (vgl. S. 375), so ist doch die Frage damit noch keineswegs erledigt, u. a. weil einige ausschlaggebende tiefliegende Hilfssätze noch nicht bewiesen sind und, wie zu vermuten gestattet sei, ihrem Beweis auch noch sehr große Schwierigkeiten in den Weg legen werden[2]. Wenn es überhaupt gelingen sollte, das Kontinuumproblem einer endgültigen Lösung zuzuführen, so werden dazu wohl neuartige Beweishilfsmittel oder irgendein Umdenken grundsätzlicher Art erforderlich sein, das z. B. zu einer ganz neuen Form der Fragestellung nötigen könnte.

Die Sprödigkeit des vorliegenden Gegenstandes hängt damit zusammen, daß zwar die *Existenz* einer Wohlordnung des Kontinuums aus dem A. d. Auswahl folgt, aber nicht das geringste über die Möglichkeit einer wirklichen *Herstellung* einer bestimmten Wohlordnung, geschweige denn über deren Art. Die Herstellung würde, wenn man dem Beweis des Wohlordnungssatzes folgen will, eine bestimmte Auswahl ausgezeichneter Elemente aus allen Teilmengen des Kontinuums voraussetzen; eine derartige Auswahl herzustellen, ist aber, wie in Beispiel 3 auf S. 292 f. betont wurde, bisher nicht gelungen und mit den üblichen gesetzmäßigen Funktionen überhaupt nicht möglich, obgleich die Existenz einer solchen Auswahl durch das Auswahlaxiom gefordert wird und gewiß auch dem Leser plausibel erscheint. Darin steckt durchaus kein Widerspruch; warum

---

[1] Es ist ja nämlich denkbar, daß CANTORS Vermutung *unabhängig* (S. 341) von den übrigen Axiomen, also unbeweisbar ist.

[2] Vgl. auch den (bei Abschluß des Druckes erscheinenden) Vortrag HILBERT [10].

soll man sich nicht das Bestehen von „Gesetzen“ denken können, die nicht vollständig formulierbar sind? Unsere Axiomatik sichert also die Wohlordnungsfähigkeit des Kontinuums und das Vorkommen seiner Kardinalzahl unter den Alefs, ohne jedoch zunächst eine nähere Bestimmung über beides zu gestatten oder auch nur die Existenz eines Verfahrens zum gewünschten Ziel behaupten zu wollen.

Es ist schließlich noch die erste der auf S. 295 aufgeworfenen Fragen zu beantworten, ob nicht das Auswahlaxiom ein sehr naheliegendes Prinzip von durchaus einleuchtendem und logisch zwingendem Charakter sei. Dieser Eindruck wird sich vielleicht sogar verstärkt haben angesichts der vorstehend aufgewiesenen Unentbehrlichkeit des Axioms für viele einfache Betrachtungen. Der Leser wird zu dieser Frage selbständig so oder so Stellung nehmen können, wenn er von der *Geschichte des Auswahlprinzips* und von den früher und heute gegen es erhobenen Einwänden Kenntnis nimmt. Hierbei können Auswahlprinzip und Wohlordnungssatz auf Grund ihrer soeben hervorgehobenen Gleichwertigkeit — die freilich nur für den axiomatischen Standpunkt, also namentlich ohne Rücksicht auf POINCARÉs Bedenken (S. 250), unbestritten gilt — offenbar gleichzeitig und wechselweise behandelt werden.

Wie die drei ersten der vorangehenden Beispiele zeigen, ist das Auswahlprinzip stillschweigend seit dem Anfangsstadium der Mengenlehre (im Grunde auch schon vorher in manchen Beweisen der Analysis) benutzt worden, übrigens außer von CANTOR auch von vielen anderen Forschern. An der Verwendung des Prinzips, wie es etwa bei CANTOR in den angeführten (und anderen) Fällen auftrat, hat niemand speziellen Anstoß genommen. Daß in derartigen Beweisen überhaupt ein besonderes Prinzip zur Verwendung kommt, dürfte zuerst BEPPO LEVI [1] 1902 ausgesprochen haben. Aber erst durch den weittragenden Gebrauch, den ZERMELO (auf Anregung von ERHARD SCHMIDT) bei seinem ersten Beweis des Wohlordnungssatzes vom Auswahlprinzip gemacht hat, ist die Aufmerksamkeit weiterer Kreise darauf gezogen worden. Die Folge war in den nächsten Jahren — so namentlich in dem auf ZERMELOs ersten Beweis nachfolgenden (60.) Band der Math. Annalen — eine wahre Flut kritischer Noten zu jenem Beweis, von denen einige eine mehr oder weniger ablehnende Haltung zum Auswahlprinzip einnahmen[1]. Die skeptische Haltung vieler Mathematiker gegenüber unserem Prinzip hat auch nach dem zweiten ZERMELOschen Beweis und

[1] Die Argumente gegen den Wohlordnungssatz gründen sich im übrigen zum Teil, in ihrer Art folgerichtig, auf die intuitionistische Anschauung oder wenigstens auf die Ablehnung der nicht-prädikativen Bildungen, zum Teil aber auf ungerechtfertigte, namentlich mit der Antinomie BURALI-FORTIs zusammenhängende Bedenken. Vgl. die scharfe und witzige Zurückweisung in ZERMELO [2], worauf auch wegen der Literaturangaben verwiesen werde.

nach der vielfachen Anwendung des Wohlordnungssatzes innerhalb und außerhalb der Mengenlehre zwar abgenommen, aber keineswegs aufgehört.

Soweit diese Bedenken sich — so z. B. bei den französischen Mengentheoretikern BAIRE, BOREL, LEBESGUE — auf einen mehr oder weniger intuitionistischen Standpunkt stützen[1], sind sie nur folgerichtig. Denn für den radikalen Intuitionisten hat ja die Behauptung der *Existenz* einer Auswahlmenge ohne die Angabe eines Verfahrens zu ihrer *Konstruktion* keinen Sinn; er wird demgemäß alle vom A. d. Auswahl abhängigen Teile der Mathematik grundsätzlich ablehnen, so insbesondere das allgemeine Rechnen mit Mächtigkeiten, und z. B. zwischen induktiven (endlichen) und nichtreflexiven (nichttransfiniten) Mengen bzw. Zahlen unterscheiden. Hingegen ist es für die nicht intuitionistisch gesinnten, großenteils selbst mengentheoretisch (im Sinne CANTORS) arbeitenden Gegner des Auswahlprinzips im Grunde weniger dieses Prinzip selbst als seine *Konsequenzen*, was zum Mißtrauen oder zur Ablehnung des Prinzips veranlaßte und veranlaßt. Die großen, heute noch unabsehbar scheinenden Schwierigkeiten, die sich der Wohlordnung des Kontinuums und der Lösung des Kontinuumproblems entgegenstellen, haben es nämlich vielen Mathematikern wahrscheinlich gemacht, daß das Kontinuum und um so mehr allgemeinere Mengen überhaupt nicht wohlordnungsfähig, die Mächtigkeiten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ usw. also keine Alefs seien; CANTORS entgegengesetzte Überzeugung, die auch durch das Scheitern aller Bemühungen nicht zu erschüttern war, hat bei manchen mengentheoretisch arbeitenden Forschern und noch mehr bei vielen der Mengenlehre nur aus der Ferne gegenüberstehenden Mathematikern keineswegs suggestiv gewirkt. Als nun dennoch ZERMELO in seinen scharfsinnigen, aber kurzen Noten die Wohlordnungsfähigkeit jeder Menge, also auch des Kontinuums, beweisen konnte, ohne jedoch ein Verfahren zur Durchführung der Wohlordnung und damit zur Bestimmung der zugehörigen Kardinalzahl anzugeben, da glaubte man vielfach, jene Beweise liefern zu viel und müßten einen Fehlschluß enthalten. Da aber die Deduktion der Beweise der Mehrzahl der Mathematiker unangreifbar schien, so blieb nichts übrig, als *die Grundlage der Beweise, nämlich das Auswahlprinzip, seiner allzu weittragenden Konsequenzen wegen mißtrauisch zu betrachten*; dazu schien man um so eher berechtigt zu sein, als ja das Auswahlprinzip unter den bekannten und ausdrücklich formulierten Prinzipien der klassischen Mathematik nicht vorkam.

Demgegenüber ist zu betonen, daß die angeführten Bedenken bei klarer Betonung des Unterschiedes zwischen Existenz (einer Auswahlmenge) und Angabe eines konstruktiven Verfahrens (zu einer Bestim-

---

[1] Man vergleiche namentlich Note IV von BOREL [2].

mung der auszuwählenden Elemente) nicht haltbar sein dürften. Nicht daß „wir“ das Kontinuum wohlordnen können, folgert der Beweis des Wohlordnungssatzes aus dem Auswahlprinzip, sondern nur daß eine Wohlordnung widerspruchsfrei denkbar ist. Daß aber z. B. ein Produkt von Mengen, die sämtlich wirklich Elemente enthalten, sich nicht auf die Nullmenge reduziert, dürfte vielen als anschauungsmäßig unzweifelhaft auch dann erscheinen, wenn die Angabe eines Elementes des Produkts unauflösbare Schwierigkeiten bereiten sollte. Dieses logische Prinzip hat wohl annähernd die gleiche Evidenz und Denknotwendigkeit, wie man sie manchen anderen, für die Grundlegung der Arithmetik, Mengenlehre oder Geometrie unentbehrlichen Axiomen zuzuerkennen pflegt[1]; ist es doch sogar von einem so weitgehend intuitionistisch gesinnten Mann wie POINCARÉ gebilligt worden. Mit dem gleichen Rechte also, mit dem man das Auswahlaxiom wegen der aus ihm ableitbaren Folgerungen verwirft, könnte man willkürlich andere fruchtbare Grundsätze ablehnen und so wichtige Teile der Mathematik künftig aus ihr verbannen; schließlich ist jedes andere, noch so folgenschwere und unentbehrliche mathematische Prinzip auch irgendwann *zum erstenmal* formuliert worden, und zwar in der Regel *nach* seiner stillschweigenden Verwendung. Man ist denn auch zum Auswahlprinzip in der gleichen Weise wie zu den anderen mathematischen Axiomen gelangt: indem man die Begriffe, Methoden und Beweise, die in der Mathematik sich vorfinden und deren ursprüngliche Entstehung auf vielfach intuitivem Weg nur psychologisch oder historisch, aber nicht logisch zu werten ist, nachträglich logisch analysierte und dabei eben jene Axiome und Prinzipien herausschälte. Auf solchem Wege kam die griechische Mathematik dazu, das Parallelenaxiom unter die Grundpfeiler des geometrischen Gebäudes aufzunehmen; so wenig man seit der Zeit, da die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und damit dessen rein axiomatisch-hypothetischer Charakter nachgewiesen wurde, die von ihm abhängigen Teile der Geometrie etwa beseitigte oder auf den weiteren Ausbau dieser „euklidischen“ Geometrie verzichtet hat, ebensowenig wäre ein solches Verfahren in der Mengenlehre bezüglich des Auswahlaxioms gerechtfertigt, mag auch dieses gleichfalls ein neues und mit den bisherigen Hilfsmitteln unbeweisbares Prinzip darstellen. Zu einer solchen aposteriorischen Begründung eines Axioms kann dann ein Hinweis auf die anschauliche oder logische Evidenz noch hinzutreten: entscheidend ist er nicht, weil eben gar manche Axiome so recht erst durch die Evidenz der von ihnen abhängigen *Folgerungen* ihr Gewicht bekommen; z. B. werden die meisten Geometer die Existenz nicht-kongruenter ähnlicher Figuren als weit einleuchtender betrachten als das Parallelenaxiom,

---

[1] Vgl. z. B. HADAMARDS in BOREL [2], S. 156ff., abgedruckten Brief.

auf das sich die Möglichkeit ähnlicher Figuren im üblichen Sinne gründet[1]. Wie man neben dieser nachträglichen und relativen Rechtfertigung mathematischer Prinzipien neuerdings auch den Weg einer absoluten Entscheidung über ihre Zulässigkeit oder Unzulässigkeit zu beschreiten versucht und was in dieser Richtung zum Auswahlprinzip zu bemerken ist, wird später (S. 371 ff.) noch kurz gestreift werden.

Wenn man hiernach, sofern man nicht den intuitionistischen Standpunkt einnehmen will, dem Auswahlaxiom die Gleichberechtigung mit anderen Prinzipien zuerkennen wird, so ist es doch von Interesse, seine Verwendung einzuschränken, d. h. möglichst viele Gedankengänge ohne Benutzung des Axioms durchzuführen. Man lernt so unterscheiden, welche Teile der Mengenlehre und der Mathematik überhaupt von den reinen Existenzprinzipien des Auswahlaxioms und des Wohlordnungssatzes abhängig sind und welche nicht[2], wie ja auch der Geometer seine Aufmerksamkeit z. B. der Frage widmet, welche Teile der Geometrie ohne das Parallelenaxiom behandelt werden können und somit in der euklidischen wie in den nichteuklidischen Geometrien gleichmäßig gültig sind. Ja, man kann sogar die Frage aufwerfen, wie die Analysis im allgemeinen und die Mengenlehre im besonderen sich gestalten, wenn man das Auswahlprinzip als *unzutreffend* und etwa eine ihm widersprechende Aussage als gültig ansieht; eine solche nicht-ZERMELOsche Mengenlehre würde in gewissem Sinn der nichteuklidischen Geometrie analog sein, freilich — wie überhaupt die vorangehenden Bemerkungen — entscheidend von der (beim Parallelenaxiom EUCLIDs bekanntlich geklärten) Frage der *Unabhängigkeit* des Auswahlprinzips (vgl. S. 345 f.) abhängen. Für die Gestalt, die die Theorie der Ordnungszahlen (zweite Zahlklasse) bei Zugrundelegung gewisser Formen einer Verneinung des Auswahlaxioms annimmt, sei auf CHURCH [1] verwiesen.

9. Unbedingtes Existenzaxiom und Axiome spezieller Art (Axiom des Unendlichen und Axiom der Ersetzung). Hiermit beenden wir die Darstellung der grundsätzlich wichtigsten unter den Axiomen, nämlich der Axiome der *allgemeinen Mengenlehre*. Es folgen noch einige Axiome spezielleren Charakters, in deren erstem allerdings

---

[1] Auch in der Philosophie spielt der nämliche Gedanke eine wesentliche Rolle, so z. B. in den Schulen von KANT und FRIES (vgl. z. B. DUBISLAV [3], S. 40). Man vergleiche auch etwa D'ALEMBERTS Ermunterung an seine Zeitgenossen, die sich der damals noch nicht hinlänglich geklärten Infinitesimalmethoden bedienten: „Allez en avant, et la foi vous viendra."

[2] Vgl. hierzu für Fragen der Mengenlehre namentlich LINDENBAUM-TARSKI [1] und TARSKI [7], ferner CIPOLLA [1] und (für die Theorie des LEBESGUEschen Integrals) TONELLI [1 I] (Kap. III und IV).

noch ein der allgemeinen Mengenlehre zugehöriger Bestandteil auftritt[1].

Vor allem *wissen wir bisher noch gar nicht, ob überhaupt Mengen existieren.* Mit Ausnahme des A. d. Bestimmtheit, das bloß den Begriff der Menge näher umreißt, stellen nämlich alle bisherigen Axiome *bedingte* Existenzforderungen dar von der Form: falls gewisse Mengen existieren, so existieren auch gewisse andere Mengen. Wenn es überhaupt keine Mengen gibt, so bleiben formal alle Axiome befriedigt. Es wird also in erster Linie noch durch ein weiteres, *unbedingtes* (*absolutes*) Existenzaxiom zu fordern sein, daß überhaupt *mindestens eine Menge existiert.* Daraus erst schöpfen die Axiome II—VI den Charakter wirklicher Existenzforderungen. Namentlich läßt sich dann gemäß den Beispielen 2 und 3 von S. 286f. (vgl. auch S. 312) die Existenz der Nullmenge 0, ferner der Mengen $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ usw. folgern. Übrigens sind diese Mengen untereinander verschieden; denn es enthält z. B. 0 überhaupt kein Element, $\{0\}$ dagegen das Element 0, usw. Durch die Axiome der Paarung, der Vereinigung und der Potenzmenge gelangt man weiterhin zu Mengen von beliebig vielen, aber immer nur *endlich*vielen Elementen, da namentlich auch die Potenzmenge einer endlichen Menge gemäß Satz 1 auf S. 107 sogar in der CANTORschen Mengenlehre stets endlich ist. Man erkennt übrigens leicht, daß man bei Beschränkung auf nur endliche Mengen die bisherigen Axiome gar nicht sämtlich nötig hätte, auf sie vielmehr großenteils verzichten könnte.

Dagegen geben die Axiome II—IV offenbar keine Handhabe, um von einer gegebenen endlichen Menge aus auf das Vorhandensein von Mengen mit unendlichvielen Elementen zu schließen, und daran wird nichts geändert durch Hinzunahme der Axiome der Aussonderung und der Auswahl, die zu gegebenen Mengen bloß in gewissem Sinn *beschränktere* sichern. Auch der Weg[2], auf dem DEDEKIND die Existenz einer unendlichen Menge zu sichern versucht hat ([2], § 5; vgl. auch schon BOLZANO [3], § 13), ist von unserem Standpunkt aus nicht brauchbar. DEDEKIND betrachtet die Menge S aller Gegenstände unseres Denkens und beweist auf folgende Weise, daß sie unendlich ist (im Sinne der Definition 3 von S. 24): Ist s ein Element von S, so ist der Gedanke „s kann gedacht werden" ebenfalls ein (von s verschiedenes) Element von S. Alle Gedanken der Form „s kann gedacht werden", wobei s ein beliebiges Element von S bedeutet, bilden daher eine Teilmenge S_0 von S, und zwar eine eigentliche Teilmenge; denn nicht jedes Element

[1] Diese Unterscheidung zwischen Prinzipien der allgemeinen Mengenlehre und solchen spezieller Art ist naturgemäß nur vom axiomatischen Standpunkt aus möglich, nicht aber dann, wenn man sich die Mengenlehre durchweg konstruktiv aufgebaut denkt.

[2] Vgl. auch die (schärfer umrissenen) Beispiele bei BECKER [2], S. 98ff., sowie SCHOLZ [2], Sp. 682f.

von S ist gerade ein Gedanke der besonderen Art: ein gewisser Gedanke kann gedacht werden. Endlich ist die eigentliche Teilmenge S_0 äquivalent der Menge S selbst; zwecks Abbildung beider Mengen aufeinander braucht man nämlich nur jedem Element s von S den Gedanken „s kann gedacht werden", der ein Element von S_0 ist, zuzuordnen und umgekehrt. S ist also nach der erwähnten Definition eine unendliche Menge. Es gibt demnach unendliche Mengen.

Dieser Beweis kann uns deshalb nicht befriedigen, weil die Menge S aller Gegenstände unseres Denkens auf Grund unserer Axiome gar nicht existiert (vgl. S. 322f.); ja noch mehr: die Menge S stellt offenbar eine paradoxe Menge von der in § 13, Nr. 2, betrachteten Art dar. DEDEKIND selbst hat diesen Mangel nach dem Aufkommen der Antinomien der Mengenlehre anerkannt. Die Existenz unendlicher Mengen muß also, da ein Beweis für sie mittels unserer Axiome nicht möglich ist, durch ein absolutes Existenzaxiom gefordert werden. Darin ist dann von selbst die Forderung eingeschlossen, daß überhaupt mindestens éine Menge existiert (vgl. den vorletzten Absatz). Es genügt übrigens, die Existenz einer *abzählbar* unendlichen Menge (z. B. der Menge der natürlichen Zahlen) zu fordern; die abzählbaren Mengen stellen ja jedenfalls sowohl mathematisch wie auch psychologisch den einfachsten Typ unendlicher Mengen dar. Vom axiomatischen Standpunkt aus, demzufolge alle benutzten Begriffe aus den Grundbegriffen der Axiomatik abzuleiten sind, darf natürlich weder der Begriff einer abzählbaren Menge noch der einer unendlichen Menge überhaupt vorausgesetzt werden. Die darin liegende Schwierigkeit ist leicht zu umgehen. Das für unseren Zweck allein wesentliche Merkmal der Menge der natürlichen Zahlen liegt nämlich darin, daß sie erstens eine „ausgezeichnete" Zahl (die Eins) aufweist und zweitens zu jeder natürlichen Zahl n auch die eindeutig bestimmte und von allen übrigen Zahlen verschiedene „nächstfolgende" Zahl $n+1$ enthält, womit übrigens keine Ordnungsvorstellung verbunden zu werden braucht. Analog können wir in der Mengenlehre als ausgezeichnete Menge die Nullmenge, als durch eine beliebige Menge m eindeutig bestimmt die Menge $\{m\}$ wählen. Das Axiom, das zwecks Sicherung spezieller, nämlich unendlicher Mengen an die Stelle der — noch der allgemeinen Mengenlehre zugehörigen — bloßen Postulierung *irgendeiner* Menge zu treten hat, besagt somit (vgl. ZERMELO [3]):

Axiom VII. *Es gibt mindestens eine Menge Z von folgenden beiden Eigenschaften:*

1. *falls die Nullmenge (d. h. eine Menge ohne Elemente) existiert, so ist die Nullmenge Element von Z;*

2. *ist m irgendein Element von Z, so ist auch $\{m\}$ (d. h. die Menge, die m und kein anderes Element enthält) ein Element von Z.* **(Axiom des Unendlichen.)**

Jede Menge Z von diesen Eigenschaften ist eine unendliche Menge (im naiven wie im DEDEKINDschen Sinn). Denn sie enthält als Elemente zunächst[1] die Nullmenge 0, dann (wegen der zweiten Eigenschaft) die davon verschiedene Menge $\{0\}$, weiter die Menge $\{\{0\}\}$, deren einziges Element die Menge $\{0\}$ ist, usw. Es läßt sich zeigen (ZERMELO [3], S. 267), daß jede solche Menge Z eine *kleinste* Teilmenge Z_0 mit den nämlichen beiden Eigenschaften enthält — d. h. eine Menge, welche Teilmenge *jeder* so beschaffenen Menge ist —, nämlich die Menge

$$Z_0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \ldots\}.$$

Das ist bis auf die Bezeichnungsweise die Menge aller natürlichen Zahlen; denn man kann ja die Nullmenge durch das Zeichen 1 bezeichnen, die Menge $\{0\}$ durch 2, $\{\{0\}\}$ durch 3 usw., und da hierbei nie wieder dieselbe Menge auftritt, werden immer neue Zeichen erforderlich. Das obige Axiom kommt also im wesentlichen hinaus auf die Forderung, daß eine abzählbar unendliche Menge existieren soll.

Ausgehend von einer hiermit gesicherten, zum mindesten abzählbar unendlichen Menge kann man nunmehr auch unendliche Mengen von höherer Mächtigkeit bilden, wesentlich auf Grund des A. d. Potenzmenge; dieses Axiom erlaubt die Benutzung des Diagonalverfahrens und sichert also Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums und von größeren Mächtigkeiten (vgl. S. 316). Indes reicht das Axiom des Unendlichen in Verbindung mit den übrigen sechs Axiomen noch nicht aus, um *alle* unendlichen Mengen eines sicher noch einwandfreien Gebietes der Mengenlehre zu sichern; zur Bildung sehr umfassender Mengen sind A. d. Potenzmenge und Diagonalverfahren noch nicht genügende Hilfsmittel. Bezeichnet man nämlich die Potenzmenge $\mathfrak{U}Z_0$ der eben eingeführten Menge Z_0 (also im wesentlichen das „Kontinuum") mit Z_1, ebenso $\mathfrak{U}Z_1$ mit Z_2, $\mathfrak{U}Z_2$ mit Z_3 usw., so läßt sich mittels unserer sieben Axiome z. B. die Existenz der abzählbaren Menge

$$M = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\}$$

nicht beweisen, also auch nicht die Existenz der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ usw. Damit bleiben, wie man leicht erkennt, Mengen von sehr großer Kardinalzahl aus unserer Axiomatik ausgeschlossen, nämlich Mengen, deren Kardinalzahl ein Alef mit transfinitem Index (also $\geqq \aleph_\omega$) ist (wenigstens wenn man hinsichtlich des Kontinuumproblems annimmt, daß $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ nicht alle Alefs mit endlichem Index übersteigt).

Um den Bereich der Mengenlehre nicht unnötig einzuengen, hat man also das Axiom des Unendlichen weiter auszudehnen. Man wird

[1] Die Nullmenge existiert nämlich, wie bemerkt, sofern nur überhaupt eine Menge existiert, d. h. schon auf Grund des Anfanges von Axiom VII. Ebenso wird durch dieses Axiom nicht etwa erst die Existenz von Mengen der Form $\{m\}$ *gefordert*, sondern diese ist von vornherein durch die Existenz von m *gesichert* (Beispiel 3 auf S. 287, sowie S. 312).

zunächst daran denken, in der ersten Eigenschaft von Axiom VII statt der Nullmenge eine beliebige schon als existierend erweisbare Menge zuzulassen und in der zweiten Eigenschaft an die Stelle der speziellen Operation, die in der Bildung von $\{m\}$ aus m besteht, eine beliebige Funktion von m zu setzen; dabei wäre der Funktionsbegriff im Sinne von S. 286 oder ein wenig erweitert zu nehmen. So wird z. B. die obige Menge M gesichert, wenn man in Axiom VII statt 0 die Menge Z_0, statt $\{m\}$ die Menge $\mathfrak{U}m$ einsetzt.

Indes ist für manche Zwecke auch ein derartiges Axiom noch nicht weittragend genug. In der Theorie der ungeordneten Mengen müßte man sich zwar zu speziellen Mengen von überaus großen Mächtigkeiten erheben, um über die Grenze des durch die bisherigen Axiome gesicherten Gebietes hinaus vorzudringen. Anders in der Theorie der geordneten — z. B. der wohlgeordneten — Mengen, wenn man diese allein auf unsere Grundbegriffe und Axiome aufbauen will, wie das im nächsten Paragraphen noch angedeutet werden soll. Zwar ist auch auf diesem Gebiet die *allgemeine* Theorie schon durch die Axiome I bis VI (bzw. VII) vollständig ermöglicht. Bei der Betrachtung *spezieller* geordneter Mengen und insbesondere bei der Axiomatisierung der speziellen Theorie der Ordnungszahlen und der transfiniten Induktion (S. 191) stößt man indes schon bald auf Hindernisse, die aus der für diese Zwecke noch allzu engen Begrenzung unseres Axiomensystems hervorgehen. Bei der Verfolgung derartiger besonderer Ziele — aber auch *nur* dann — benötigt man ein weiteres Axiom der folgenden Art:

Axiom VIII. *Ist m eine Menge und $\varphi(x)$ eine Funktion, so existiert auch die Menge, die aus m hervorgeht, falls jedes Element x von m durch die Menge $\varphi(x)$ ersetzt wird.* **(Axiom der Ersetzung.)**

Der hier eingehende Begriff der „Funktion" soll natürlich nicht etwa einen neuen undefinierten Grundbegriff unserer Axiomatik darstellen — das würde ja eine erhebliche und höchst unerwünschte Komplikation des Ganzen bedeuten —, sondern er ist im Sinne der Definition 4 als aus den bisherigen Grundbegriffen abgeleitet zu verstehen. Indes genügt für die hier in Betracht kommenden speziellen Zwecke der Umfang noch nicht, den die Definition 4 dem Funktionsbegriff verleiht; vielmehr würde bei dieser bisherigen Festsetzung sich die Aussage des Axioms VIII mittels der bisherigen Axiome sogar *beweisen* lassen, so daß ihre axiomatische Formulierung nichts Neues brächte und somit überflüssig wäre (v. Neumann [6]). Zu der für die erwähnten besonderen Zwecke nötigen Erweiterung des Funktionsbegriffs fügen wir daher den Teilen *a* und *b* der Definition 4 (S. 286) noch einen dritten Teil *c* zu: (Die nächsten drei Absätze sind nur für den Kenner bestimmt.)

Definition 4c. $\varphi_y(x)$ und $\psi_y(x)$ mögen wie in Definition 4b zwei Funktionen bedeuten, in die neben dem als Hilfsveränderliche dienenden Argument x noch eine Unbestimmte y eingeht (die bei der Anwendung — ganz wie bei der Anwendung von Definition 4b — die Elemente einer gewissen Menge zu durchlaufen hat). Existiert dann für jedes in Betracht zu ziehende y die (demgemäß von y abhängige) Menge $\Phi(y)$ derjenigen x, für die $\varphi_y(x)$ Element der Menge $\psi_y(x)$ ist, so gilt die Menge $\Phi(y)$ als eine Funktion von y.

Zur Illustration dieser sehr abstrakten Definition diene die Herleitung der auf S. 308 erörterten Menge $M = \{Z_0, \mathfrak{U}Z_0, \mathfrak{U}\mathfrak{U}Z_0, \ldots\}$, wobei es genügen wird den Weg zu skizzieren. Ist y eine beliebige der Mengen $\alpha_0 = \{0, Z_0\}$, $\alpha_1 = \{\{0\}, \mathfrak{U}Z_0\}$, $\alpha_2 = \{\{\{0\}\}, \mathfrak{U}\mathfrak{U}Z_0\}$ usw. und bezeichnet man jede Menge der Form $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ mit endlichem k als einen „α-Abschnitt", so kann man allein auf Grund der Definition 4a—b unschwer zwei Funktionen $\varphi_y(x)$ und $\psi_y(x)$

derart bestimmen, daß die Relation $\varphi_y(x) \varepsilon \psi_y(x)$ gleichbedeutend ist mit „der α-Abschnitt x ist der kleinste mit dem Element y, er ‚endet' also mit y"; namentlich zeigt sich, daß es zu gegebenem y höchstens einen einzigen derartigen α-Abschnitt x geben kann. Bei gegebenem y existiert die (von y abhängige) Menge $\Phi(y)$ derjenigen α-Abschnitte x, die der Relation $\varphi_y(x) \varepsilon \psi_y(x)$ genügen; sie ist nämlich gleich der Nullmenge oder enthält ein einziges Element. *Nach Definition 4c ist diese Menge $\Phi(y)$ als Funktion von y zu betrachten.* Offenbar ist $\mathfrak{S}\Phi(y) = \chi(y)$, falls von 0 verschieden, wiederum der kleinste, y enthaltende α-Abschnitt.

Mittels dieser Funktion $\chi(y)$ und des Ersetzungsaxioms VIII läßt sich nun die gewünschte Menge M leicht bilden. Man geht hierzu von der nach Axiom VII existierenden Menge $Z_0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\}$ aus und ersetzt jedes $x \varepsilon Z_0$ durch denjenigen α-Abschnitt $\omega(x)$, dessen ranghöchstes (letztes) Element ein Paar mit dem einen Bestandteil x ist; die Funktion $\omega(x)$ läßt sich aus $\chi(x)$ unschwer mittels Definition 4a—b herstellen. Dann ist, wie man sofort erkennt, M die Vereinigungsmenge der (nach Axiom VIII existierenden) Menge aller $\omega(x)$.

Ob schließlich mit den beiden speziellen Existenzaxiomen VII und VIII die Grenzen der Mengenlehre im mathematisch wünschenswerten Maße ausgedehnt sind, ist eine noch nicht völlig geklärte Frage. Man kann den Begriff gewisser (überaus umfassender) Mengen bilden, für die auch in der genetischen Mengenlehre CANTORS die Existenz noch nicht feststeht („reguläre Anfangszahlen mit Limeszahl-Index"; vgl. die tiefschürfenden Untersuchungen MAHLO [1] und [2] sowie z. B. HAUSDORFF [3], S. 131, und BAER [4]); zur Sicherung der Existenz derartiger Mengen, falls sie überhaupt widerspruchsfrei sind, bzw. zur Entscheidung der Frage nach ihrer Möglichkeit könnten vielleicht noch weitere spezielle Existenzaxiome benötigt werden (vgl. auch KURATOWSKI [4]). Indes liegen diese Probleme — und im Bereich der ungeordneten Mengen auch schon die mit Axiom VIII zusammenhängenden — in den entferntesten Regionen der theoretischen Wissenschaft und haben noch kaum eine Verbindung mit den durch die wissenschaftlichen Bedürfnisse der Gegenwart angeregten Fragen.

10. Historisches zum Axiomensystem. In den wesentlichsten Grundzügen stammt das vorstehende Axiomensystem von ZERMELO [3]. Außer der Grundrelation ε sind noch die Axiome der Vereinigung, der Potenzmenge, der Auswahl (III, IV, VI) sowie von den speziellen Axiomen das Axiom des Unendlichen (VII) aus jener bahnbrechenden Abhandlung übernommen, ferner das Axiom der Aussonderung in seiner erstangegebenen Form V (vgl. S. 285). Unter diesen Axiomen ist das einzige, das einen der CANTORschen Mengenlehre nicht bewußt gewordenen Prozeß enthält, nämlich das Auswahlaxiom, in einer weitergehenden Form (vgl. S. 299 und 315) schon 1904 von ZERMELO [1] ausgesprochen und benutzt worden; die speziellere, also weniger fordernde Form des Axioms VI, aus der sich die allgemeinere Aussage mittels der übrigen Axiome herleiten läßt, erscheint zuerst wohl bei RUSSELL [2] und ZERMELO [2].

Die wesentlicheren Abweichungen gegen ZERMELOS Axiomensystem bestehen — abgesehen von der nur formalen Vermeidung des ZERMELOschen „Bereiches" aller Mengen — in folgendem: Die Relation der Gleichheit wird bei ZERMELO durch eine von der Relation ε zunächst unabhängige inhaltliche Erklärung eingeführt, aus der sich dann die Aussage unseres Axioms I stillschweigend ergibt; demgemäß wird unsere

Definition 2 dort als *besonderes Axiom* aufgestellt (vgl. hierzu FRAENKEL [11]). Weiter werden bei ZERMELO außer Mengen noch andere „Dinge“ als existierend zugelassen, so daß der Begriff der *Menge* — im Gegensatz zu den Dingen, die keine Mengen sind — einer besonderen Erklärung mittels ε bedarf; bei dieser Auffassung ist die Umwandlung der Definition 2 in ein Axiom, in dem das Wort „Menge“ einen anderen, nicht so allgemeinen Sinn erhält, in der Tat gar nicht zu vermeiden. Statt des Axioms der Paarung tritt bei ZERMELO ein umfassenderes Axiom auf, das noch die (hier bewiesenen) Resultate der Beispiele 2 und 3 (S. 286f.) als *Forderungen* enthält. Als spezielles Existenzaxiom kommt bei ZERMELO nur unser Axiom VII vor. Wie oben bemerkt (S. 308; vgl. FRAENKEL [5], S. 230f.; SKOLEM [3], Nr. 4), reicht dieses Axiom zur Sicherung der rechtmäßigen und erforderlichen Mengen nicht aus; diesem Mangel hilft das Axiom der Ersetzung (VIII) ab (FRAENKEL [5] und [10], S. 114f., sowie VON NEUMANN [6]; SKOLEM a. a. O.; vgl. auch MIRIMANOFF [1], S. 49), das sich inzwischen an einer Reihe verschiedenartiger Probleme als fruchtbar und ausreichend bewährt hat (VON NEUMANN [1] und [6]; LINDENBAUM-TARSKI [1]).

All diese Abweichungen treten aber wohl zurück hinter der Einführung des Funktionsbegriffs und der dadurch ermöglichten Ersetzung des ZERMELOschen Aussonderungsaxioms V durch Axiom V′, das den allgemeinen Eigenschaftsbegriff aus dem Axiomensystem ausmerzt (FRAENKEL [6] und [9]); diese Fortbildung vollendet die rein mathematische Fassung der Axiomatik und ermöglicht — trotz der scheinbar engen Fassung des Funktionsbegriffs — gerade infolge der Ausschaltung einer überaus weitgehenden Berufung auf die allgemeine Logik erst eine volle Ausnutzung des Aussonderungsaxioms und damit auch die Lösung von bisher offengebliebenen Fragen, so z. B. die Durchführung der axiomatischen Theorie der (wohl)geordneten Mengen (S. 319) und den Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms (S. 346). Durch diese Ausschaltung des Eigenschaftsbegriffs werden die Teile der Logik, die noch als selbstverständliche Hilfsmittel des axiomatischen Aufbaus benutzt werden, sehr eingeengt und namentlich nach der Seite des Elementareren zu verschoben; das ist u. a. deshalb von Bedeutung, weil damit auch für den grundsätzlichen Anhänger der logischen Auffassung RUSSELLS die Heranziehung der unbequemen Typentheorie als sehr erheblich einschränkbar erscheinen wird. Auf die Möglichkeit einer wesentlich anderen Art, das Axiom der Aussonderung vom allgemeinen Eigenschaftsbegriff zu entlasten, hat SKOLEM ([3], Nr. 2) hingewiesen; dieser Weg macht, über den üblichen mathematischen Rahmen etwas hinausgehend, von den Grundoperationen der Logistik (vgl. S. 265) wesentlichen Gebrauch, dürfte indes der Sache nach der Aussonderungsmenge einen ähnlichen Umfang verleihen wie das hier geübte Verfahren. Die Form der Ausdehnung des Funktionsbegriffs (Definition 4c auf

S. 309), wie sie für die speziellen Zwecke des Ersetzungsaxioms heranzuziehen ist, hat VON NEUMANN [6] angegeben.

Kritische Bemerkungen zu ZERMELOS Axiomatik findet man namentlich bei POINCARÉ [6] (S. 122ff.) und SKOLEM [3]; sie sind zum größten Teil in diesem und den beiden nächsten Paragraphen gebührend berücksichtigt. Die Hinweise SKOLEMS sind auch bei nicht intuitionistischer Einstellung beachtenswert.

Eine Modifikation des vorstehenden Axiomensystems gibt KURATOWSKI [4]; die Abweichung besteht in der Hauptsache darin, daß statt des Paares $\{a, b\}$ (Axiom II) die Vereinigungsmenge $a + b$ gefordert wird.

§ 17. Die Tragweite des Axiomensystems.

1. Die Herleitung des Rechnens mit Mengen. An die Schilderung der Aussagen der einzelnen Axiome werde jetzt ein kurzer Überblick über die *Tragweite* des durch sie alle dargestellten Axiomensystems angereiht; er soll uns lehren, wieviel von der CANTORschen Mengenlehre mit unseren Axiomen beherrscht werden kann und wieviel nicht. Es wird sich zeigen, daß im wesentlichen die rechtmäßigen und wertvollen Teile der Mengenlehre, nicht aber die Antinomien in unserer Axiomatik Aufnahme finden; damit werden unsere Axiome als weder zu eng noch zu weit gefaßt erwiesen sein. Übrigens werden wir im folgenden zwar die (in Axiom VII enthaltene) Existenz *irgendeiner* Menge voraussetzen, im übrigen aber die speziellen Axiome VII und VIII nur ausnahmsweise zu benutzen haben (und demgemäß auch den Funktionsbegriff nur im Sinne der Definition 4a—b verstehen).

Zunächst kann man aus den Axiomen die Existenz *der Nullmenge* und, wenn eine Menge m gegeben ist, die Existenz *der Menge* $\{m\}$ mit dem einzigen Element m folgern. Wie das bei der schärferen Fassung des A. d. Aussonderung zu geschehen hat, wurde auf S. 286f. angegeben. Bei der ursprünglichen Fassung jenes Axioms gestalten sich die Schlüsse noch einfacher: ist $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft, die *keinem* Element von m zukommt, so ist die gemäß Axiom V existierende Menge $m_{\mathfrak{E}}$ die Nullmenge; ist p das Paar aus zwei verschiedenen Elementen m und n (vgl. A. d. Paarung) und ist $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft, mit m identisch (oder von n verschieden) zu sein, so ist $p_{\mathfrak{E}}$ die Menge $\{m\}$. Die Nullmenge ist nach dem A. d. Bestimmtheit eindeutig bestimmt und nach Def. 1 Teilmenge jeder Menge. Weiter gestattet das A. d. Aussonderung die Bildung des *Durchschnitts* (vgl. die Beispiele 1 und 4, S. 286f.), das A. d. Vereinigung die Bildung der *Summe* oder Vereinigungsmenge von Mengen, soferne diese als die Elemente einer gewissen Menge gegeben sind.

Auch die Existenz des *Produkts* oder der Verbindungsmenge zu einer beliebigen Menge M von Mengen (Def. 5 des § 7, S. 89) wird durch

unsere Axiome gesichert, zunächst wenigstens für den Fall, daß die Elemente $m, n, p, \ldots$ von M paarweise elementefremd sind. Wie in der dem A. d. Auswahl vorangeschickten Betrachtung (S. 282 f.; vgl. auch S. 297) gezeigt wurde, enthält die Potenzmenge $U = \mathfrak{U}\mathfrak{S}M$ von $\mathfrak{S}M$ eine Teilmenge $U_{\mathfrak{S}}$, deren Elemente mit jeder der Mengen $m, n, p, \ldots$ je ein einziges Element gemeinsam haben; umgekehrt kommen alle derartigen Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ in $U_{\mathfrak{S}}$ als Elemente vor. Die Elemente von $U_{\mathfrak{S}}$ sind also die in Def. 5 von § 7 eingeführten Komplexe[1]; $U_{\mathfrak{S}}$ stellt somit das Produkt oder die Verbindungsmenge $\mathfrak{P}M$ der Mengen $m, n, p, \ldots$ dar. Auch die Belegungsmenge einer Menge mit einer anderen existiert daher, wie die Betrachtungen des § 8 über die Gleichwertigkeit der zwei dort gegebenen Definitionen der Potenzierung unschwer erkennen lassen (S. 106 f.).

Um die letzten wie auch alle nachfolgenden Überlegungen auch dann ohne allzu große Umständlichkeit durchführen zu können, wenn man sich auf die schärfere Fassung (V′) des Aussonderungsaxioms beschränkt, ist es zweckmäßig, sich der folgenden Hilfssätze zu bedienen, für deren Beweis auf Fraenkel [9] und von Neumann [6] verwiesen werde. Während der erste dieser Sätze die Begriffe „alle“ und „es gibt“ formalisiert, stellt der zweite, dessen Beweis natürlich das Ersetzungsaxiom nicht benutzt, einen in der *allgemeinen* Mengenlehre ausreichenden Ersatz für dieses Axiom dar.

Hilfssatz 1. Sind $\psi_\nu(x)$ und $\chi_\nu(x)$ gegebene Funktionen (vgl. S. 286) und ist M eine konstante Menge oder auch eine gegebene Funktion von x, so gehört zu jeder Menge m eine Teilmenge $\overline{m}$ (bzw. $\overline{\overline{m}}$) von m, die all die Elemente x von m und nur sie enthält, welche für *jedes* Element y von M (bzw. für *irgendein* Element y von M) der Relation $\psi_\nu(x) \,\varepsilon\, \chi_\nu(x)$ genügen.

Hilfssatz 2. Ist M eine Menge und $\varphi(x)$ eine Funktion, so existiert die Menge, die aus M hervorgeht, falls jedes Element x von M durch die Menge $\varphi(x)$ ersetzt wird. Hierbei ist „Funktion“ nur im Sinne der Definition 4a—b zu verstehen.

2. Axiomatische Theorie der Äquivalenz. Sind hiermit die Rechenoperationen mit Mengen ermöglicht, so bleibt vor allem noch übrig, die Theorie der *Äquivalenz* und die der *Ordnung* und *Wohlordnung* aus unserer Axiomatik heraus zu begründen. Dabei sollen nicht etwa neue undefinierte logische oder mathematische Grundbegriffe (wie die einer Funktion, einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung, einer Ordnungsbeziehung von den auf S. 125 angeführten Eigenschaften) eingeführt, sondern die notwendigen Begriffe aus unserer Axiomatik heraus allein mit deren Grundbegriffen „Menge“ und ε entwickelt werden. Wir begnügen uns im folgenden damit, die Richtungen anzudeuten, in denen sich diese Überlegungen vollziehen. Die Einführung der Kardinal-

---

[1] Die Existenz der einzelnen Komplexe, die wir jetzt einfach als Mengen auffassen, muß freilich unserem nunmehrigen Standpunkt gemäß erst festgestellt werden. So bedurften wir noch des A. d. Auswahl, um die Existenz mindestens éines Komplexes überhaupt zu sichern für den Fall, daß die Nullmenge kein Element von M ist.

zahlen, Ordnungstypen und Ordnungszahlen wird hierbei wegen der damit verbundenen grundsätzlichen Schwierigkeiten (vgl. S. 58 ff.) gewöhnlich vollständig vermieden; doch ist, wenn man das Ersetzungsaxiom zuhilfe nimmt, auch die Einführung der Ordnungszahlen und Alefs innerhalb der Axiomatik möglich[1].

Zu einer Definition der *Äquivalenz* gelangt man durch folgende Überlegung: Sind M und N zwei äquivalente elementefremde Mengen, so läßt sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen ihren Elementen offenbar deuten als die Bildung einer Menge von Elementepaaren $\{m, n\}$, deren einer Bestandteil m je ein Element von M darstellt, während der andere Bestandteil n stets der Menge N angehört; dabei ist es ausgeschlossen, daß in zwei verschiedenen Elementepaaren das nämliche Element m oder das nämliche Element n vorkommt, ein Umstand, in dem sich der *umkehrbar eindeutige* Charakter der Zuordnung ausdrückt. Man kann nun diesen Gedankengang umkehren und, wenn zwei elementefremde Mengen M und N gegeben sind, die Aufgabe stellen, eine Menge von Elementepaaren $\{m, n\}$ von folgenden Eigenschaften zu bilden: 1. m durchläuft alle Elemente von M, n alle Elemente von N, so daß ein derartiges Paar $\{m, n\}$ stets dem Produkt $M \cdot N$ als Element angehört; 2. in zwei verschiedenen Elementepaaren kommt niemals das nämliche Element aus M oder aus N vor. Ist diese Aufgabe lösbar, so liefert uns jede Lösung eine Abbildung zwischen M und N, diese beiden Mengen sind dann jedenfalls äquivalent; gibt es dagegen keine solche Menge von Elementepaaren, so existiert keine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von M und N, diese Mengen sind also nicht äquivalent.

So gelangen wir zu der folgenden, rein auf unsere Axiomatik gegründeten

Definition der Äquivalenz. *Sind M und N elementefremde Mengen, so heißt M äquivalent N, wenn das Produkt $M \cdot N$ mindestens eine Teilmenge Φ von der Art besitzt, daß jedes Element der Summe $M + N$ in einem einzigen Element von Φ auftritt. Φ heißt eine Abbildung zwischen den Mengen M und N.*

Die Bildung einer derartigen Menge Φ von Elementepaaren gestaltet sich auf Grund unserer Axiome folgendermaßen: Zunächst existiert nach S. 313 und Axiom II das Produkt $P = M \cdot N$, das *alle* Paare $\{m, n\}$ von der ersten Eigenschaft enthält. Es handelt sich also um die Bestimmung einer Teilmenge von P, die noch die zweite der angeführten Eigenschaften besitzt; die Menge *aller* derartigen Teilmengen von P — d. h. aller derartigen Elemente von $\mathfrak{U}P$ — ist eine durch jene zweite Eigenschaft völlig charakterisierte Teilmenge U_0 von $\mathfrak{U}P$, sie existiert also nach dem A. d. Aussonderung. Es sind nun zwei Fälle denkbar. Entweder ist $U_0 = 0$; dann gibt es keine Teilmenge von P mit der ge-

[1] Übrigens liegt auch eine eigene, von der allgemeinen Begründung der Mengenlehre unabhängige *Axiomatik der endlichen und unendlichen Kardinalzahlen* vor (FRAENKEL [4]). Man vergleiche ferner BAER [4].

wünschten Eigenschaft, eine Abbildung zwischen M und N ist also nicht herstellbar, d. h. diese Mengen sind nicht äquivalent. Oder U_0 enthält gewisse Elemente, nämlich lauter Mengen von Paaren mit den beiden oben hervorgehobenen Eigenschaften; dann stellt jedes Element von U_0 eine bestimmte Abbildung zwischen M und N her, wie auch umgekehrt alle möglichen Abbildungen zwischen M und N in U_0 vorkommen. In diesem Fall nennt man die Mengen M und N äquivalent und jedes Element von U_0 eine Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen.

Auf Grund dieser Einführung des Äquivalenzbegriffs lassen sich weiterhin diejenigen Teile der allgemeinen Mengenlehre, die ohne den Ordnungsbegriff auskommen, ohne wesentliche grundsätzliche Schwierigkeiten entwickeln. Z. B. bestimmt eine gegebene Abbildung Φ zwischen zwei äquivalenten elementefremden Mengen M und N eine Funktion $\varphi(x)$, die jedem Element x von M das ihm vermöge Φ entsprechende Element $\varphi(x)$ von N zuordnet und umgekehrt; in die Funktion $\varphi(x)$ geht natürlich die gegebene (konstante) Menge Φ ein. Somit sind zwei elementefremde Mengen dann und nur dann äquivalent, wenn es eine Funktion gibt, die jedem Element der einen Menge umkehrbar eindeutig eines der anderen zuordnet; man ist so wieder bei der alten Definition der Äquivalenz von S. 16f. angelangt. Weiter läßt sich der Begriff der Äquivalenz durch Zwischenschaltung einer geeigneten dritten Hilfsmenge auch auf *nicht elementefremde* Mengen übertragen und fernerhin die vielfach störende Bedingung der Elementefremdheit ganz allgemein aus dem Wege räumen durch den Beweis des Satzes: Zu einer gegebenen Menge M, deren Elemente untereinander nicht elementefremd zu sein brauchen, läßt sich stets eine zu M äquivalente Menge $\overline{M}$ von folgender Eigenschaft angeben: je zwei durch eine gewisse Abbildung zwischen M und $\overline{M}$ einander zugeordnete Elemente beider Mengen sind einander äquivalent und die Elemente von $\overline{M}$ sind überdies untereinander paarweise elementefremd. Oder kürzer: zu einer beliebigen Menge M läßt sich stets eine äquivalente Menge von bezüglich äquivalenten fremden Elementen angeben.

Dieser Satz gestattet u. a. das *allgemeine Auswahlprinzip* abzuleiten, d. h. sich im Axiom der Auswahl (S. 283) von der Voraussetzung der Elementefremdheit frei zu machen, die zuweilen — so beim Beispiel auf S. 299f. — Unbequemlichkeiten verursacht; man kann nämlich nach dem vorigen Satz zu einer Hilfsmenge mit paarweise elementefremden Elementen übergehen und eine der Auswahlmengen der Hilfsmenge, wie solche nach dem Auswahlaxiom existieren, als eine Vorschrift auffassen, die jedem Element der gegebenen Menge ein darin enthaltenes Element (nämlich das Bild des betreffenden Elementes aus der Auswahlmenge der Hilfsmenge) als „ausgezeichnetes“ zuordnet.

Von den übrigen aus den Axiomen folgenden Sätzen der Äquivalenztheorie, zu denen namentlich auch die die Größenordnung der Kardinalzahlen betreffenden (mit Ausnahme des Vergleichbarkeits-

satzes) gehören, werde nur noch der Satz von CANTOR hervorgehoben, wonach die Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ einer beliebigen Menge M stets von größerer Mächtigkeit ist als M selbst (S. 67). Im übrigen sei hinsichtlich der Durchführung der Äquivalenztheorie im axiomatischen Gewand auf ZERMELO [3] und FRAENKEL [8] verwiesen.

3. Axiomatische Theorie der Ordnung. Auch der Begriff der Ordnung in einer Menge und damit der der geordneten Menge läßt sich, ohne Zuhilfenahme einer besonderen Ordnungsrelation wie in § 9, rein mittels der Grundbegriffe unseres Axiomensystems entwickeln[1]

Um zu einer axiomatischen Begriffsbestimmung der Ordnung zu gelangen, gehen wir zunächst einmal von einer geordneten Menge m im gewöhnlich üblichen Sinne aus und verstehen wieder wie auf S. 168 unter einem Anfangsstück von m jede (von selbst wiederum entsprechend geordnete) Teilmenge von m, die gleichzeitig mit einem beliebigen in ihr vorkommenden Element a von m stets auch all diejenigen Elemente von m enthält, die vermöge der Ordnung von m *vor* a stehen. Auch die Nullmenge ist hiernach als Anfangsstück aufzufassen. Dann besitzt die zunächst wiederum ganz naiv gebildete Menge A *aller* Anfangsstücke der geordneten Menge m die folgenden vier Eigenschaften[2], wie unmittelbar einleuchtet und auch nicht schwer streng zu beweisen ist:

I. Von je zwei beliebigen Elementen von A (d. h. beliebigen Anfangsstücken von m) ist (mindestens) éines eine Teilmenge des andern (nämlich das „früher endende“ Anfangsstück);

II. sind a und b zwei beliebige verschiedene Elemente von m, so gibt es mindestens ein Element von A (d. h. ein Anfangsstück von m), das *ein einziges* der beiden Elemente a und b enthält (wenn in m das Element b auf a nachfolgt, so ist z. B. das Anfangsstück, das a und alle vorangehenden Elemente von m enthält, von der gewünschten Art);

III. ist A_0 eine beliebige Menge von Anfangsstücken von m (also eine Teilmenge von A), so sind sowohl die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}A_0$ wie auch der Durchschnitt aller Elemente von A_0 wiederum Anfangsstücke von m, somit Elemente von A;

IV. die Nullmenge und die Menge m selbst sind Elemente von A.

Umgekehrt sind diese vier Eigenschaften für die Menge aller Anfangsstücke von m im wesentlichen *charakteristisch*, d. h. eine Menge von Teilmengen der geordneten Menge m, die diese Eigenschaften be-

[1] Siehe HESSENBERG [3], Kap. 28, und [10], S. 74; COMBÉBIAC [1]; KURATOWSKI [1]; FRAENKEL [9]; vgl. auch MIRIMANOFF [2] sowie SIERPIŃSKI [3].

[2] Der Kenner vergleiche zu ihnen die allgemeineren *Umgebungsaxiome* (HAUSDORFF [3], S. 213).

sitzt, ist notwendig mit A (oder mit der entsprechenden Menge aller Endstücke von m) identisch[1].

Es ist bequem einen kurzen Ausdruck für die erste Eigenschaft zu prägen, nach der alle Anfangsstücke sich ihrem Umfange nach in eine Richtung ständigen Zu- oder Abnehmens bringen lassen; mit einer in der Mathematik vielfach analog gebrauchten Bezeichnung nennen wir eine Menge von Teilmengen der (geordneten oder auch ungeordneten) Menge m *monoton*, wenn sie die Eigenschaft I besitzt (vgl. S. 206).

Wie Kuratowski a. a. O. hervorgehoben hat, lassen sich die Eigenschaften II—IV weit kürzer und begrifflich einfacher durch die einzige Tatsache ausdrücken, daß die Menge A eine *größtmögliche* monotone Menge von Teilmengen der geordneten Menge m ist; mit anderen Worten: daß man der Menge A keine weitere Teilmenge von m als Element hinzufügen kann, ohne die Eigenschaft I anzutasten. Jede monotone Menge von Teilmengen der geordneten Menge m, die in diesem Sinne *so umfassend wie überhaupt möglich* gewählt ist, besitzt also von selbst die Eigenschaften II—IV und fällt demnach mit A (oder mit der gleichwertigen Menge aller Endstücke von m) zusammen.

Die bisherige Betrachtung, bei der wir von einer geordneten Menge ausgingen, war nur dazu bestimmt, uns den Weg zu weisen zu einer axiomatischen Begriffsbestimmung der Ordnung in *ungeordneten Mengen*, wie solche allein in unserer Axiomatik auftreten. Wir verstehen also nunmehr unter m eine Menge im Sinne unseres Axiomensystems und setzen fest:

Definition der Ordnung. *Eine Menge m heißt ordnungsfähig, wenn es eine monotone Teilmenge M der Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ von größtmöglichem Umfange gibt, oder schärfer: wenn es eine Menge M, deren Elemente Teilmengen von m sind, von folgenden beiden Eigenschaften gibt:*

I′. *von je zwei Elementen von M ist mindestens éines eine Teilmenge des anderen;*

II′. *falls M eine Teilmenge einer die Eigenschaft* I′ *besitzenden Teilmenge $\overline{M}$ von $\mathfrak{U}m$ ist, so gilt $M = \overline{M}$.*

Eine Menge M mit diesen Eigenschaften wird als eine die Menge m ordnende Menge bezeichnet.

Um von einer solchen ordnenden Menge M zu einer Ordnung von m im üblichen Sinne, also zur Definition einer zwischen je zwei Elementen von m bestehenden Ordnungsrelation zu gelangen, hat man

[1] Man könnte von vornherein statt der Anfangsstücke von m ebensogut die *Endstücke* oder „Reste" bevorzugen, wie dies in der Tat in den vorhin angegebenen Schriften geschieht. Indes ist für die Theorie der *Wohlordnung* die vorstehende Begriffsbildung praktischer, letzten Endes deshalb, weil ja auch die Definition der wohlgeordneten Mengen selbst eine Bevorzugung der Anfangsstücke bedeutet (vgl. S. 180).

vor allem zu zeigen, daß aus den Eigenschaften I′ und II′ von selbst die vorher angeführte Eigenschaft II (S. 316) folgt. Ist dieser Beweis geführt, so gibt es, wenn a und b zwei beliebige Elemente von m sind, mindestens ein Element von M, das ein einziges von beiden, etwa a, als Element enthält; wie aus I′ unmittelbar folgt, gibt es dann unter den Elementen von M keines, das nur b, nicht aber a als Element enthielte. Unter diesen Umständen wird, wie es nach dem Beginn dieser Überlegung nahe liegt, $a \prec b$ („a vor b") gesetzt[1], womit also von selbst $b \prec a$ (und übrigens auch die Relation $a \prec a$) ausgeschlossen wird. Man überzeugt sich leicht, daß hiernach aus $a \prec b$ und $b \prec c$, wo a, b, c Elemente der durch M geordneten Menge m bedeuten, stets $a \prec c$ folgt. Nach S. 125 ist also die hiermit definierte Beziehung oder Relation $\prec$ eine Ordnungsrelation, durch deren Einführung die Menge m zu einer im üblichen Sinne geordneten Menge wird. Jede m ordnende Menge M bestimmt demnach eindeutig eine geordnete Menge im gewöhnlichen Sinne, die dieselben Elemente wie m enthält, und diese Aussage läßt sich auch umkehren.

Schon hieraus erhellt, daß es zu einer ordnungsfähigen Menge m im allgemeinen nicht nur éine, sondern verschiedene ordnende Mengen M geben wird (zu einer unendlichen Menge m sogar unendlichviele verschiedene). Infolge der umkehrbar eindeutigen Korrespondenz gehören nämlich zu verschiedenen Ordnungen von m im gewöhnlichen Sinn, wie sie nach S. 123 regelmäßig vorhanden sind, auch verschiedene ordnende Mengen M, die jeweils der Menge aller Anfangsstücke bei einer jeden Ordnung von m entsprechen.

Als ein *Beispiel* für diese axiomatische Theorie der Ordnung diene die Menge m aller Punkte einer beiderseits begrenzten, etwa von links nach rechts verlaufenden geradlinigen Strecke einschließlich ihrer Endpunkte. M sei die Menge aller Teilstrecken, die von beliebigen Punkten der Strecke bis zu deren linkem Endpunkte reichen, wobei sowohl die Fälle zu rechnen sind, in denen der beliebig gewählte rechtsseitige Endpunkt der Teilstrecke mit zur Teilstrecke gerechnet wird, als auch die Fälle, wo dieser fortbleibt (wo also die Teilstrecke nur linksseitig mit Endpunkt versehen, rechts aber „offen" ist); jede Strecke wird dabei als die Menge aller ihrer Punkte aufgefaßt. Sind dann a und b zwei beliebige Punkte der ganzen Strecke und ist etwa a links von b gelegen, so gibt es mindestens éin Element von M, das a, nicht aber b als Element enthält; z. B. die Teilstrecke, die a und alle links davon gelegenen Punkte der Strecke enthält. Nach unserer Festsetzung ist also $a \prec b$; M definiert somit die geordnete Menge aller Punkte der Strecke in der Reihenfolge von links nach rechts.

---

[1] In dieser Festsetzung kommt die in der vorigen Fußnote erwähnte Willkür zum Ausdruck. Man könnte unter den angeführten Umständen natürlich ebensogut „b vor a" festsetzen.

Ein wesentlich anderer Weg zur Einführung des Ordnungsbegriffs (vgl. HAUSDORFF [4], S. 15 und 42) geht vom Begriff des *geordneten Paares* (vgl. S. 126) aus, gründet auf ihn definitorisch den der eindeutigen Funktion und führt mit dessen Hilfe dann die Ordnungsrelation ein.

Die Theorie der geordneten Mengen läßt sich auf dieser Grundlage unter bloßer Benutzung unserer Axiome vollständig entwickeln; für die Durchführung ist auf FRAENKEL [9] und die in Vorbereitung befindliche Fortsetzung dieses Aufsatzes, die die Theorie der Wohlordnung behandeln soll, zu verweisen. Natürlich muß hierbei auch der Begriff der *wohlgeordneten* Menge auf die Relation ε zurückgeführt werden. Die verschärfte Fassung V′ des Aussonderungsaxioms sowie die Hilfssätze 1 und 2 von S. 313 leisten bei der Durchführung wesentliche Dienste. Entsprechend wie in der Äquivalenztheorie existiert auch hier zu je zwei (elementefremden) geordneten Mengen die Menge aller ähnlichen Abbildungen zwischen ihnen; je nachdem diese Menge gleich 0 ist oder nicht, heißen die beiden Mengen einander „nicht ähnlich" oder „ähnlich". Was das Axiom der Ersetzung betrifft (S. 309), so ist es bemerkenswerterweise auch für die allgemeine Theorie der Ordnung und Wohlordnung nicht erforderlich, in der man den Begriff des Ordnungstypus bzw. der Ordnungszahl ebenso ausschalten kann[1] wie in der Äquivalenztheorie den Begriff der Kardinalzahl. Die *allgemeine* Mengenlehre kann in ihrem ganzen Umfang aus den Axiomen I—VI hergeleitet werden. Wenn man dagegen die *Ordnungszahlen* in die axiomatisierte Mengenlehre einführen will[2], so ist dazu (wenigstens für die existentialen Sätze) das Axiom der Ersetzung ganz unentbehrlich, und zwar unter der gleichzeitigen Erweiterung des Funktionsbegriffs, wie sie in Definition 4c (S. 309) angegeben ist; gewisse unter diesen Ordnungszahlen, nämlich die Anfangszahlen (S. 192), kann man weiterhin als Alefs einführen und so direkt „Kardinalzahlen" herstellen. Die Bedeutung des Ersetzungsaxioms wird durch diese seine Notwendigkeit zur Konstruktion relativ einfacher Ordnungszahlen noch klarer beleuchtet als durch das Bedürfnis, es zur Bildung gewisser äußerst umfassender Mengen heranzuziehen.

In diesem Zusammenhang liegt die folgende Frage nahe. Der Wohlordnungssatz (S. 195), dessen Beweis in ZERMELO [2] bereits eine im wesentlichen axiomatisierte Form zeigt (vgl. auch VIELER [1]), behauptet, daß eine beliebige (ungeordnete) Menge sogar auf die spezielle Art einer *Wohlordnung*, um so mehr also überhaupt *irgendwie* geordnet werden kann. Gemäß der vorstehenden Definition der Ordnung heißt das genauer: zu jeder Menge m existiert eine ordnende Menge M, im Sinn der Axiomatik verstanden, d. h. die (jedenfalls existierende, aber a priori

[1] Eine generelle Methode zur Vermeidung der unendlichen Ordnungszahlen gibt KURATOWSKI [2].

[2] Siehe VON NEUMANN [1] und [6]; vgl. auch [2] und [4]. Eine für sich stehende axiomatische Einführung der Ordnungszahlen skizziert TARSKI [5]; vgl. dazu LINDENBAUM-TARSKI [1], § 4.

möglicherweise auf 0 zusammenschrumpfende) Menge aller möglichen ordnenden Mengen von m ist *stets von* 0 *verschieden*. Diese Aussage („Ordnungssatz“), wonach jede Menge überhaupt ordnungsfähig ist, mag nicht nur um ihres allgemeineren Charakters willen, sondern auch an Hand konkreter Beispiele als schwächer im Vergleich zum Wohlordnungssatz erscheinen; z. B. ist für das Kontinuum, dessen Wohlordnung so außerordentlichen Schwierigkeiten begegnet, ohne weiteres eine Ordnung angebbar (Ordnung der reellen Zahlen der Größe nach, der Punkte einer Strecke in einer der Richtungen dieser Strecke).

Der Beweis des Wohlordnungssatzes beruht nun auf dem Auswahlaxiom als unentbehrlichem Hilfsmittel (vgl. S. 299f.); übrigens ist das Auswahlaxiom auch sonst, wie für die Mengenlehre überhaupt, so im besonderen für die Theorie der geordneten Mengen erforderlich, z. B. schon zur Ermöglichung des Rechnens mit Ordnungstypen bzw. Ordnungszahlen (vgl. S. 297). Auf der anderen Seite läßt sich bei völligem Verzicht auf das Auswahlaxiom mittels der übrigen Axiome jedenfalls auch der Ordnungssatz *nicht* beweisen. Das folgt unmittelbar (vgl. FRAENKEL [12]) aus dem Beweis für die Unabhängigkeit schon des engsten Spezialfalls des Auswahlaxioms (Ausgangsmenge M enthält nur *endliche* Mengen als Elemente, z. B. nur abzählbar unendlichviele *Paare*, vgl. S. 345f.), da eine etwaige Ordnung der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ gleichzeitig sämtlichen Elementen von M eine Ordnung — und daher, da diese Elemente alle endlich sind, sogar eine Wohlordnung; vgl. S. 176 — aufprägen würde und da somit bei Voraussetzung des Ordnungssatzes schon auf Grund des Aussonderungsaxioms die Existenz einer Auswahlmenge von M folgte (z. B. der Menge, die aus jedem der Elemente von M das *erste* Element enthält). Unter diesen Umständen erheben sich die (noch der Beantwortung harrenden) Fragen, erstens ob sich der Ordnungssatz vielleicht mittels einer schwächeren Forderung als der des Auswahlaxioms beweisen bzw. sich selbst als eine derartige schwächere Forderung auffassen läßt, zweitens in welchem Ausmaß sich zutreffendenfalls durch ein derart abgeschwächtes Axiomensystem die Methoden der CANTORschen Mengenlehre noch sichern lassen, drittens ob der soeben erwähnte Spezialfall des Auswahlaxioms, der seinerseits aus dem Ordnungssatz folgt, etwa auch umgekehrt die Herleitung des Ordnungssatzes gestattet und somit mit diesem gleichwertig ist. Sollte sich das *allgemeine* Auswahlaxiom aus dem Ordnungssatz folgern lassen, was freilich nicht eben wahrscheinlich ist, so könnte es für manche Zwecke vorteilhaft sein, beim systematischen Aufbau der Mengenlehre den Ordnungssatz an die Stelle des Auswahlprinzips treten zu lassen.

4. Die endlichen und die abzählbar unendlichen Mengen. Ist bisher von der *allgemeinen* Mengenlehre die Rede gewesen, so werde jetzt noch die Herleitung der beiden wichtigsten *speziellen* Klassen von Mengen aus den Axiomen wenigstens andeutungsweise berührt.

Für die Theorie der endlichen Mengen im axiomatischen Gewand liegt an sich die Forderung nahe, auf den Gebrauch der Axiome VI und VII ganz zu verzichten. Für das Axiom des Unendlichen (VII), das eine über das Endliche hinausgehende Forderung enthält, bietet ein solcher Verzicht angesichts seines Charakters als *spezielles* Axiom keine wesentlichen Schwierigkeiten. Obgleich das Auswahlaxiom (VI) für eine endliche Ausgangsmenge mittels vollständiger Induktion — also *innerhalb* einer Theorie der endlichen Mengen — nach S. 288f. beweisbar wird, begegnet doch der *Aufbau* dieser Theorie ohne Auswahlaxiom gewissen Hindernissen, und zwar je nach der Definition

der Endlichkeit, die an die Spitze der Theorie gestellt wird (vgl. S. 182). Z. B. ist ein so einfacher Satz wie der der elementaren Kombinatorik angehörige „die Potenzmenge einer endlichen Menge ist wieder endlich“[1] ohne Auswahlaxiom anscheinend nicht beweisbar, wenn man mit DEDEKIND unter einer endlichen Menge eine „keiner eigentlichen Teilmenge von sich äquivalente“ Menge versteht; ja sogar unter Heranziehung des Auswahlaxioms ist, wie es scheint, der Umweg über die vollständige Induktion explizit oder implizit nicht zu vermeiden. Bei manchen anderen Ausgangsdefinitionen wiederum ist es leicht, ohne Auswahlaxiom zur vollständigen Induktion und damit zum Schlüssel der ganzen Theorie zu gelangen, insbesondere auch zur Tatsache der — und zwar im wesentlichen eindeutigen — Ordnungsfähigkeit jeder endlichen Menge (vgl. S. 123). Für die Einzelheiten werde auf ZERMELO [4], TARSKI [4] und FRAENKEL [10] (S. 141—147) verwiesen.

Man kann freilich grundsätzliche Bedenken dagegen vorbringen, daß man die Begründung der Theorie der endlichen Mengen und natürlichen Zahlen so auf die allgemeine Mengenlehre[2] zurückführt, also das Endliche dem Unendlichen als das Speziellere und etwa gar als das logisch Kompliziertere unterordnet[3]. Die Einwürfe hiergegen sind wesentlich dieselben, wie sie gegen einen Widerspruchslosigkeitsbeweis für die Zahlenlehre im Sinne HILBERTS a priori erhoben werden (vgl. S. 378): ohne den allgemeinen Begriff der natürlichen Zahl schon vorauszusetzen, könne man einen (auch axiomatischen) Aufbau der Mengenlehre nicht liefern, das Verfahren gestalte sich somit zirkelhaft. Ähnlich wie dort, wenn auch vielleicht nicht mit ganz dem gleichen Gewicht, läßt sich darauf entgegnen, die innerhalb der Mengenlehre zu begründenden „formalen“ Zahlen seien nicht dieselben wie die „inhaltlichen“ beim Aufbau vorausgesetzten, und da sich die eigentliche Mathematik nur mit ersteren zu beschäftigen habe, so brauche man sich um das — grundsätzlich vielleicht höchst undurchsichtige — Verhältnis dieser beiden Zahlenarten gar nicht weiter zu kümmern. Übrigens müssen auch für den Standpunkt, der in einer „Begründung“ der Zahlenlehre von der allgemeinen Mengenlehre her ein zirkelhaftes Verfahren erblickt, die einschlägigen Betrachtungen nicht bedeutungslos sein; sie gliedern dann die schon anderweitig begründete Zahlenlehre dem allgemeineren Zusammenhang der Mengenlehre nachträglich ein.

---

[1] Enthält nämlich die Ausgangsmenge n Elemente, so hat die Potenzmenge deren 2^n. Vgl. S. 107.

[2] Die Begründung der Zahlenlehre mittels der Theorie spezieller, nämlich eben der „endlichen“ Mengen, wie sie z. B. auch in dem verbreiteten Lehrbuch WEBER-EPSTEIN [1] durchgeführt wird, braucht vom obigen Bedenken überhaupt nicht berührt zu werden.

[3] Zur Geschichte dieser Auffassung vergleiche man etwa WEYL [7], S. 38.

Von der bisher betrachteten logisch-mathematischen Seite des Problems ist natürlich die psychologisch-didaktische scharf zu scheiden; vgl. hierfür den Schluß von § 11.

Was im besonderen die axiomatische Beleuchtung des hier vorliegenden Problems betrifft, so ist es namentlich das Axiom der Aussonderung, das sowohl in seiner ursprünglichen loseren wie in der verschärften Form (unter Verwendung der Funktionen) den Zahlbegriff in erheblichem Maß in sich birgt (vgl. S. 287 unten); das steht im Einklang mit der Tatsache (S. 325 ff.), wonach dieses Axiom, aus dem das Axiom der Potenzmenge erst seine wahre Bedeutung schöpft, im Mittelpunkt des ganzen Axiomensystems steht. In der Tat dürfte es bei einer in der ganzen Anlage nicht grundsätzlich andersartigen Axiomatik ganz unvermeidlich sein, zwecks hinreichender Freiheit in der Mengenbildung axiomatisch einen Prozeß einzuführen, in den das induktive Moment eingeht, oder m. a. W. der abzählbar unendlich viele „Zählaussagen" (vgl. S. 333) in sich umfaßt. Diese wie auch andere Erwägungen (vgl. z. B. SKOLEM [3], Nr. 7) mögen die Überzeugung nahelegen, daß es systematisch vorzuziehen oder sogar unvermeidlich sei, die natürlichen Zahlen unabhängig von der allgemeinen Mengenlehre einzuführen und sie bei der Axiomatisierung der Mengenlehre bereits vorauszusetzen.

Was schließlich die axiomatische Theorie der *abzählbar unendlichen* Mengen betrifft, so ist für sie der Grund gelegt durch Axiom VII und die daran anschließende Sicherung der Menge Z_0, d. h. der „Zahlenreihe" (S. 308). Für die grundsätzlich einfachen hieran anknüpfenden Überlegungen ist auf die auf S. 316 oben und 319 angegebenen Aufsätze sowie noch auf VIELER [1] (IV. Kapitel) zu verweisen.

5. Der Fortfall der Antinomien. Die Tragweite unserer Axiome und der Weg von ihnen zur CANTORschen Mengenlehre wird mit den vorangehenden Bemerkungen hinlänglich angedeutet sein. Nicht minder bedeutsam als dieser positive Ertrag des Axiomensystems ist aber der negative, nämlich die Tatsache, daß *die paradoxen Mengen, von denen im § 13 die Rede war, mittels unseres Axiomensystems nicht zu bilden sind, und daß somit die Antinomien automatisch fortfallen.*

Vor allem ist die Bildung der mit *logischen* Antinomien behafteten Mengen, nämlich der allzu umfassenden Mengen (Antinomien von BURALI-FORTI, RUSSELL usw.), durch unsere Axiome ausgeschlossen. Denn diese gestatten beim Ausgang von einer oder mehreren gegebenen Mengen (nämlich im wesentlichen von der Nullmenge und der aus Axiom VII sich ergebenden Menge Z_0) nur entweder die Bildung beschränkterer Mengen durch Aussonderung bzw. Auswahl, oder die Bildung von Mengen, die nur in einem quantitativ und qualitativ scharf umschriebenen Sinne relativ „umfassender" sind, durch Paarung, Vereinigung, Potenzierung usw. Namentlich können durch eine sinnvolle Eigenschaft wie z. B. „nicht Element von sich selbst sein" oder „eine Ordnungszahl sein" Mengen nicht independent (unabhängig), sozusagen aus dem „All" definiert werden wie die paradoxen Mengen, sondern nur auf dem Weg der Einschränkung aus schon bekannten

Mengen. Sind also Mengen wie die *aller* sich nicht enthaltenden Mengen, *aller* Ordnungszahlen, *aller* Dinge gewisser Art nicht von vornherein gegeben, so kann auch nicht vermöge der Axiome auf ihre Existenz geschlossen werden. Umgekehrt lassen sich vielmehr die bei gewissen Antinomien auftretenden Gedankengänge benutzen, um positiv die Nichtexistenz der betreffenden paradoxen Mengen aus den Axiomen zu folgern. So kann man z. B. zu jeder Menge m auf ähnlichem Weg wie auf S. 211 eine *Teilmenge* m_0 nachweisen, die *nicht Element* von m ist (z. B. die Menge m_0 aller *der* Elemente von m, die sich selbst nicht als Elemente enthalten); eine Menge, die alle existierenden Mengen als Elemente enthält, kann es daher nicht geben.

Aus einem anderen Grund sind paradoxe Mengen von der bei den *epistemologischen* Antinomien geschilderten Art in unserer Axiomatik nicht zu befürchten, wie z. B. die Menge aller mit weniger als tausend Zeichen definierbaren natürlichen Zahlen (S. 214). Hier ist die Ausgangsmenge, nämlich die Menge aller natürlichen Zahlen (oder eine ihr gleichwertige Menge), jedenfalls rechtmäßig, somit als deren Teilmenge die fragliche paradoxe Menge anscheinend durch das A. d. Aussonderung gesichert. In Wirklichkeit ist indes die unsere Teilmenge charakterisierende Eigenschaft, nämlich die Definierbarkeit durch weniger als tausend Zeichen, nicht von der präzisen Art, wie sie für das A. d. Aussonderung erforderlich ist: die Eigenschaft, durch eine bestimmte Anzahl von Zeichen sich definieren zu lassen, ist in dieser Unbestimmtheit für die natürlichen Zahlen nicht sinnvoll (vgl. S. 215); erst recht läßt sie sich nicht mittels des auf S. 286 eingeführten Funktionsbegriffs ausdrücken. Damit entfällt die Möglichkeit, der betrachteten paradoxen Menge oder einer ähnlichen die Existenz zu sichern. Unsere Axiomatik erreicht also wirklich ihr Ziel: alle rechtmäßigen Mengen der CANTORschen Mengenlehre, nicht aber die bisher bekanntgewordenen anstößigen Mengen zu liefern.

Freilich sagen ja die Axiome eigentlich nur aus, welche Mengen unter allen Umständen existieren sollen, ohne die etwaige Existenz noch weiterer Mengen von vornherein auszuschließen (vgl. S. 354 f.). Für die antinomischen Mengen wird diese offen gebliebene Möglichkeit gerade durch den mit ihnen verknüpften Widerspruch abgeschnitten, der sich stets auf die Form bringen läßt, daß zwei Relationen der Form $a \varepsilon b$ und $a \not\varepsilon b$ gleichzeitig bestehen sollten. Im Gegensatz zur naiven Mengenlehre, wo die Definition des Mengenbegriffs auf derart antinomische Mengen zu führen scheint, liegt nach dem Gesagten in den Axiomen keine Handhabe vor, um widerspruchsvollen Mengen wenigstens der bisher bekannten Arten eine scheinbare Existenzsicherung zu geben. Man braucht also, solange man sich auf die Axiome stützt, nicht zu befürchten, es möchten sich von ungefähr derartige Mengen eingeschlichen haben.

Die Möglichkeit, daß etwa *neue* Antinomien von bisher nicht bekannter Struktur innerhalb der axiomatisch begründeten Mengenlehre auftreten könnten, wird noch weiterhin zu erörtern sein (vgl. die übernächste Nummer und namentlich S. 362 ff.).

Beim Vergleich der Axiomatik mit den *Principia Mathematica*, die ja gleichfalls unter Wahrung des mengentheoretischen Besitzstandes die Antinomien ausschließen, wird man übrigens einen zwar nicht sachlichen, aber zum mindesten psychologischen Nachteil der Axiomatik nicht übersehen können: RUSSELL erreicht den Ausschluß der Antinomien durch die einheitliche und in gewissem Sinn auch einsichtige Forderung, daß eine Menge nur Elemente von logisch gleichartigem Gepräge (Typus) enthalten dürfe; die Umfangsbeschränkungen hingegen, die der Mengenbegriff durch die Axiomatik (namentlich bei Hinzunahme eines Beschränktheitsaxioms, siehe S. 355) erleidet, werden durch eine Reihe verschiedener und bis zu einem gewissen Grad willkürlicher Forderungen erzielt, die sich wesentlich nur durch ihre Brauchbarkeit legitimieren. Dafür ist sachlich RUSSELLs System einstweilen durch das Reduzibilitätsaxiom belastet.

6. Die nicht-prädikativen Verfahren innerhalb der Axiomatik. Die Bedenken, die aus dem anscheinend zirkelhaften Charakter der nicht-prädikativen Begriffsbildungen erwachsen (S. 248 ff.), waren zwar auf Grund der Typentheorie RUSSELLs fortgefallen (S. 254 ff.). Innerhalb unserer Axiomatik aber, die ohne mathematische Typentheorie durchkommen will, schon um sich nicht den Fährlichkeiten des Reduzibilitätsaxioms (S. 260) aussetzen zu müssen, sind wir wieder vor die Notwendigkeit nicht-prädikativer Verfahren gestellt, wie dies an einem charakteristischen Fall auf S. 288 ausdrücklich betont wurde; wir stehen also erneut vor der Frage nach der Rechtmäßigkeit solcher Verfahren.

Indes bedeutet neben der Ehrenrettung, die ZERMELO (vgl. S. 250 f.) für die Verwendung des nicht-prädikativen Verfahrens in vielen Fällen gibt, gerade die axiomatische Auffassung auch in dieser Beziehung eine wirksame Verteidigung der üblich und nützlich gewordenen Schlußweisen. Man mag sich die Legitimierung der nicht-prädikativen Definitionen durch die Axiomatik cum grano salis veranschaulichen am Bilde eines unauflösbar verwickelten Bindfadenknäuels, in dem kein offenes Ende zu entdecken ist, von welchem aus die Auflösung des Knäuels mit Erfolg in Angriff zu nehmen wäre. Das Knäuel konstruktiv zu entwirren und dann alle seine Teile von einem Anfang aus fortlaufend zu verfolgen, mag also untunlich sein; dennoch ist unter Umständen eine Schilderung all seiner Bestandteile und damit eine hinreichende Beschreibung des Knäuels in der Weise möglich, daß man alle Verknüpfungen der verschiedenen Teilchen in sämtlichen Knoten

aufzählt, d. h. daß eine vollständige Beschreibung aller gegenseitigen Beziehungen der einzelnen Bindfadenstückchen gegeben wird. Entsprechend können nicht-prädikativ definierte Begriffe zwar eben diesem Charakter gemäß nicht konstruktiv hergestellt, aber in ihren Relationen zu allen anderen vorkommenden Begriffen vollständig beschrieben und so von anderen unterschieden werden. Man kann (vom nicht-intuitionistischen Standpunkt aus) sehr wohl Begriffe anerkennen, die in dieser Weise festgelegt sind, braucht also keineswegs die nicht-prädikativen Definitionen in Bausch und Bogen zu verwerfen; ja man *darf* dies allem Anschein nach gar nicht tun, will man sich nicht viele der fruchtbarsten und schönsten Gebiete der Mathematik von vornherein versperren, nämlich all die vom Kontinuum und von den meisten überabzählbar unendlichen Mengen abhängigen (vgl. S. 253).

Dennoch behalten hiermit die Argumente POINCARÉs gegen die nicht-prädikativen Verfahren eine bestimmte bleibende Bedeutung, auch wenn man, über seinen Standpunkt hinwegschreitend, derartige Begriffsbildungen im axiomatischen Sinn zuläßt und die allgemeine Mengenlehre einschließlich des Überabzählbaren und der Potenzmenge als rechtmäßig ansieht: *der Vorzug der Konstruierbarkeit bleibt den nicht-prädikativen Verfahren und den von ihnen abhängigen Teilen der Analysis und Mengenlehre versagt.*

7. Axiomatik und Intuitionismus. Verschiedenheit der Auffassung über das Wesen der mathematischen Objekte. Scheint so, mit den Augen des Axiomatikers betrachtet, die axiomatische Methode gerade geeignet, POINCARÉs Bedenken hinsichtlich der nicht-prädikativen Verfahren zu entkräften, so wird doch die Sachlage wesentlich anders, wenn man sich auf den Boden der sozusagen allgemein-philosophischen Grundeinstellung POINCARÉs und anderer Intuitionisten stellt (vgl. z. B. auch ENRIQUES [2] und LUSIN [2], S. 73). Von einem solchen Standpunkt aus hat die axiomatische Begründung der Mengenlehre allerdings eine recht fragwürdige Bedeutung; nicht einmal ihr Erfolg in der Bekämpfung der Antinomien erscheint dann als durchschlagend, und zwar selbst für einen Beurteiler, der wie POINCARÉ den Wert der axiomatischen Methode an sich (namentlich zur impliziten Festlegung von nicht direkt definierbaren Begriffen) noch durchaus anerkennt (vgl. POINCARÉ [6], S. 152). Es ist nämlich, auch soweit nicht gerade Anwendungen der Axiome in nicht-prädikativem Sinne erforderlich sind, *immer im Grunde der intuitive Mengenbegriff* CANTORS, *der auch innerhalb der Axiomatik das A. d. Aussonderung und demgemäß auch das A. d. Potenzmenge überhaupt erst sinnvoll macht,* und diese beiden sind ja gerade die entscheidenden Axiome. Es ist vielleicht nicht überflüssig, diesen Punkt (gleichzeitig in Ergänzung der auf S. 233 zitierten Bemerkung WEYLS) in aller Ausführlichkeit zu

kennzeichnen; wenn nämlich viele Vertreter des klassisch-axiomatischen Standpunkts die diesbezüglichen Anschauungen ihrer Gegner nicht *verstehen* und es so zu einem zwecklosen Aneinandervorbeireden kommt, so liegt das wesentlich an einer Verkennung der Tatsache, daß die Ursachen der Divergenz im allerersten Ausgangspunkt und nicht etwa in der Ausführung der Axiomatik ihren Grund haben.

Wie wesentlich die hier auftretenden Probleme gerade auch für den Axiomatiker sind, möge zunächst eine Fragestellung zeigen, die nochmals an die verschärfte Fassung V′ des Aussonderungsaxioms anknüpft; mit demselben Recht, nur weniger präzise, läßt sie sich auch mit der ursprünglichen Fassung V verbinden. Beginnt man mit endlichvielen Ausgangsmengen, etwa wiederum mit der Nullmenge und der abzählbaren Menge Z_0, so wird man zwar (vgl. S. 286f.) zu unendlichvielen Funktionen und daher bei unendlichen Mengen auch zu unendlichvielen Teilmengen gelangen können, aber nur zu *abzählbar* unendlichvielen, solange die Funktionen auf konstruktivem Wege erzeugt werden; bei der Teilmengenbildung mittels des logischen Begriffes der „sinnvollen Eigenschaft" steht es nicht anders. Einen derart eingeschränkten Charakter also trägt zunächst sogar das Aussonderungsaxiom, das im Sinne der Mengenbildung das weitaus fruchtbarste unter den Axiomen ist; die übrigen Existenzaxiome II bis VIII lassen bei gegebener Ausgangsmenge überhaupt nur auf die Existenz *éiner* bzw. *mindestens éiner* Menge schließen. Da erhebt sich die Frage: wie kann man dennoch erfolgreich Mengenlehre treiben, d. h. wie kann man überhaupt, ausgehend von endlich (oder auch von abzählbar unendlich) vielen Mengen, mittels der Axiome jenseits des Abzählbaren hinaus und zu Mengen von immer größeren Kardinalzahlen gelangen — ein Prozeß, der sich in der historischen Mengenlehre wesentlich mittels des Diagonalverfahrens, also der Bildung der Potenzmenge, abspielt?

Des Rätsels Lösung liegt offenbar darin, daß man notwendig nichtprädikative Verfahren heranzuziehen hat, wenn man den Sinn der Axiome der Potenzmenge und der Aussonderung dem tatsächlichen wissenschaftlichen Bedürfnis gemäß ausschöpfen will, und daß diese nicht-prädikativen Verfahren mehr oder weniger einen in der Axiomatik nicht ausdrücklich vorhandenen Bezugshintergrund voraussetzen (vgl. S. 327f.). Nicht nur innerhalb der Mengenlehre, sondern in der ganzen Mathematik läßt sich, wie es scheint, auf rein konstruktivem Wege — namentlich ohne Heranziehung nicht-prädikativer Prozesse — das *überabzählbar Unendliche* nicht erfassen, falls man es nicht etwa in allzu elastischer Dehnung des Begriffs „reine Anschauung" sich als unmittelbar gegeben denken will, z. B. in der Form des Kontinuums; das darf man zum mindesten wohl so lange behaupten, als nicht etwa eine reinliche Lösung des Kontinuumproblems die Kluft überbrückt, die zwischen der Potenzmenge und den Konstruktionsprinzipien der Wohlordnungs-

theorie einstweilen noch gähnt. Insoweit ist den Abschauungen der Intuitionisten sicherlich beizupflichten. Es ist sogar merkwürdig, daß bei der Kritik gegen die axiomatische Begründung der Mengenlehre es historisch in erster Linie das Auswahlaxiom gewesen ist, das einen wahren Hagel von Angriffen heftigster Art auf sich gezogen hat, und nicht vielmehr das Axiom der Potenzmenge; dieses ist ja von der rein konstruktiven Einstellung aus ebensosehr zu beanstanden, hat im übrigen aber einen viel weitergehenden und wesentlicheren Charakter innerhalb des Axiomensystems als das Axiom der Auswahl, dem gleich den Axiomen der Paarung und der Vereinigung nur beschränktere Bedeutung zukommt. Umgekehrt wird dem, der die klassische Analysis und Mengenlehre bejaht, gerade diese Erkenntnis der Unmöglichkeit, rein konstruktiv über das abzählbar Unendliche hinauszuschreiten, den Mut geben, neben den Konstruktionen auch die nichtprädikativen Prozesse etwa im Ausmaß der Definition 4b (S. 286ff.) zuzulassen.

Um nun genauer die Verschiedenheit der Standpunkte klarzulegen, mit denen die Axiomatiker und ihre Gegner an das vorliegende Problem herantreten, bedienen wir uns eines einfachen Beispiels. Wollen wir etwa die Menge aller Primzahlen oder die aller reellen transzendenten Zahlen gemäß unserem Axiomensystem bilden, so gehen wir aus von der Menge aller natürlichen Zahlen (existierend gemäß dem A. d. Unendlichen) oder der aller reellen Zahlen (gemäß demselben Axiom unter Hinzuziehung des A. d. Potenzmenge). Die Bildung der Teilmenge vollzieht sich dann nach dem A. d. Aussonderung in der Art, daß wir unter den Elementen der Ausgangsmenge m uns diejenigen ausgesondert denken, die die betreffende Eigenschaft besitzen (eine Primzahl oder eine transzendente Zahl zu sein; beide Eigenschaften sind sinnvoll und lassen sich auch gemäß Axiom V′ ausdrücken). Die Möglichkeit dieser Aussonderung ist vermöge des Axioms nur abhängig davon, daß *für jedes beliebige Element der Ausgangsmenge* m die Eigenschaft entweder zutrifft oder nicht; die „Gegebenheit" der Menge m bewirkt, daß uns auch *all ihre Elemente* gegeben sind, unter denen also diejenigen mit der gewünschten Eigenschaft zu einer neuen Menge $\overline{m}$ zu vereinigen sind. Die Möglichkeit, daß etwa das Vorhandensein gewisser Elemente in m abhängen könnte von der Bildung der Teilmenge $\overline{m}$, kommt demgemäß überhaupt nicht in Frage; *die Menge m existiert als etwas Fertiges und Abgeschlossenes vor allen mit ihr und ihren Elementen etwa noch anzustellenden Operationen*; und zwar leitet CANTOR jene Existenz inhaltlich aus dem (intuitiv oder logisch zu denkenden) Akt der Vereinigung unendlichvieler Objekte zu einem einheitlichen und abgeschlossenen Ganzen her, der Axiomatiker aber formal zunächst aus dem A. d. Unendlichen, das überhaupt erst *irgendeine* solche Menge als vorhanden postuliert, und weiterhin vornehmlich aus dem A. d. Potenzmenge,

das von jeder unendlichen Menge aus den Schritt zu einer weit umfassenderen, eben der Potenzmenge, in einem einzigen Akt vollzieht — dies letztere bemerkenswerterweise, obgleich dabei die Gesamtheit aller möglichen Anwendungen des A. d. Aussonderung eingeht! Eben wegen dieses fertigen Charakters der Menge m kann man, bildlich gesprochen, die Aussonderung der die gewünschte Eigenschaft besitzenden Elemente in aller Ruhe vollziehen, ohne Furcht vor Störungen etwa nach der Richtung, daß ein schon ausgesondertes Element die Eigenschaft nachträglich verlieren könnte aus Gründen, die mit „neu auftauchenden" Elementen der Ausgangsmenge m oder mit der Aufnahme gewisser anderer Elemente in die Teilmenge $\overline{m}$ zusammenhängen.

Auf diese Weise fällt das richtige Licht auf einen der Gesichtspunkte, aus denen heraus dem Vertreter der klassisch-axiomatischen Anschauung die Verwendung der nicht-prädikativen Verfahren keineswegs als durchweg verboten und überhaupt nicht gleicherweise als zirkelhaft erscheint wie den im § 15 geschilderten Kritikern. Wenn man mit einer Menge (z. B. der Potenzmenge $\mathfrak{U}m$) nicht nur diesen Einzelbegriff, sondern gleichzeitig all ihre Elemente (sämtliche Teilmengen von m) als gegeben betrachtet, so ist die Definition (richtiger: Determination) einer einzelnen solchen Teilmenge nicht notwendig als deren „*Konstruktion*" aufzufassen, sondern nur als ein beschreibendes Mittel zur *Unterscheidung* des betreffenden Elementes von allen übrigen Elementen. Daß in eine solche Beschreibung eines gewissermaßen schon vorher existierenden Objektes — wie z. B. einer gewissen Teilmenge von m — dann auch die Potenzmenge $\mathfrak{U}m$, also die Menge aller möglichen Teilmengen von m, eingehen kann, braucht nicht von vornherein als bedenklich zu erscheinen; der Zirkel fällt ja fort, wenn vor und unabhängig von dieser und anderen Definitionen, die die Elemente einer Menge voneinander zu *unterscheiden* bezwecken, die *Existenz* der Elemente schon vorausgesetzt wird.

Ganz anders stellt sich die Sachlage für das Auge auch des nur gemäßigten Intuitionisten dar, für den ein einzelnes Element einer „gegebenen" Menge erst dann zu existieren beginnt, wenn man es definiert hat. Nach dieser Auffassung muß man, um in einer Definition von der Gesamtheit der Elemente einer Menge sprechen zu dürfen, sich vorher diese Elemente einzeln definiert oder wenigstens definierbar denken. Demgemäß ist allenfalls schon die Menge der natürlichen Zahlen[1], ganz gewiß aber deren Potenzmenge, die Menge R aller reellen Zahlen,

[1] „Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux qu'on pourra inventer un jour . . . et c'est ce ‚*l'on pourra*' qui est l'infini." (POINCARÉ [6], S. 131.) In diesem Sonderfall wird die vorstehende Meinung freilich selbst im intuitionistischen Kreise wenig Zustimmung finden.

etwas *niemals·Fertiges oder Abgeschlossenes*[1]. Die verschiedensten in der Zukunft verborgenen mathematischen Prozesse werden neue Elemente dieser Mengen gewissermaßen erst erfinden (nicht: entdecken) lassen; gerade auch bei der Bildung von Teilmengen der Menge R handelt es sich um solche Prozesse, die ihrerseits neue Elemente von R erzeugen können. Wir können infolge der Natur von R für manche Eigenschaften behaupten, daß sie *jedem* einzelnen, wie immer definierten Element von R zukommen. Aber *alle* Elemente von R gewissermaßen gleichzeitig zu umfassen und zu beherrschen, das ist nie denkbar; nie ist die Neugeburt oder das „Sich-entwickeln" weiterer Elemente auszuschließen, weil einer unendlichen Menge ihrem Wesen nach der Charakter des stets Unfertigen, immer noch Ausdehnbaren anhaftet. Namentlich kann man, durch welche Eigenschaft immer eine Teilmenge R_0 von R definiert werde, stets noch Elemente von R bilden, deren Definition von jener Teilmenge R_0 abhängt und die möglicherweise — jedenfalls ist das Gegenteil kaum allgemein beweisbar — auf andere Art gar nicht charakterisiert werden können; es erscheint daher der geschilderten Auffassung ungereimt, solche Elemente als schon *vor* der Bildung der Teilmenge R_0 existierend anzusehen und z. B. — wie es sowohl bei CANTOR als auch in der Axiomatik geschieht — R_0 zu definieren durch eine Eigenschaft, die eine gewisse Relation jedes einzelnen Elementes von R_0 zu *sämtlichen* Elementen von R fordert, etwa durch eine Extremaleigenschaft oder dgl. Man vergleiche hierzu auch die auf S. 216f. an die RICHARDsche Antinomie geknüpften Bemerkungen.

Der Gegensatz zwischen diesen beiden Auffassungen legt es unwillkürlich nahe, daran zu denken, wie sehr die Meinungen über die Existenz von Ideen (etwa im Sinne PLATOS) auseinandergehen (vgl. auch HESSENBERG [6]). Kommt diesen eine vom Vorhandensein menschlicher oder überhaupt denkfähiger Wesen — oder mindestens von dem betreffenden Denkakt — unabhängige Existenz zu, oder existieren sie vielmehr nur, insofern sie gedacht werden? Der letzteren Auffassung, wenn sie von den Ideen auf die natürlichen oder die reellen Zahlen oder auf die Teilmengen einer beliebigen Menge spezialisiert wird, entspricht der Gedankengang des vorigen Absatzes; nach der Anschauung CANTORS dagegen, die sich namentlich auch bei BOLZANO in entschiedener Ausprägung findet, können wir uns auch die reellen Zahlen in ihrer Gesamtheit als gewissermaßen schon vor unserem Zugriff fertig aufgestapelt denken[2], so daß wir

---

[1] Man vergleiche auch die (freilich nicht mathematisch scharfe) Unterscheidung zwischen „vollendbaren" und „unvollendbaren" Mengen in dem anregenden Buche LASKER [1], vor allem aber BECKER [2].

[2] RAMSEY [1] bemerkt treffend (S. 354), daß aus der Unmöglichkeit, ein Objekt individuell zu charakterisieren, noch keineswegs folgt, daß ein derartiges Objekt in unsere Betrachtungen nicht eingehen kann; vielmehr mag es immerhin

zur Bildung einer Teilmenge nur diejenigen herauszusuchen haben, die unseren jeweiligen Wünschen gerade entsprechen. Kurz gesagt: die einen *erfinden* die Zahlen und überhaupt die mathematischen Begriffe, die andern *entdecken* sie.

Es ist höchst merkwürdig, wie sich so die übliche Unterscheidung zwischen „Realismus" und „Idealismus" geradezu umkehrt. Die Idealisten vom Schlage CANTORS, die den Ideen eine selbständige und sogar die einzig wahre Existenz oder doch jedenfalls eine echtere als der mißtrauisch betrachteten Anschauungswelt zuerkennen, werden gegenüber den mathematischen Objekten Realisten vom reinsten Wasser; da die mathematischen Objekte in unendlicher Anzahl vorhanden sind, so glauben diese „Idealisten" — auch wohl „Platonische Realisten" genannt — an ein aktuales Unendlich, das schon existierte, bevor der menschliche Geist es entdeckte. Diese Auffassung findet kein Verständnis bei den Intuitionisten oder Pragmatisten, die gerade den subjektiven Charakter nicht nur des Erkenntnisprozesses, sondern auch seines Gegenstands betonen. Nicht in unmittelbarem Zusammenhang damit, aber doch in bemerkenswerter Parallele steht die paradoxe Erscheinung, daß der enthusiastische Verfechter der rein logischen Natur der Mathematik — unter Ablehnung der „Anschauung" im Sinne BROUWERS oder auch nur KANTS und HILBERTS — eben jener RUSSELL ist, der als radikalster Empirist die äußere Wahrnehmungswelt als allein wahrhaft existierend, als Ausgangspunkt und einzig möglichen Bezugshintergrund aller Erkenntnis anspricht.

Nach alledem wird man es begreiflich finden, welch beschränkten Wert für intuitionistische Anschauungen derjenige Vorzug unserer Axiomatik besitzt, der sie in den Augen des Axiomatikers wohl am bedeutsamsten von der Einstellung CANTORS unterscheidet: der Vorzug nämlich, daß auf Grund der Axiome — abgesehen von der speziellen Menge Z_0 — die Mengen nicht wie bei CANTOR independent, gewissermaßen unmittelbar aus der Gesamtheit alles Denkbaren heraus, gebildet werden, sondern jeweils *in Anlehnung an eine schon als legitim erkannte Menge m*, von der aus eine einzige Anwendung eines der Axiome zur neuen Menge führt. Von der geschlossenen Mauer, mit der man eine Menge *m* als Scheidung der in ihr enthaltenen Elemente gegenüber der „Außenwelt" vergleichen kann, kommt man auf einem vorgezeichneten Weg zu einer anderen Mauer, deren Innengebiet der gewünschten neuen Menge entspricht. Diese Methode, die den Umfang der Mengen gegenüber der

unter den Begriff (die Menge) „aller Objekte einer gewissen Art" als Einzelobjekt (Element) fallend zu denken sein. Eine Menge reeller Zahlen z. B. von solcher Art, daß ihre Existenz nicht anders als durch das Auswahlprinzip zu sichern wäre, geht — obgleich nicht abschließend festlegbar — dennoch in die Potenzmenge der Menge der reellen Zahlen ein als ein Element, dessen Vorhandensein unter Umständen von Bedeutung ist.

CANTORschen Definition viel mehr einengt, verhindert jedenfalls die Bildung solcher paradoxer Mengen wie der RUSSELLschen, zu deren Konstruktion man die Elemente von jenseits jeder noch so umfassenden Mauer heranholen muß. Aber der Kritiker vom Schlag POINCARÉs wirft darauf ein: wenn die Widersprüche nicht von *außen* her kommen, so können sie doch jederzeit *innerhalb* der Mauer ans Licht treten, wo sie, uns unbemerkt, als Keim von Anfang an vorhanden gewesen sein mögen. Infolge des geschilderten Charakters der unendlichen Mengen als ewig *werdender* können wir uns ja niemals von vornherein einen vollständigen Überblick darüber verschaffen, was alles innerhalb der Mauer existiert, sondern müssen stets mit Neugeburten rechnen. Solche Neugeburten aber können mit dem Bazillus ihres nicht-prädikativen Charakters leicht die ganze der Axiomatik unterworfene Mengenlehre infizieren und zum Tode des Widerspruchs führen. Mag auch nur ein ganz extremer Standpunkt diese Gefahr schon für die Menge Z_0 fürchten, die als Elemente wesentlich die natürlichen Zahlen enthält, so ist doch die geschilderte Befürchtung in sich wohlbegründet für das Kontinuum und allgemein für die Potenzmenge einer beliebigen unendlichen Menge, auch dann namentlich, wenn die letztere für die Sicherheit des in ihrer Mauer sich bergenden Gebietes noch einstehen kann. In der Tat ist es ja der Übergang zur Potenzmenge, der von jeder unendlichen Menge aus mit Notwendigkeit den geschilderten, konstruktiv niemals abgeschlossen zu denkenden Prozeß der Entstehung stets neuer Elemente (nämlich von Teilmengen der Ausgangsmenge) bedingt; wohl ist der Schritt von einer Menge zu ihrer Potenzmenge ein einheitlicher und *der Außenwelt gegenüber* umgrenzter, aber doch *in sich* von so unübersehbarem Umfang, daß die Erkenntnis der unversehrten Ordnung im alten Gebiete uns noch keinen Schluß auf die Sicherheitsverhältnisse innerhalb der neuen, unvergleichlich viel mehr Raum umschließenden Mauer gestattet.

Bei allem Verständnis für diese in sich folgerichtige und von ihren eigenen Voraussetzungen aus wohl nicht angreifbare kritische Anschauung wird der Axiomatiker sich in erster Linie darauf berufen, daß ihm eben, ähnlich wie es bei CANTOR der Fall war, ein intuitiver Mengenbegriff vorschwebt, den er durch den axiomatischen Aufbau nicht sowohl forträumen als vielmehr in möglichst scharfen Formen nachbilden will. Als Substrat und letzter Bezugshintergrund der neuen Methode bleibt der alte Begriff bestehen. Abgesehen von dieser subjektiven, auf einem Gegensatz der Weltanschauung beruhenden Erwägung kann aber der Axiomatiker vor allem auch einen objektiven Unterschied zwischen den von POINCARÉ gehegten Befürchtungen und den alten Antinomien in den Vordergrund schieben. Die Antinomien sind tatsächliche Folgen aus dem Mengenbegriff CANTORS und lassen also dessen definitorischen Aufbau der Mengenlehre als endgültig un-

haltbar erscheinen. Bei der Kritik der axiomatischen Mengenlehre dagegen handelt es sich nur um Befürchtungen, deren beweiskräftiger Ausschluß bisher nicht gelungen ist; immerhin ist ein solcher — und damit die endgültige Rechtfertigung der Mengenlehre zwar nicht für Intuitionisten vom Schlag BROUWERS, wohl aber für solche vom Schlag POINCARÉS und auch noch WEYLS — sehr wohl denkbar, sei es, daß sich jede nicht-prädikative Begriffsbildung auch durch eine prädikative (etwa im Sinn von RUSSELLS Reduzibilitätsaxiom) ersetzen lassen sollte, sei es, daß trotz Scheiterns dieser Versuche die erforderlichen Begriffsbildungen nachträglich durch einen Beweis der Widerspruchsfreiheit im Sinne HILBERTS (S. 366ff.) zu rechtfertigen wären. Das letzte Verfahren würde auch noch der Forderung Genüge tun, zur Legitimierung des Unendlichen sich ausschließlich endlicher Verfahren zu bedienen, bei denen allein sich ja wohl über die unmittelbare, intuitive Anschaulichkeit und daher Sicherheit vor Widersprüchen allgemeine Übereinstimmung erzielen lassen wird. Ob freilich nicht die eine wie die andere Methode — und zwar selbst bei einer Erweiterung des Rahmens durch Zulassung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen als unmittelbar gegeben — doch die Kräfte des menschlichen Denkvermögens ihrer Natur nach übersteigt, das ist eine offene und auf Grund mancher Erwägungen wohl ernstlich erlaubte Frage.

Die miteinander so eng verknüpften Axiome der Potenzmenge und der Aussonderung (IV und V) sind, wie aus den vorstehenden Betrachtungen erhellt, mit einem den intuitionistischen Ideen völlig widersprechenden Geist erfüllt; sie können denn auch nicht in die intuitionistische Atmosphäre überführt werden, ohne daß ihre eigentliche Fruchtbarkeit, nämlich die Auswirkung auf das Überabzählbar-Unendliche, verlorengeht. Das gilt dem Kern nach auch für die scharfe Fassung V′ des Aussonderungsaxioms, wenn auch diese einem der intuitionistischen Argumente, nämlich der Kritik des allgemeinen Eigenschaftsbegriffs (BROUWER [12]), gebührend Rechnung trägt.

Ebenso zeigt, wie schon bemerkt, das Auswahlaxiom einen für den Intuitionismus unannehmbaren Charakter, insofern als es eine — nicht konstruktiv zu wendende — reine Existenzaussage darstellt. Vor allem aber wird in der Axiomatik auch durchgängig und systematisch vom Prinzip des tertium non datur Gebrauch gemacht, namentlich in der Form, daß für je zwei gegebene Mengen stets an der Disjunktion „$a \varepsilon b$ oder $a \bar{\varepsilon} b$“ festgehalten wird (vgl. S. 272 und 285f.; auch im Gegensatz zu RUSSELL, siehe S. 257). So bedeutet der axiomatische Aufbau der Mengenlehre als solcher für die Intuitionisten keine Lösung, wenn auch die meisten unter ihnen der metamathematischen Krönung der Axiomatik im Sinne HILBERTS und damit auch der Axiomatik selbst eine gewisse Bedeutung nicht absprechen werden (siehe S. 366ff.).

8. Die Paradoxie von Skolem. Im vorliegenden Zusammenhang muß schließlich noch eine aus der jüngsten Zeit stammende Paradoxie erwähnt werden, die nicht sowohl die Mengenlehre an sich als ihren axiomatischen Aufbau berührt. Da weder über die Begründung der Antinomie z. Zt. die Akten geschlossen sind, noch auch gar über ihre Bedeutung und etwaige Lösung bisher Übereinstimmung erzielt ist, so beschränken wir uns auf eine nur andeutende Schilderung.

Ein von Löwenheim [1] mit Hilfe der logistischen Methoden Schröders bewiesener Satz, den Skolem [2] — übrigens mit Benutzung des Auswahlaxioms — unter Vereinfachung des Beweises weiter ausgedehnt hat, läßt sich für unsere Zwecke in folgender Form aussprechen: Ist eine abzählbar unendliche Menge von „Zählaussagen" (s. u.) vorgelegt, die mittels der Grundrelationen der Mengenlehre gebildet sind, so sind jene Zählaussagen *entweder* nicht miteinander verträglich (also einander widersprechend), *oder* sie können — bei passender Wahl der Verknüpfungen der Objekte durch die Grundrelationen — schon erfüllt werden innerhalb eines Bereiches von Objekten, der nur *abzählbar* unendlich ist. Unter einer Zählaussage wird hierbei eine Aussage verstanden, die aus Mengen und den Grundrelationen (hier ε) mittels der fünf logistischen Grundoperationen: „und, oder, Negation, alle, es gibt" in endlicher Weise aufzubauen ist; demnach erweisen sich unsere Axiome der Mengenlehre durchweg als Zählaussagen, das Axiom der Aussonderung allerdings als eine Gesamtheit von abzählbar unendlichvielen Zählaussagen[1] (vgl. S. 286f.). Somit müßte sich (nach Skolem [3], Nr. 3) das System der Axiome der Mengenlehre, wenn es überhaupt widerspruchsfrei ist, realisieren lassen durch einen Bereich von Mengen, der bei geeigneter Verknüpfung der Mengen durch die Relation „Element sein" nur *abzählbar* unendlichviele Mengen umfaßt.

Das steht in einem zunächst unverständlichen Widerspruch mit der Tatsache, daß sich mittels des (gemäß S. 316 aus den Axiomen herleitbaren) Diagonalverfahrens die Existenz von *überabzählbaren* Mengen beweisen läßt, deren Elemente ihrerseits natürlich wiederum Mengen sind. Dieser Widerspruch läßt sich, wenn die Schlüsse Löwenheims und Skolems lückenlos und ohne Mißverständnis verlaufen, augenscheinlich nur dahin deuten, daß *der Begriff der Mächtigkeit*[2] *beim axiomatischen Vorgehen notwendig relativiert wird.* Den Unterscheidungen von „endlich", „abzählbar unendlich", „überabzählbar unendlich", wie sie sich vermöge der Axiomatik ergeben, brauchen nicht notwendig die nämlichen Unterscheidungen vom naiv-konstruktiven Standpunkt aus (etwa demjenigen Cantors) zu entsprechen; vielmehr können unter Umständen gewisse axiomatisch so unterschiedene Mengen vom naiven Standpunkt aus sämtlich als abzählbar unendlich erscheinen, indem Mengenbildungen benutzt werden, die vom axiomatischen Standpunkte aus unzulässig sind (vgl. auch S. 321). Bei diesem Widerstreit spielt die Hauptrolle offenbar die Potenzmenge, die generell den Übergang zu höheren Mächtigkeiten gestattet und die wesentlich nichtprädikativer Natur ist; in der Tat ist das Beweisverfahren von Löwenheim und Skolem in gewissem Sinn dem von Richard verwandt (vgl. S. 214 ff.). Es mag sein, daß auch hier der Gegensatz zwischen den naiven und konstruk-

[1] Daß diese Behauptung im wesentlichen zutrifft, ist recht einleuchtend, wenn auch eine bis ins Einzelne gehende Durchführung nicht vorliegt und vielleicht gewissen Schwierigkeiten begegnet, die aber mit dem Kern der Sache wenig zu tun haben.

[2] Nicht aber auch der Begriff der Ordnungszahl. Die invariante Erhaltung dieses Begriffs rettet freilich einstweilen den Kardinalzahlbegriff keineswegs, da eine rein ordinale Charakterisierung der Zahlklassen (oder ihrer Anfangszahlen) — etwa im Sinne von Hilbert [9], S. 183 — außerordentlichen Schwierigkeiten begegnet. (Bemerkung von R. Baer.)

tiven Prozessen der Mengenbildung einerseits, den axiomatischen bzw. nichtprädikativen Prozessen andererseits als Kern der Antinomie auftritt.

Vom Standpunkt des RUSSELLschen Systems könnte man allenfalls die Antinomie in dem Sinn aufzulösen suchen, daß die Abzählung der zunächst überabzählbaren Menge nur durch Funktionen von „allzu hohem" Typus gelinge, nämlich durch solche, die sich dem Reduzibilitätsaxiom nicht fügen; ob diese Auffassung durchführbar ist, bleibe dahingestellt.

§ 18. Die Axiomatik in allgemein-methodischer Hinsicht.

1. Die axiomatische Methode im allgemeinen. Nach der vorstehenden Entwicklung einer axiomatischen Begründung der Mengenlehre bleibt es noch übrig, einige Bemerkungen allgemeiner Art über die axiomatische Methode überhaupt anzufügen. Sie sollen uns ein tieferes Verständnis dieser Methode im allgemeinen und damit auch ihrer Verwendung zum Aufbau der Mengenlehre im besonderen vermitteln und überdies einige an jede Axiomatik sich knüpfende grundsätzliche Fragen hervorheben. Deren Klärung ist gerade im Fall der Mengenlehre von entscheidender Bedeutung dafür, ob wir die vorangehenden Überlegungen als eine stichhaltige und womöglich endgültige Lösung des durch die Antinomien und gewisse intuitionistische Einwände verschlungenen Knotens ansehen dürfen oder nicht.

Die axiomatische Methode besteht allgemeinhin nach WEYLS kurzer und treffender Kennzeichnung ([7], S. 16) einfach darin, „die Grundbegriffe und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln". Die „Axiome", d. h. eben die zweckentsprechend gesammelten und an die Spitze gestellten Grundtatsachen, stellen dann zwar nicht eine synthetische und inhaltliche Definition, wohl aber eine formale Umgrenzung und Erklärung der Grundbegriffe (Relationen miteingeschlossen) dar vermöge des Grundsatzes: es sollen über sie keine anderen Aussagen zulässig sein als solche, die aus den Axiomen auf dem Wege formalen deduktiven Schließens hervorgehen. Demgemäß ist jeder aus den Axiomen herleitbare Lehrsatz $\mathfrak{A}$ eigentlich nur eine Satzfunktion (S. 255) oder, anders ausgedrückt, eine Abkürzung für den echten Satz implizierender Form: wenn für die Variabeln $x, y, \ldots$ (Zeichen der Grundbegriffe) die Gesamtheit der in den Axiomen steckenden Aussagen gilt, so trifft auch $\mathfrak{A}$ für sie zu. Diese Methode entspricht durchaus dem formalen Charakter der mathematischen Sätze überhaupt, deren Richtigkeit ja, wie z. B. BOOLE schon 1847 ausdrücklich hervorhebt, nicht etwa von der inhaltlichen Deutung der verwendeten Symbole, sondern nur von den für sie vorgeschriebenen Verknüpfungsvorschriften (Rechenregeln usw.) abhängen. Man spricht bei solcher formaler Umgrenzung der Begriffe und Relationen durch Axiome zuweilen — im Gegensatz zu den *expliziten* Definitionen, wie sie sonst in der Mathematik üblich

sind und an der Spitze jeder genetischen Entwicklung einer Wissenschaft stehen — von einer *impliziten* Festlegung oder Definition der Grundbegriffe und Grundrelationen durch die Axiome; in einer freilich groben Analogie kann man den Fall zum Vergleich heranziehen, wo ein System von Gleichungen die vorkommenden Unbekannten implizit festlegt oder wenigstens hinsichtlich des Variabilitätsbereiches einschränkt. Die Implizierung ist hier allerdings ganz charakteristisch für die axiomatische Methode und man kann nicht durch eine Entwirrung der gegenseitigen Verknüpfung zu expliziten, eigentlichen Definitionen übergehen[1].

Die Entstehung und erste Entwicklung der axiomatischen Methode liegt auf dem Gebiete der Geometrie, wo am überraschendsten die Erkenntnis gewirkt haben mag, daß sich die mannigfaltige Fülle der geometrischen Tatsachen auf wenige Grundbegriffe und -sätze vollständig zurückführen läßt — im stärksten Gegensatz zu den Tatsachen der Erfahrungswelt, die auf Grund immer neuer und schärferer Beobachtung der niemals abschließend erforschbaren Sinnesobjekte stets von innen heraus unfertig bleiben. Die Axiomatisierung der Geometrie geht letzten Endes auf EUCLIDS „Elemente" zurück, dann aber vor allem auf die Erfindung und Begründung der Nichteuklidischen Geometrie durch GAUSS und seine Zeitgenossen N. J. LOBATSCHEFSKIJ und JOHANN BOLYAI (Anfang des 19. Jahrhunderts); die allgemeinere axiomatische Betrachtung hat wesentlich mit PASCHS „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882)[2] sowie mit verschiedenen Arbeiten italienischer Forscher (namentlich G. PEANOS und G. VERONESES)[3] begonnen und dann einen ersten Höhepunkt mit HILBERTS „Grundlagen der Geometrie" [2] (1899)

---

[1] Man vergleiche hierzu die in mancher Hinsicht verwandte Entwicklung in der Logik hinsichtlich der Lehre von der Begriffsbildung; vgl. Fußnote 2 auf S. 59. Von der dort zitierten Darstellung SCHLICKS sei die folgende Bemerkung als besonders charakteristisch angeführt: „Für die strenge, Schluß an Schluß reihende Wissenschaft ist folglich der Begriff in der Tat gar nichts weiter als dasjenige, wovon gewisse Urteile ausgesagt werden können. Dadurch ist er mithin auch zu definieren." ([1], S. 31.) Ähnlich auch CARNAP ([2], S. 4) in einem vornehmlich auf naturwissenschaftliche Begriffsbildung gemünzten Zusammenhang: „Die Bildung eines Begriffs besteht in der Aufstellung eines Gesetzes über die Verwendung eines Zeichens (z. B. eines Wortes) bei der Darstellung von Sachverhalten." Vgl. auch BRIDGMAN [1].

[2] PASCH [1], 1926 neuausgegeben und mit einem wesentlichen Beitrag DEHNS ausgestattet. Im übrigen vergleiche man für PASCHS eigenartige und originale (ausgesprochen empiristische) Behandlung der Probleme der mathematischen Grundlagenforschung auch PASCH [2]—[4] sowie die dort angeführte Literatur.

[3] Hervorzuheben sind (neben VERONESE [1], siehe S. 116) die HILBERT vorangehenden geometrisch-axiomatischen Arbeiten PEANO [2] und besonders PIERI [1]—[3] (vgl. hierzu die Darstellung bei RUSSELL [1] und COUTURAT [2]). Die Axiomatik PIERIS (sowie z. B. die in VEBLEN [1] entwickelte) hat gegenüber HILBERT [2] den grundsätzlichen Vorzug, sich auf einem einzigen undefinierten Grundbegriff aufzubauen.

erreicht. Während dieser Entwicklung von EUCLID bis HILBERT haben die Axiome (und gleichzeitig die in sie eingehenden Grundbegriffe) ihren Charakter von Grund auf verändert: sie werden von ihrer Ausnahmestellung als an sich evidenter, ihrer inhaltlichen Aussage nach unbezweifelbarer Feststellungen entthront und den übrigen Aussagen als grundsätzlich gleichberechtigt, nur für einen Ausgangspunkt deduktiver Herleitung besonders geeignet zur Seite gestellt, ähnlich wie — nach einem von VAILATI stammenden Vergleich — die Regierungshäupter früher in ihrer Eigenschaft als Angehörige grundsätzlich bevorrechteter Familien zur Herrschaft gelangten, heute aber mehr und mehr auf Grund einer Auslese, die ihre Befähigung zum Führeramt in den Vordergrund rückt. In unserem Jahrhundert hat dann die Axiomatik, vor allem durch die Mitarbeit HILBERTS und seiner Schüler, geradezu einen Siegeslauf durch die Mathematik und auch in manche benachbarte Wissenschaften (eine Reihe physikalischer Theorien, Logik) angetreten und ist zur Begründung sowohl der großen Teilgebiete der Mathematik wie vieler allgemeiner oder auch spezieller Einzelbegriffe (vom Begriff der Gruppe bis zu dem des arithmetischen oder geometrischen Mittels) verwendet worden. Während die wichtigsten Leistungen (auf rein mathematischem Gebiete) etwa durch die Namen PASCH (Geometrie), PEANO (natürliche Zahlen), HILBERT (Geometrie[1], reelle Zahlen), ZERMELO (Mengenlehre) bezeichnet werden können, ist die intensivste Pflege dieser Methode zahlreichen amerikanischen Forschern unter der Führung E. H. MOORES zu verdanken.

Für die Einschätzung des Wertes der axiomatischen Methode hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst kann sie eine nur *mögliche* Begründungsart darstellen, die zur Beurteilung des Aufbaus einer Theorie und zur Wertung ihrer einzelnen Bestandteile und Voraussetzungen besonders geeignet ist; neben ihr bleibt grundsätzlich gleichberechtigt, aus didaktischen oder Geschmacksgründen sogar vielfach bevorzugt die (früher allein übliche) *genetische Methode* bestehen, die die Begriffe der zu entwickelnden Theorie durch Definition, d. h. durch Zurückführung auf schon bekannte Begriffe festlegt und aus den neuen Begriffen deduktiv die Sätze der Theorie (darunter auch die „Axiome“) ableitet. Diese nur gleichberechtigte Rolle spielt die Axiomatik meist bei der Begründung spezieller Begriffe und Sonderfragen innerhalb größerer, wohlfundierter Disziplinen; aber auch für allgemeine Wissenschaftsgebiete kann in diesem Sinn die axiomatische Methode neben der genetischen stehen, so beispielsweise bei der Begründung der Theorie der reellen Zahlen, zu der man vom Begriff der ganzen und weiterhin der rationalen Zahl durch definitorisches Fortschreiten,

[1] Es sind indes auch nach HILBERT noch wesentlich verschiedene axiomatische Begründungen der Geometrie gegeben worden, unter denen die von F. SCHUR und VEBLEN hervorgehoben seien.

nämlich durch Verallgemeinerung des Zahlbegriffs gelangen kann (vgl. S. 144, Fußnote 2), oder bei der Begründung der analytischen Geometrie, die sich auf der Zahlenlehre mittels der die geometrischen Gebilde definierenden „Koordinaten" aufbauen läßt. Für gewisse grundlegende Theorien dagegen erscheint vielen die axiomatische Methode nicht nur als eine wertvolle gleichberechtigte, sondern letzten Endes als die allein mögliche Art der Begründung: wenn nämlich die genetische Methode insofern versagt, als sie an die (wirklich oder anscheinend) einfachsten Grundbegriffe der Wissenschaft überhaupt anknüpfen müßte, die nicht durch Definition auf noch einfachere zurückgeführt werden können; oder wenn die genetische, definitorische Entwicklung unvermeidlich zu logischen Widersprüchen zu führen scheint. Jenes gilt z. B. für die Lehre von den ganzen Zahlen, wenn man sie ohne *Voraussetzung* der vollständigen Induktion zu entwickeln wünscht, sowie für die Begründung der Geometrie „nach rein geometrischer Methode". Als undefinierte Grundbegriffe lassen sich im letzteren Fall etwa einführen „Punkt", „Gerade", „Ebene" und Relationen wie „liegt auf —", „liegt zwischen —", „ist kongruent mit —"; als aus diesen Grundbegriffen aufgebaute Axiome können dann z. B. Sätze wie die folgenden aufgestellt werden: „zu je zwei verschiedenen Geraden gibt es höchstens einen auf beiden gelegenen Punkt" (relationales Axiom), „zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es mindestens eine durch sie gehende Gerade" (bedingtes Existenzaxiom), „es gibt mindestens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte" (unbedingtes Existenzaxiom). Der zweitgenannte Fall einer Unumgänglichkeit der axiomatischen Begründung liegt hingegen — wenigstens für den, der die Typentheorie ablehnt und an der Möglichkeit einer ausreichenden konstruktiven Mengendefinition (vgl. S. 385) verzweifelt — bei der Mengenlehre vor, in der die Definition eines hinreichend allgemeinen Mengenbegriffs bisher nicht gelungen ist.

Nach dem Vorstehenden wird einleuchten, daß eine Axiomatik in der Regel auf zwei verschiedene Arten aufgefaßt werden kann, die in praxi freilich selten scharf auseinandergehalten werden (und es auch nicht brauchen). Im einen Fall sieht man die Objekte (und Relationen) des axiomatisch zu begründenden Gebietes schon im vorhinein als bekannt an, mag sich dies nun auf eine anderweitige strenge (genetische) Entwicklung stützen oder auch nur auf eine vorläufige, mehr anschauliche und allenfalls mit groben Umrissen sich begnügende Darstellung, wie es im Fall der Mengenlehre auch für den Standpunkt des Axiomatikers vielfach gelten mag. Bei dieser Einstellung können für die Axiomatisierung neben systematischen Erwägungen immerhin auch grundsätzliche sprechen; die beschreibende Darstellung der vielfach nicht-prädikativen Verknüpfungen zwischen den Mengen, die vom genetisch-konstruktiven Gesichtspunkt aus sicherlich unbefriedigend bleibt, liefert ein Beispiel dafür, daß eine so aufgefaßte Axiomatik

dennoch als Notwendigkeit empfunden werden kann (vgl. Nr. 7 des vorigen Paragraphen). Die andere, erst im vollen Sinne formale Betrachtungsart stellt sich auf den Standpunkt, über die Objekte und deren Verknüpfungen zunächst überhaupt nichts zu wissen, vielmehr ihre Umgrenzung restlos den Axiomen zu entnehmen; so gewinnt der Ausdruck „implizite Definition" seine scharfe Bedeutung. Allerdings ist in Rücksicht auf diese Auffassung zu betonen, daß irgendwo in der axiomatischen Erscheinungen Flucht ein ruhender Pol vorhanden sein muß: ein absoluter, inhaltlich verstandener Unterbau zu den formalen Theorien, aus dem diese letztlich ihre Kraft ziehen[1]. Es hängt von der methodischen Einstellung des Forschers, daneben freilich auch von der Einschätzung der auf formalem Weg eben noch überwindbaren Schwierigkeiten ab, ob man als solchen Unterbau eine absolute *Mengenlehre* (weil es sich in jeder Axiomatik um einen „Bereich" oder eine „Menge" von Objekten usw. handelt), eine absolute *Logik* (wegen der Bedeutung der Reduktionsregeln usw.) oder eine „*Metamathematik*" wählt; grundsätzlich genommen ist der Unterschied nicht allzu groß. Der metamathematische Standpunkt wird auf S. 366ff. ausführlich behandelt.

Den beiden oben geschilderten Auffassungen gemeinsam ist aber der formale Charakter einer jeden axiomatischen Theorie in folgendem Sinne: Da alle in der Theorie bewiesenen Aussagen deduktive Folgerungen aus den Axiomen sind, so gelten die Sätze der Theorie unverändert *für jede wie immer denkbare, mit den Axiomen verträgliche Deutung der Grundbegriffe* — gleichviel, ob diese ursprünglich, nämlich bei Aufstellung der Axiome, mit einer inhaltlichen Bedeutung umkleidet oder nur formal durch die Axiome definiert gedacht wurden. Eine Axiomatik stellt somit eigentlich eine nur hypothetische Behauptung dar: sofern für irgendein System von Objekten und Relationen (in Begriffs- oder Erfahrungswelt) bei geeigneter Interpretation der Grundbegriffe der Axiomatik sich die Aussagen der Axiome als zutreffend erweisen, so gelten dafür auch alle Lehrsätze der Theorie. Jedes System solcher Art liefert gewissermaßen eine *Realisation* der axiomatischen Theorie; auf das gegenseitige Verhältnis verschiedener Realisationen der nämlichen Axiomatik kommen wir in Nr. 4 zurück. So stellt ein Axiomensystem mit den daraus deduzierbaren Folgerungen nicht bloß éine Theorie dar, sondern ein ganzes System von solchen, eine jeweils noch ausfüllbare logische Leerform möglicher Theorien[2]. (Aus dem nämlichen Grund wird man,

[1] In diesem Sinn sind HÖLDERS Bemerkungen (gegen HILBERT) in [3], § 117, berechtigt, freilich auch ziemlich allgemein (namentlich von HILBERT selbst) anerkannt.

[2] Vgl. KEYSER [3] und [5] (S. 49ff.), WEYL [7] (S. 21) und die Darstellung in dem für den erst Lernenden besonders empfehlenswerten Aufsatz CARNAP [3] (S. 372f.).

ebenso wie die Axiome nicht eigentlich Aussagen oder Sätze, sondern „Satzfunktionen“ darstellen — vgl. S. 334 —, auch in der jeweiligen Axiomatik überhaupt nicht sowohl eine Wissenschaft als eine Wissenschaftsfunktion — „doctrinal function“ nach KEYSER [1] und [4] — erblicken, die gewissermaßen jede ihrer möglichen Realisationen als Funktionswert annimmt.)

Es verdient übrigens schon hier bemerkt zu werden, daß der Begriff „ein Axiomensystem“, wie er in dieser und den folgenden Nummern gebraucht wird, eigentlich noch einer Ergänzung bedarf: der Angabe von Regeln wie z. B. den logischen Schlußmethoden, mittels deren aus den Axiomen Folgerungen zu ziehen sind. Erst damit wird das Wirkungsfeld der Axiome, also die betreffende Wissenschaft, hinreichend festgelegt. Daß es sich dabei nicht etwa bloß um Selbstverständlichkeiten handelt, beweist z. B. der Streit um die Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten (§ 14 sowie S. 373f.). Auf diese Hinzufügung „inhaltlicher“ Regeln zum formalen axiomatischen Gerüst werden wir eingehend in Nr. 7 zurückkommen.

Als charakteristisch für eine heute vielfach verbreitete Auffassung mögen schließlich folgende Sätze HILBERTS angeführt werden, der bei der Durchsetzung des mathematischen Denkens in Form der axiomatischen Methode innerhalb der Wissenschaft überhaupt die Führerrolle übernommen hat: „Die axiomatische Methode ist tatsächlich und bleibt das unserem Geiste angemessene unentbehrliche Hilfsmittel einer jeden exakten Forschung, auf welchem Gebiete es auch sei: sie ist logisch unanfechtbar und zugleich fruchtbar; sie gewährleistet dabei der Forschung die vollste Bewegungsfreiheit. Axiomatisch verfahren heißt in diesem Sinne nichts anderes als mit Bewußtsein denken: während es früher ohne die axiomatische Methode naiv geschah, daß man an gewisse Zusammenhänge wie an Dogmen glaubte, so hebt die Axiomenlehre diese Naivität auf, läßt uns jedoch die Vorteile des Glaubens“ ([7], S. 161). Und an anderer Stelle (am Ende von [6]): „Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt“.[1]

---

[1] Zur näheren Aufklärung über das Wesen der axiomatischen Methode im allgemeinen werde verwiesen auf BALDUS [1] und [3], BERNAYS [2] und [7] (diese Arbeit ist bei Abschluß des Druckes erschienen), BOEHM [1], BOUTROUX [1], DOETSCH [1], GONSETH [1], HESSENBERG [1] und [5], HILBERT [6], HÖLDER [3], KEYSER [5], LOEWY [1], NATUCCI [1], PASCH-DEHN [1] (S. 250—262), PASCH [3], PERRON [2] (S. 208—211), POINCARÉ [6], SCHOENFLIES [6] (vgl. auch KORSELT [2]), VOSS [1], WEYL [7], J. W. YOUNG [1], ZAREMBA [1], ferner für vorwiegend philosophische Beleuchtung auf die (recht verschiedenwertigen) Schriften BECKER [2] (bes. §§ 1 und 3), BRUNSCHVICQ [1], BURALI-FORTI [2], CARNAP [3], CASSIRER [2]

Die wichtigsten der allgemeinen Fragen, die bei der axiomatischen Begründung irgendeiner Wissenschaft oder eines Einzelbegriffs untersucht werden müssen, sind die Frage der *Unabhängigkeit* der Axiome, die der *Vollständigkeit* des Axiomensystems und schließlich die der *Widerspruchslosigkeit* des Systems, mit der das Problem *des Ursprungs und der Begründung der Axiome* eng verknüpft ist. Diese Fragen sollen mit besonderer Rücksicht auf unsere vorstehende Axiomatik der Mengenlehre kurz erörtert werden, wobei das Problem der Widerspruchslosigkeit, das wichtigste und schwierigste unter ihnen, als letztes an die Reihe komme.

2. Über die Unabhängigkeit eines Axiomensystems. Der eine oder andere Leser hat vielleicht Anstoß genommen an der Unbestimmtheit der Aufgabe, geeignete Voraussetzungen oder Axiome für ein Wissenschaftsgebiet (hier für die Mengenlehre) auszuwählen, um aus ihnen dann deduktiv alle übrigen Sätze des Gebietes abzuleiten. Dabei blieb ja völlig willkürlich, *welche* Sätze wir als Axiome wählen und welche Begriffe als undefinierte Grundbegriffe, namentlich also auch *wie vielen* wir den Charakter als Axiom bzw. Grundbegriff geben. Man könnte darauf verfallen, *alle* Sätze der Mengenlehre oder wenigstens z. B. alle in diesem Buch vorgekommenen als Axiome zu charakterisieren und sich so die schwierige Arbeit zu ersparen, die in der Ableitung tieferliegender Sätze und Begriffe aus den Axiomen besteht. Wenn man natürlich ein solches Unternehmen nicht ernsthaft als axiomatische Begründung vorschlagen wird, so bleibt doch auch ohne solche Übertreibung, die nur das Bedürfnis nach einer weiteren Vorschrift in helles Licht setzen sollte, die Frage bestehen: Welche Einschränkung ist über Anzahl und Umfang der Axiome erforderlich oder wünschenswert und wie kann das offenbar erstrebenswerte Ziel, „möglichst wenig Aussagen“ in die Axiome aufzunehmen, schärfer umrissen werden? Daß es nicht auf die *Anzahl* der Axiome allein ankommen kann, ist schon deshalb klar, weil ja stets durch Zusammenschmelzen zweier Axiome (oder selbst durch ihr bloßes Aneinanderreihen mit „und“ an Stelle des Schlußpunktes) aus zwei Axiomen ein einziges hergestellt werden kann; das uns vorschwebende Einfachheitsprinzip für ein Axiomen-

---

(S. 122ff.), DINGLER [3] (1. Kap.), DUBISLAV [2], ENRIQUES [1] (Kap. III) und [4], HÖFLER [1], HUSSERL [1] (S. 248ff.) und [2] (S. 135f.), LONDON [1] (2. und 3. Kapitel; vgl. auch [2]), PADOA [2], PEANO [4], RIEFFERT [1] (S. 145ff.), ROUGIER [1], SCHLICK [1] (§ 7), STAMMLER [2] (S. 27ff.), STROHAL [1], WARRAIN [1], namentlich aber das auch für den Mathematiker aufschlußreiche Werk GEIGER [1]. Ablehnend gegenüber der Axiomatik verhält sich namentlich STUDY (vgl. z. B. den Schlußabschnitt seiner Schrift [1]); die dortige Polemik trifft jedoch die Axiomatik gerade der *Mengenlehre* um so weniger, als ja die Mengenlehre weder auf die Arithmetik noch auf die Erfahrung gegründet werden kann und ihr intuitiv-genetischer Aufbau durch CANTOR sich als unzureichend erwiesen hat.

system kann aber doch sicherlich nicht von der Interpunktion abhängen[1]!

Das gesuchte Prinzip soll nun kurz in der Forderung bestehen, daß *keines der Axiome entbehrlich sein darf*, d. h. daß *es nicht möglich sein soll, unter Zugrundelegung aller Axiome bis auf ein einziges dieses eine Axiom zu beweisen* und so in seinem Charakter als Axiom überflüssig zu machen. Ist diese Forderung erfüllt, so nennt man das betreffende Axiom *unabhängig* (oder unableitbar) von der Gesamtheit der übrigen Axiome. Es ist also für jedes einzelne Axiom des Axiomensystems zu zeigen, daß es nicht aus den übrigen Axiomen abgeleitet werden kann, so daß es unmöglich ist, mittels eines *Teiles* der Axiome die in Frage stehende Theorie zu begründen; dann ist das Axiomensystem in einem ganz bestimmten Sinn als nicht mehr reduzierbar, als möglichst einfach erkannt. Die Forderung der Unabhängigkeit eines Axiomensystems ist demnach freilich mehr ein Postulat der Schönheit und Durchsichtigkeit als der Wahrheit und Richtigkeit. Immerhin würden sich manche an die Axiomatik anschließende Fragen, wie z. B. die der Verträglichkeit der Axiome (Nr. 6), in unerträglichem Maße verwickelt gestalten, wenn man nicht durch die Unabhängigkeitsforderung von Anfang an die größtmögliche Einfachheit des Axiomensystems erzwänge.

Zunächst scheint es wohl, daß der Nachweis einer solchen Unableitbarkeit der einzelnen Axiome eine ganz besonders schwierige Aufgabe darstellt; gilt es doch zu zeigen, daß unter allen denkbaren Versuchen, ein Axiom aus der Gesamtheit der übrigen zu folgern, keiner zum Ziel führen kann, also einen Unmöglichkeitsbeweis von der auf S. 49 geschilderten Art zu führen. Man überwindet indes diese Schwierigkeit grundsätzlich verhältnismäßig einfach auf einem Weg, der jenen negativen Nachweis positiv wendet und den grundsätzlich schon die Erfinder der nichteuklidischen Geometrie eingeschlagen haben; seit seiner systematischen Beschreitung durch die italienische Axiomatikerschule und HILBERT ist er zu einem klassischen Verfahren geworden.

Die durch zwei Jahrtausende fortgesetzten Versuche, das Euklidische Parallelenaxiom (d. h. die Aussage, daß durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden höchstens éine Parallele gezogen werden kann) zu beweisen, waren nämlich naturgemäß vor allem auf indirektem Weg unternommen worden: man entwickelte aus der Annahme des Gegenteils eine Reihe von Folgerungen in der Hoffnung,

---

[1] In einem hier nicht näher zu erörternden Sinn kann man allerdings gewisse Axiomensysteme vor anderen manchmal auszeichnen durch die Eigenschaft, „die geringste Zahl von Sätzen" axiomatisch zu fordern; siehe HERTZ [1] und [2]. Einstweilen ist dieser Gesichtspunkt nur in Fällen verwertbar, die von finiter Art und viel zu einfach sind, um sich auf wissenschaftlich interessante Probleme auszuwirken, und einer erheblichen Ausdehnung werden sich wohl fast unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

diese als unsinnig (d. h. als mit den übrigen Axiomen der Geometrie im Widerspruch stehend) nachweisen zu können. Da zeigte sich zur Überraschung der mathematischen Welt, daß die Folgerungen in ihrer Gesamtheit ein keineswegs widerspruchsvolles, sondern im Gegenteil ein widerspruchsloses System darstellen von gleicher Legitimität wie die gewöhnliche Geometrie; natürlich weicht die Bedeutung der Grundbegriffe „Punkt", „Gerade" usw. wie auch der daraus abgeleiteten Begriffe im neuen System von derjenigen in der gewöhnlichen Geometrie ab. Das Gegenteil des Parallelenaxioms erweist sich somit als vereinbar mit den übrigen geometrischen Axiomen; es kann also unmöglich ein Versuch gelingen, aus diesen das Parallelenaxiom herzuleiten. Der Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie ist damit erbracht[1].

Genau ebenso verläuft nun allgemein der Beweis der Unabhängigkeit der Axiome eines Systems, d. h. der Nachweis der Unmöglichkeit, irgendein Axiom aus der Gesamtheit der übrigen zu folgern. Man konstruiert zu jedem einzelnen Axiom ein (als widerspruchsfrei geltendes oder beweisbares) Pseudosystem oder „Modell", in dem zufolge einer vom Üblichen abweichenden Deutung gewisser Grundbegriffe die Aussage des zu untersuchenden Axioms *nicht* gilt, während gleichzeitig alle übrigen Axiome erfüllt sind. In vielen Fällen schränkt die fragliche Deutung den Umfang eines Grundbegriffs gegenüber der üblichen Deutung im gesamten Axiomensystem mehr oder weniger ein, so daß nur mehr ein Teil der ursprünglich unter jenen Grundbegriff fallenden Objekte (z. B. nur mehr gewisse Sorten von „Mengen") als existierend zugelassen werden. Eine solche Deutung, die entweder auf Grund der üblichen Mathematik schon als widerspruchsfrei vorausgesetzt wird oder erst als so beschaffen zu erweisen ist, zeigt die Unabhängigkeit des verletzten Axioms von den übrigen; denn ließe sich jenes aus den übrigen Axiomen deduktiv herleiten, so müßte bei jeder Deutung zugleich mit den übrigen Axiomen auch dieses letzte *von selbst* befriedigt werden. Demnach sind so viele von der üblichen Deutung der betreffenden axiomatisierten Wissenschaft abweichende Deutungen oder Modelle, so viele „Pseudowissenschaften" anzugeben, als es Axiome für die betrachtete Wissenschaft gibt.

Aus dieser Wendung des Unabhängigkeitsproblems erhellt seine enge Verknüpfung mit der Frage der *Widerspruchsfreiheit* eines Axiomensystems, die wir später behandeln (Nr. 6); denn ein gegebenes System von Axiomen als unabhängig nachweisen heißt nach dem Vorstehenden eben: für ein gewisses zugehöriges anderes (Pseudo-) System die Wider-

---

[1] Für die mit anderen Axiomen verknüpften Unabhängigkeitsfragen in Hilberts (erster) Axiomatik der Geometrie vergleiche man Hilbert [2] (namentlich die späteren Auflagen) sowie von neuerer Literatur etwa Baldus [2] und [4], Feigl [1] und [2], Tschetweruchin [1], Weinlös [1].

spruchsfreiheit zeigen, etwa durch Herstellung einer Realisation des Pseudosystems. In der Tat war z. B. die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms endgültig erst dann erwiesen, als es KLEIN gelang, die Punkte usw. einer nichteuklidischen Geometrie derart gewissen Objekten der Euklidischen Geometrie zuzuordnen, daß deren Widerspruchslosigkeit auch der Pseudogeometrie die nämliche Eigenschaft verbürgen konnte[1]. Die Unabhängigkeit eines Axioms stimmt mit der Verträglichkeit seines (kontradiktorischen) Gegenteils überein.

Das Problem der Unabhängigkeit und damit der größtmöglichen Einfachheit eines Axiomensystems ist hiermit wenigstens in den gröbsten Umrissen skizziert. Der Wert eines Unabhängigkeitsbeweises von der geschilderten Art ist offenbar um so größer, je einheitlicher die durch den Beweis als unentbehrlich nachgewiesenen Bestandteile sind, d. h. je einfachere (nicht mehr zerspaltbare) Aussagen die einzelnen Axiome enthalten; die Aufteilung eines Axioms in mehrere einfachere Axiome, wo immer sie möglich ist, bedeutet also trotz der damit wachsenden Anzahl der Axiome regelmäßig eine Verbesserung des Axiomensystems. Das Bestreben, nicht nur für jedes Axiom als *Ganzes* die Notwendigkeit (Unableitbarkeit) zu zeigen, sondern auch nachzuweisen, daß nicht etwa überflüssige (d. h. beweisbare) *Bestandteile* in den einzelnen Axiomen auftreten, hat überdies dazu geführt, den Begriff der „Unabhängigkeit" eines Axiomensystems systematisch noch stufenweise zu verfeinern, so zum Begriff der „vollständigen Unabhängigkeit" (MOORE [1], S. 82, ferner HUNTINGTON [6] sowie die dort auf S. 277 angeführte Literatur; vgl. dazu aber INGRAHAM [1]) oder des „relativ primen" Verhältnisses (SHEFFER [2]).

Entsprechend dem weitgehenden Parallelismus, der in der Axiomatik zwischen Grundbegriffen und Axiomen besteht, ist für die Beurteilung der Einfachheit eines Axiomensystems ebenso wichtig wie die Reduktion der axiomatischen Aussagen die Reduktion der in sie eingehenden undefinierbaren *Grundbegriffe*. Für die Untersuchung der Widerspruchsfreiheit des Systems ist letztere Reduktion von besonderer Bedeutung. Man hat daher allgemein Untersuchungen über die Unabhängigkeit und Irreduzibilität der undefinierten Grundbegriffe eines Axiomensystems (in bezug auf dieses System) angestellt, um zu zeigen, daß von den eingeführten Grundbegriffen keiner entbehrt werden kann. Siehe z. B. PADOA [1] und [3] und SCHWEITZER [1], wozu namentlich TARSKI-LINDENBAUM [2] zu vergleichen ist; für eine Durchführung in der Geometrie MÜNTZ [1]).

3. Über die Unabhängigkeit des obigen Axiomensystems der Mengenlehre. Im Fall der Mengenlehre ist bei unserem Axiomensystem offen-

---

[1] Vgl. etwa die Darstellungen bei BIEBERBACH [1] (bes. S. 392 ff.) und BALDUS [3], die auch sonst den Gedankengang der gegenwärtigen und der vorigen Nummer an diesem besonders wichtigen Beispiel illustrieren.

bar die Zerspaltung der Axiome in möglichst einfache Aussagen so weit als wünschenswert vorgenommen; auch die Zahl der undefinierten Grundbegriffe (wesentlich die einzige Grundrelation ε) ist so sehr reduziert, als es überhaupt denkbar ist. In diesem Fall wird der Pseudocharakter der für den Unabhängigkeitsbeweis erforderlichen Pseudomengenlehren oder Modelle darin liegen, daß der *Mengenbegriff* anders, in der Regel enger, gefaßt wird als in der aus unserer Axiomatik sich ergebenden „echten" Mengenlehre[1]; diese Modelle werden also nicht umfassend oder nicht allgemein genug sein, um allen Tatsachen der rechtmäßigen Mengenlehre Raum zu geben, müssen aber andererseits in sich geschlossen und widerspruchslos sein, wenn sie für die jeweilige Unabhängigkeitsbehauptung beweiskräftig sein sollen. In welcher Weise für jedes Axiom eine speziellere Bedeutung des Mengenbegriffs zu wählen ist, wird der Leser in den meisten Fällen selbst zu finden in der Lage sein auf Grund der Bemerkungen, die bei den einzelnen Axiomen in § 16 gemacht wurden, um die *Notwendigkeit* der Einführung der Axiome plausibel zu machen: wenn dort das eine oder andere Axiom als erforderlich hingestellt wurde, um gewisse durch die anderen Axiome noch nicht ermöglichte Betrachtungen der Mengenlehre zu gestatten, so zeigt eben der bei Ausschluß dieser Betrachtungen übrigbleibende Torso der Mengenlehre — vorausgesetzt, daß er in sich geschlossen ist, d. h. die Anwendung der übrigen Axiome unbeschränkt gestattet — die Unabhängigkeit des betrachteten Axioms. So kann man, um für das A. d. Bestimmtheit den Unabhängigkeitsbeweis zu führen, unter „Menge" etwa „geordnete Menge" verstehen, also eine Menge nicht schon allein durch die Gesamtheit ihrer Elemente, sondern erst noch durch deren Reihenfolge sich festgelegt denken; zum Beweis der Unabhängigkeit des A. d. Potenzmenge lasse man nur endliche und abzählbare Mengen zu, zum Unabhängigkeitsbeweis für das A. d. Unendlichen überhaupt nur endliche Mengen, innerhalb deren Gesamtheit die übrigen Axiome sämtlich erfüllt sind; die Unabhängigkeit des A. d. Aussonderung kann man derart zeigen, daß man den Begriff der Teilmenge gegenüber dem üblichen sehr einschränkt, daß man z. B. für die Menge der natürlichen Zahlen (d. h. für die Menge Z_0, S. 308) nur *endliche* Teilmengen, aber keine (eigentlichen) unendlichen zuläßt; usw.[2].

Besondere Schwierigkeiten und besonderes Interesse haben sich von Anfang an mit der Frage der *Unabhängigkeit des Auswahlaxioms* ver-

---

[1] Auch eine von der üblichen Auffassung abweichende Deutung der Grundrelation $a \varepsilon b$ könnte dem nämlichen Zwecke dienen, würde aber schwierigere Überlegungen erforderlich machen.

[2] Siehe Fraenkel [5] und namentlich Vieler [1], wo diese Fragen eine sehr eingehende, wenn auch noch keineswegs erschöpfende Erörterung finden. Vgl. auch Lennes [1] und Kuratowski [4].

knüpft; es blieb offen, ob dieses viel umstrittene Axiom nicht vielleicht überhaupt als eigenes Prinzip entbehrlich, d. h. auf Grund der übrigen Axiome beweisbar sei[1]. Die Schwierigkeit dieser Untersuchung liegt besonders an folgendem Umstand: Es muß nachgewiesen werden, daß Teilmengen der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ von solchen Eigenschaften, wie sie für die Auswahlmengen der vorgelegten Menge M charakteristisch sind, nicht schon auf Grund des A. d. Aussonderung gebildet werden können, das sonst ja das normale Hilfsmittel zur Bildung von Teilmengen darstellt. Soweit nämlich dieses Axiom die Existenz derartiger Teilmengen gewährleistet, soweit sich also die Elemente einer Auswahlmenge durch eine „sinnvolle Eigenschaft“ (vgl. S. 281) hinreichend charakterisieren lassen, bedarf man ja des A. d. Auswahl überhaupt nicht, kommt vielmehr mit der Bildung von Teilmengen in *dem* Umfang aus, wie er schon durch das A. d. Aussonderung gesichert wird.. Versteht man unter M z. B. eine Menge, deren Elemente Mengen reeller Zahlen sind, so handelt es sich um die Auffindung einer Menge von reellen Zahlen, die aus jedem Element von M je éine Zahl enthält und die somit eine Auswahlmenge von M darstellt, von der aber andererseits zu beweisen wäre, daß es unmöglich ist, sie direkt mittels des Axioms der Aussonderung aus der Menge aller reellen Zahlen als Teilmenge zu gewinnen.

In einer sehr handgreiflichen Weise kann man (vgl. RUSSELL [2] und [5]) das vorliegende Problem folgendermaßen illustrieren: Es sei eine Menge von abzählbar unendlichvielen verschieden gearbeiteten *Stiefelpaaren* gegeben, so daß deren Unterscheidung durch „sinnvolle“ Eigenschaften möglich ist. Ist in jedem Paar der linke Stiefel verschieden vom rechten angefertigt, so existiert die Menge aller *linken* Stiefel als Teilmenge der Menge *aller* Stiefel nach dem A. d. Aussonderung, da diese Stiefel charakterisiert sind durch die Eigenschaft $\mathfrak{E}$, als linke Stiefel gearbeitet zu sein. Man kann daher z. B. die Äquivalenz der Menge aller Stiefel*paare* mit der Menge *aller einzelnen* Stiefel derart beweisen, daß man das erste Paar dem rechten Stiefel des ersten Paares, das zweite Paar dem linken Stiefel des ersten Paares, das dritte Paar dem rechten Stiefel des zweiten Paares zuordnet usw. Liegen dagegen statt der Stiefelpaare unendlichviele *Strumpfpaare* vor, so pflegt ja, unpraktisch genug, der rechte Strumpf nicht verschieden von dem linken hergestellt zu werden; daher ist in diesem Fall das Axiom der Auswahl unentbehrlich, wenn man die

---

[1] Diese Frage hat in der allerletzten Zeit noch eine erhöhte Bedeutung gewonnen, insofern als in HILBERTS Theorie der Widerspruchsfreiheit ein mit dem Auswahlaxiom nahe verwandtes Prinzip, das logische Auswahlaxiom, eine hervorragende Rolle spielt (siehe S. 372). — Für die Beleuchtung, in der dieses Unabhängigkeitsproblem von einem zu RUSSELL benachbarten Blickpunkt aus erscheint, vergleiche man RAMSEY [1] (S. 381 f.) und CHWISTEK [4].

Existenz einer Menge von Strümpfen sichern will, die von jedem Paar nur einen einzigen Strumpf enthält. Man kann dann ohne das Auswahlprinzip auch nicht beweisen, daß die Menge *aller* Strümpfe äquivalent ist der Menge aller *Paare* von Strümpfen. Gelingt es, diese Menge von Strumpfpaaren mathematisch nachzubilden, so wird sie das gewünschte Modell ermöglichen, das die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms zeigt.

Man hat nach alledem zum Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms den Mengenbegriff so einzuschränken, daß für eine gewisse Menge M *keine Auswahlmenge existieren kann*, während das A. d. Aussonderung gleich den übrigen Axiomen bestehen bleibt; dann liegt die Unmöglichkeit zutage, eine Auswahlmenge von M auf Grund des A. d. Aussonderung zu „bilden". Es wird begreiflich erscheinen, daß die ursprüngliche Fassung (V) des A. d. Aussonderung nicht scharf genug war, um einen derartigen Unmöglichkeitsbeweis zu führen; erst mittels der auf S. 286 erwähnten Verschärfung jenes Axioms ist der Unabhängigkeitsbeweis für das Auswahlaxiom gelungen (FRAENKEL [6]; vgl. auch [10], S. 165ff.), womit die mit jener Verschärfung verbundene Mühe aufs neue und in einem anderen, realeren Sinn als früher — nämlich durch den „Erfolg" — gerechtfertigt erscheint. In diesem Beweis wird wirklich eine mathematische Realisierung der soeben geschilderten Menge von Strumpfpaaren eingeführt, d. h. eine Menge von abzählbar unendlichvielen Paaren, für die sich zeigen läßt, daß das A. d. Aussonderung keine Auswahlmenge von ihr sichert; damit ist also nicht bloß das Auswahlaxiom überhaupt, sondern sogar seine engste Form als unabhängig erwiesen, die sich auf nur *abzählbar* unendlichviele *endliche* Mengen (hier Paare) bezieht (siehe S. 289).

Der bezeichnete Beweis betrifft übrigens nur das ursprüngliche Axiomensystem ZERMELOS, in dem neben Mengen auch noch andere „Dinge" (als Elemente von Mengen) zugelassen sind und demgemäß der Begriff der Gleichheit von Mengen wesentlich anders zu fassen ist (vgl. S. 311). Bei dieser Auffassung, wonach u. a. die letzten Bausteine oder innersten Kerne einer Menge nicht bloß wieder Mengen (also etwa schließlich die Nullmenge), sondern auch andere Dinge sein können (vgl. auch S. 354), ist der Mengenbegriff ein *weiterer*; gerade von dieser größeren Umfangsweite wird beim Unabhängigkeitsbeweis wesentlich Gebrauch gemacht. Ob auch bei unserer engeren Fassung des Mengenbegriffs das Auswahlaxiom unabhängig bleibt, darüber wird hiermit nichts entschieden. In der Tat steht ein Unabhängigkeitsbeweis in bezug auf das in § 16 angegebene Axiomensystem, in dem nur „Mengen" betrachtet werden, zur Zeit noch aus; bei der nahen Verwandtschaft zwischen der Menge Z_0 und der Menge der natürlichen Zahlen (S. 308) würde man sich wohl schon an Mengen M von Mengen reeller Zahlen (siehe vorige Seite) hinreichend orientieren können.

4. Über die Vollständigkeit eines Axiomensystems. Neben der Unabhängigkeit ist eine zweite und wichtigere Eigenschaft, die man von einem Axiomensystem wenigstens nach Möglichkeit zu erwarten pflegt, die Vollständigkeit des Systems. Diese Eigenschaft ist bisher viel weniger behandelt und, soweit es überhaupt geschah, nicht immer im gleichen Sinn verstanden worden.

Am nächsten liegt die Auffassung, wonach Vollständigkeit eines Axiomensystems erfordert, daß dieses die gesamte durch das System zu begründende Theorie umfasse und beherrsche, derart, daß jede in die Theorie einschlägige und mittels ihrer Grundbegriffe ausdrückbare Frage durch deduktive Schlüsse aus den Axiomen im einen oder anderen Sinn zu beantworten sein müsse. Eine derartige Eigenschaft des Axiomensystems würde bedingen, daß man diesem System (ohne Vermehrung der Grundbegriffe) kein weiteres Axiom hinzufügen könnte, daß das System also „vollständig" wäre[1]; denn jede einschlägige Aussage, die nicht mit dem Axiomensystem im Widerspruch steht, wäre ja eine beweisbare Folgerung und somit nicht unabhängig, d. h. nicht von der Art eines „Axioms". Offenbar steht die Beurteilung der Vollständigkeit in diesem Sinn in engem Zusammenhang mit dem in § 14 (S. 234ff.) erörterten Problem der Entscheidbarkeit mathematischer Fragen; seitdem die ältere Überzeugung, daß jede mathematische Aufgabe positiv oder negativ entschieden werden könne, ins Wanken geraten ist oder zum mindesten nicht mehr als selbstverständlich betrachtet wird, muß man auch mit der Prüfung der so verstandenen Vollständigkeit eines Axiomensystems sehr erhebliche Schwierigkeiten verknüpft sehen.

Die Verschiedenheit der hier möglichen Auffassungen mag durch ein einfaches Beispiel verdeutlicht werden. Die Frage, ob es zu einer oberhalb 2 gelegenen Zahl ein FERMATsches Zahlentripel (S. 229) gibt oder nicht, wird gefühlsmäßig von der überwältigenden Mehrzahl der Mathematiker sicher zu den entscheidbaren Fragen gerechnet. Sollte aber jemals nachzuweisen sein, daß diese Frage mit den Mitteln der Zahlentheorie nicht entschieden werden kann[2], so dürften *grundsätzlich* immer noch zwei Wege zur Erklärung dieser Tatsache offen-

---

[1] Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei hervorgehoben, daß diese Vollständigkeit begrifflich nichts zu tun hat mit der, die beim „Vollständigkeitsaxiom" (S. 356) gemeint ist; dort sind es die von den Axiomen erfaßten Objekte, hier die Axiome selbst, die keiner Erweiterung mehr fähig sein sollen. Dennoch besteht natürlich eine enge Beziehung zwischen der Aussage des Vollständigkeitsaxioms und den nachstehend erörterten Bedeutungen der Vollständigkeit eines Axiomensystems; diese Beziehung harrt im einzelnen noch der Aufklärung. Vgl. auch die in Fußnote 3 auf S. 352 angeführten Arbeiten.

[2] An die Möglichkeit eines derartigen *Nachweises*, der über die bloße Tatsache der Unentscheidbarkeit noch wesentlich hinausginge, wird im vorliegenden Fall kaum jemand ernstlich glauben; vgl. S. 234. Für einen Weg, eine derartige Möglichkeit bindend auszuschließen, vergleiche man den übernächsten Absatz.

stehen: entweder könnte man der Ansicht sein, daß eine Entscheidung jener Frage ihrer Natur nach über die Möglichkeiten der menschlichen Vernunft hinausgehe, oder die Meinung vertreten, daß nur unser bisheriger Begriff von der natürlichen Zahl nicht hinreiche, d. h. daß das Axiomensystem der Theorie der natürlichen Zahlen (Fußnote auf S. 360) nicht vollständig genug sei, um die Entscheidung jeder auf natürliche Zahlen bezüglichen Frage zu ermöglichen. In diesem Falle wäre die Hinzufügung weiterer (uns freilich kaum vorstellbarer) Axiome erforderlich, an denen sich zunächst etwa die Zahlenlehre in ähnlicher Weise zu verschiedenen möglichen Typen „gabeln" könnte, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Es könnte z. B. der FERMATsche Satz als ein derartiges Axiom in Frage kommen. Am Beispiel des Kontinuumproblems und anderer Fragen leuchtet ein, daß für die Mengenlehre eine Prüfung der Vollständigkeit unseres Axiomensystems in diesem Sinn noch weit größeren Schwierigkeiten begegnen würde und daß die zweite Möglichkeit hier in der Tat ernstlich ins Auge zu fassen wäre.

Eng verwandt mit dieser Auffassung der Vollständigkeit, aber lange nicht so weitgehend und eher einer Prüfung unterziehbar gestaltet sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems, wenn wir sie in einem Sinn verstehen, der zunächst am Beispiel der Geometrie geschildert sei. Die Aussage des Parallelenaxioms läßt sich zwar aus den übrigen geometrischen Axiomen nicht *herleiten*, doch ist sie *verträglich* mit ihnen. Aus dieser Verträglichkeit aber folgt keineswegs, daß andersartige Annahmen — solche nämlich, die dem Parallelenaxiom widersprechen — nicht ebensogut mit den übrigen Axiomen verträglich wären; vielmehr wird auch diese Verträglichkeit durch die nichteuklidischen Geometrien gewährleistet. Kurz: mehrere einander widersprechende Aussagen, die natürlich niemals beweisbare Folgen eines und desselben Axiomensystems sind, können dennoch jede für sich mit dem System vereinbar sein; ein solches Axiomensystem läßt nicht bloß im Sinn der Deduzierbarkeit mit den gegenwärtigen oder künftigen Hilfsmitteln der Mathematik, sondern in einem absoluten Sinn (darstellbar durch Unabhängigkeitsbeweise) die Frage offen, ob gewisse einschlägige Fragen so oder so zu beantworten sind. Ein derartiges Axiomensystem wird mit Fug und Recht als unvollständig zu bezeichnen sein. Mit mehr Aussicht auf tatsächliche Klärung, als es bei der Auffassung des vorigen Absatzes der Fall war, wird man das Problem der Vollständigkeit also folgendermaßen stellen können: $\mathfrak{A}$ sei eine in das Axiomensystem einschlägige Aussage; gleichviel ob es gelingen mag, die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}$ aus dem System zu deduzieren oder eine solche Deduzierbarkeit auch nur theoretisch sicherzustellen, so soll jedenfalls nur *entweder* die Richtigkeit *oder* die Falschheit von $\mathfrak{A}$ — nicht aber jede dieser beiden Möglichkeiten — mit dem Axiomensystem vereinbar sein, wenn dieses als „vollständig" gelten

soll. Hier wird also nicht die überspannte Forderung gestellt, daß die Entscheidbarkeit von $\mathfrak{A}$ gesichert sei, sondern nur eine sozusagen interne Festlegung des Gebietes durch die Axiome gefordert. Danach wird zwar z. B. ein Axiomensystem der Geometrie, ohne Parallelenaxiom genommen, nach wie vor mit Recht als unvollständig zu bezeichnen sein, nicht aber das die natürlichen Zahlen bestimmende Axiomensystem; denn ob nun das FERMATsche Problem lösbar ist oder nicht, jedenfalls liegt in der Verträglichkeit der zu FERMAT entgegengesetzten Behauptung die Aussage: ein Zahlensystem (x, y, z, n) von der Eigenschaft $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$ ist denkbar; damit erscheint aber die Richtigkeit der FERMATschen Behauptung widerlegt[1]. Wenn im Falle der Mengenlehre hingegen etwa das Kontinuumproblem sogar im weitergehenden Sinn offen bleiben, d. h. sowohl die Annahme $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ wie auch ihre Verneinung mit den Axiomen verträglich sein sollte, so wären damit die benutzten Axiomensysteme als unvollständig erwiesen; dann wäre auf diese Weise auch das Geheimnis entschleiert, warum sich beide Annahmen so beharrlich und spröde allen daran gesetzten Bemühungen entzogen haben[2].

Ganz anders beschaffen ist schließlich ein weiterer Sinn der Vollständigkeit eines Axiomensystems, wie er in aller Ausführlichkeit wohl zuerst von VEBLEN gekennzeichnet worden ist ([1], S. 346; vgl. auch HUNTINGTON [1], S. 264, sowie COUTURAT [2], S. 179). Danach heißt ein Axiomensystem vollständig — auch „kategorisch" (VEBLEN) oder „monomorph" (FEIGL-CARNAP) — wenn es die ihm unterworfenen mathematischen Objekte samt den Grundrelationen *formal in eindeutiger Weise* festlegt; derart also, daß zwischen zwei verschiedenen Realisationen der Übergang durch eine umkehrbar eindeutige und isomorphe[3] Zuordnung hergestellt werden kann[4]. Schärfer ausgedrückt und auf unseren Fall der Mengenlehre bezogen: Hat man auf zwei verschiedene Arten, jeweils im Einklang mit den Axiomen, eine Deutung des Begriffs Menge (insbesondere auch dem Umfang nach) und der Grundrelation $a \varepsilon b$ gewählt, so muß es, falls das Axiomensystem als vollständig gelten soll, möglich sein,

---

[1] Vgl. hierzu den nächsten Absatz. An dem anscheinenden „Monomorphismus" (siehe dort) des Bereichs der natürlichen Zahlen liegt es, daß die Existenz eines FERMATschen Tripels in *irgendeiner* Arithmetik auch schon das Vorkommen eines ebensolchen in jeder anderen nach sich zieht. Doch ist auf diesem Gebiet noch manches ungeklärt und auch eine andere Auffassung als die obige möglich (vgl. S. 354).

[2] Man vergleiche zu diesem Gegenstand BAER [4].

[3] Der Ausdruck „isomorph" hat hier einen erheblich allgemeineren Sinn als sonst (in der Gruppen- und Körpertheorie) üblich. In der Tat ist der Isomorphismus auf beliebige Relationen anwendbar, nicht bloß auf die als „Operationen" bezeichneten drei- und mehrgliedrigen Relationen.

[4] Die (noch nicht völlig geklärte) Frage, inwieweit dieser Vollständigkeitsbegriff seinerseits schon die Mengenlehre *voraussetzt* (wegen der zu benutzenden Zuordnung), möge hier außer Erörterung bleiben.

stehen: entweder könnte man der Ansicht sein, daß eine Entscheidung jener Frage ihrer Natur nach über die Möglichkeiten der menschlichen Vernunft hinausgehe, oder die Meinung vertreten, daß nur unser bisheriger Begriff von der natürlichen Zahl nicht hinreiche, d. h. daß das Axiomensystem der Theorie der natürlichen Zahlen (Fußnote auf S. 360) nicht vollständig genug sei, um die Entscheidung jeder auf natürliche Zahlen bezüglichen Frage zu ermöglichen. In diesem Falle wäre die Hinzufügung weiterer (uns freilich kaum vorstellbarer) Axiome erforderlich, an denen sich zunächst etwa die Zahlenlehre in ähnlicher Weise zu verschiedenen möglichen Typen „gabeln" könnte, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Es könnte z. B. der FERMATsche Satz als ein derartiges Axiom in Frage kommen. Am Beispiel des Kontinuumproblems und anderer Fragen leuchtet ein, daß für die Mengenlehre eine Prüfung der Vollständigkeit unseres Axiomensystems in diesem Sinn noch weit größeren Schwierigkeiten begegnen würde und daß die zweite Möglichkeit hier in der Tat ernstlich ins Auge zu fassen wäre.

Eng verwandt mit dieser Auffassung der Vollständigkeit, aber lange nicht so weitgehend und eher einer Prüfung unterziehbar gestaltet sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems, wenn wir sie in einem Sinn verstehen, der zunächst am Beispiel der Geometrie geschildert sei. Die Aussage des Parallelenaxioms läßt sich zwar aus den übrigen geometrischen Axiomen nicht *herleiten*, doch ist sie *verträglich* mit ihnen. Aus dieser Verträglichkeit aber folgt keineswegs, daß andersartige Annahmen — solche nämlich, die dem Parallelenaxiom widersprechen — nicht ebensogut mit den übrigen Axiomen verträglich wären; vielmehr wird auch diese Verträglichkeit durch die nichteuklidischen Geometrien gewährleistet. Kurz: mehrere einander widersprechende Aussagen, die natürlich niemals beweisbare Folgen eines und desselben Axiomensystems sind, können dennoch jede für sich mit dem System vereinbar sein; ein solches Axiomensystem läßt nicht bloß im Sinn der Deduzierbarkeit mit den gegenwärtigen oder künftigen Hilfsmitteln der Mathematik, sondern in einem absoluten Sinn (darstellbar durch Unabhängigkeitsbeweise) die Frage offen, ob gewisse einschlägige Fragen so oder so zu beantworten sind. Ein derartiges Axiomensystem wird mit Fug und Recht als unvollständig zu bezeichnen sein. Mit mehr Aussicht auf tatsächliche Klärung, als es bei der Auffassung des vorigen Absatzes der Fall war, wird man das Problem der Vollständigkeit also folgendermaßen stellen können: $\mathfrak{A}$ sei eine in das Axiomensystem einschlägige Aussage; gleichviel ob es gelingen mag, die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}$ aus dem System zu deduzieren oder eine solche Deduzierbarkeit auch nur theoretisch sicherzustellen, so soll jedenfalls nur *entweder* die Richtigkeit *oder* die Falschheit von $\mathfrak{A}$ — nicht aber jede dieser beiden Möglichkeiten — mit dem Axiomensystem vereinbar sein, wenn dieses als „vollständig" gelten

bei denen ein im Kern gleichartiger Problemkreis auftritt und nach einer Lösung verlangt, der ohne die Axiomatisierung angesichts der verschiedenen Erscheinungsformen und Sondereigenschaften der jeweiligen Objekte zu verschiedenartigen, jedesmal mit eigenen Schwierigkeiten verbundenen Lösungsmethoden führen würde oder auch wirklich geführt hat[1]. In der Tat hat die Axiomatisierung in gar manchen Fällen zu weitgehenden Vereinfachungen geführt[2], wie besonders die fast alle Teile der Mathematik durchdringende abstrakte Gruppen- und Körpertheorie, aber auch rein geometrische Betrachtungen zeigen. Für eine so stark vereinfachende Wirkung kommen allgemeinhin Axiomensysteme mit „nicht zu weit gehenden" Axiomaussagen in Betracht. Der Wert einer derartigen Axiomatisierung steigert sich noch dadurch, daß — entgegen einer vielleicht naheliegenden Vermutung — die Betrachtungen durch den Fortfall des gewissermaßen konkreten, aber für den gewünschten Zweck unwesentlichen Beiwerks dieser oder jener Realisation gerade an Einfachheit und Durchsichtigkeit gewinnen. Für die, rein axiomatisch gesehen, wichtigsten Fälle, nämlich für die Axiomatisierungen ganzer Wissenschaften (Arithmetik, Geometrie, Mengenlehre) kommt allerdings der bezeichnete Vorteil kaum recht zur Geltung, weil sich schwer weitere wesentlich verschiedene Realisationen finden, die den mannigfachen und weitgehenden durch die Axiome auferlegten Bindungen sich fügen; diese sind eben dann der zu axiomatisierenden Disziplin „allzu eng" auf den Leib geschnitten.

Wie immer man übrigens die Kriterien wählen mag, nach denen ein Axiomensystem als „vollständig" gelten soll, stets kann man in gewissem Sinn von einer — wenn auch nur formalen — *ausdrücklichen Festlegung des betreffenden Wissensgebietes* durch die Axiomatik sprechen. So wird, während die Grundbegriffe durch die Axiome nur implizit bestimmt sind (S. 335), durch das System auch eine explizite Definition hergestellt: die Definition der betreffenden Disziplin im formalen Sinn.

Wenn man die drei verschiedenen (und übrigens keineswegs alle sinnvollen Möglichkeiten erschöpfenden) vorstehend geschilderten Bedeutungen, die mit der „Vollständigkeit" eines Axiomensystems verbunden werden, in Beziehung zueinander setzen will, so gebührt offenbar eine Sonderstellung der Vollständigkeit im ersten Sinn, die man mit einem treffenden Ausdruck auch als „Entscheidungsdefinitheit"

[1] Die Anwendung einer theoretischen Wissenschaft auf Gegenstände der Wahrnehmung oder Erfahrung, z. B. die der reinen Geometrie auf die Punkte, Geraden usw. des physischen Raumes, gestaltet sich so — mindestens grundsätzlich — besonders einfach, insofern als nur das Erfülltsein der *Axiome* und nicht etwa aller einschlägigen Sätze durch geeignet zu wählende Erfahrungsbegriffe nachzuprüfen ist.

[2] Die wichtigsten neueren Beispiele sind wohl Moore [1] und Steinitz [1]; besonders von letzterem Aufsatze leitet sich eine überaus nachhaltige Befruchtung der Algebra im weitesten Sinne her.

stehen: entweder könnte man der Ansicht sein, daß eine Entscheidung jener Frage ihrer Natur nach über die Möglichkeiten der menschlichen Vernunft hinausgehe, oder die Meinung vertreten, daß nur unser bisheriger Begriff von der natürlichen Zahl nicht hinreiche, d. h. daß das Axiomensystem der Theorie der natürlichen Zahlen (Fußnote auf S. 360) nicht vollständig genug sei, um die Entscheidung jeder auf natürliche Zahlen bezüglichen Frage zu ermöglichen. In diesem Falle wäre die Hinzufügung weiterer (uns freilich kaum vorstellbarer) Axiome erforderlich, an denen sich zunächst etwa die Zahlenlehre in ähnlicher Weise zu verschiedenen möglichen Typen „gabeln" könnte, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Es könnte z. B. der FERMATsche Satz als ein derartiges Axiom in Frage kommen. Am Beispiel des Kontinuumproblems und anderer Fragen leuchtet ein, daß für die Mengenlehre eine Prüfung der Vollständigkeit unseres Axiomensystems in diesem Sinn noch weit größeren Schwierigkeiten begegnen würde und daß die zweite Möglichkeit hier in der Tat ernstlich ins Auge zu fassen wäre.

Eng verwandt mit dieser Auffassung der Vollständigkeit, aber lange nicht so weitgehend und eher einer Prüfung unterziehbar gestaltet sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems, wenn wir sie in einem Sinn verstehen, der zunächst am Beispiel der Geometrie geschildert sei. Die Aussage des Parallelenaxioms läßt sich zwar aus den übrigen geometrischen Axiomen nicht *herleiten*, doch ist sie *verträglich* mit ihnen. Aus dieser Verträglichkeit aber folgt keineswegs, daß andersartige Annahmen — solche nämlich, die dem Parallelenaxiom widersprechen — nicht ebensogut mit den übrigen Axiomen verträglich wären; vielmehr wird auch diese Verträglichkeit durch die nichteuklidischen Geometrien gewährleistet. Kurz: mehrere einander widersprechende Aussagen, die natürlich niemals beweisbare Folgen eines und desselben Axiomensystems sind, können dennoch jede für sich mit dem System vereinbar sein; ein solches Axiomensystem läßt nicht bloß im Sinn der Deduzierbarkeit mit den gegenwärtigen oder künftigen Hilfsmitteln der Mathematik, sondern in einem absoluten Sinn (darstellbar durch Unabhängigkeitsbeweise) die Frage offen, ob gewisse einschlägige Fragen so oder so zu beantworten sind. Ein derartiges Axiomensystem wird mit Fug und Recht als unvollständig zu bezeichnen sein. Mit mehr Aussicht auf tatsächliche Klärung, als es bei der Auffassung des vorigen Absatzes der Fall war, wird man das Problem der Vollständigkeit also folgendermaßen stellen können: $\mathfrak{A}$ sei eine in das Axiomensystem einschlägige Aussage; gleichviel ob es gelingen mag, die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}$ aus dem System zu deduzieren oder eine solche Deduzierbarkeit auch nur theoretisch sicherzustellen, so soll jedenfalls nur *entweder* die Richtigkeit *oder* die Falschheit von $\mathfrak{A}$ — nicht aber jede dieser beiden Möglichkeiten — mit dem Axiomensystem vereinbar sein, wenn dieses als „vollständig" gelten

schein hat, verbürgt die — noch genauer zu präzisierende — Vollständigkeit in dem an letzter Stelle geschilderten Sinn für sich allein schon, daß das System auch vollständig ist in der an zweiter Stelle angegebenen Bedeutung. Denn träfe in éiner Realisation (Modell) des Systems die Aussage 𝔄, in einer anderen die negativ entsprechende $\overline{\mathfrak{A}}$ zu, dann stünde dies — so etwa wird man schließen — in einem Widerspruch damit, daß bei einer (infolge des vorausgesetzten „Monomorphismus" jedenfalls möglichen) isomorphen Abbildung zwischen den Grundobjekten und -relationen in beiden Modellen ja der richtigen Aussage 𝔄 auch die korrespondierende, und nicht die dieser entgegengesetzte, als richtig entsprechen müßte. Man veranschaulicht sich diesen Gedankengang etwa an den einander entgegengesetzten Antworten auf die Frage nach der Existenz FERMATscher Zahlentripel, wobei ein als monomorph geltendes Axiomensystem (für die natürlichen Zahlen) zugrunde liegt. Wenn man, wie noch offen ist, in aller Strenge so schließen darf, so legt ein monomorphes Axiomensystem die betreffende Wissenschaft in dem Sinne erschöpfend fest, daß sie sich an keinem zur Zeit noch offenen einschlägigen Problem in entsprechender Weise gabeln kann, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Die Lehre von den natürlichen oder den reellen Zahlen oder auch die Euklidische Geometrie ist aber in der Tat monomorph bestimmt[1], so daß die Gabelung am letzten FERMATschen Satz oder an der Transzendenz von π^{π} ausgeschlossen erscheint[2]. Man wird geneigt sein, auch im umgekehrten Sinn aus der an zweiter Stelle bezeichneten Vollständigkeit eines Axiomensystems dessen monomorphen Charakter zu folgern, indem man darauf verweist, daß zwei *nicht* isomorphe Modelle sich in einschlägigen Eigenschaften unterscheiden müßten und so auf Aussagen führten, die selbst sowohl wie auch ihre Negationen mit den Axiomen verträglich wären; doch ist es noch umstritten, ob diese Umkehrung sich durchführen läßt. Im Fall des Erfolges würde man dazu gelangen, die beiden wesentlichen Bedeutungen, die oben der Vollständigkeit eines Axiomensystems beigelegt wurden und die begrifflich ganz verschieden sind, dennoch als sachlich gleichwertig anzusehen.

Indes stellen die hiermit angedeuteten Überlegungen, auch wenn sie im einzelnen näher ausgeführt werden, keineswegs schon vollgültige

---

Grund einer Zahlenidentität, also ohne eigenes Axiom sicherzustellen (im Gegensatz zum Fall des Parallelenaxioms); deshalb werden die einschlägigen Bemerkungen BORELS (a. a. O.) wohl meist auf Widerspruch stoßen.

[1] Wenigstens ergibt sich das leicht auf die übliche Methode, hinsichtlich deren man allerdings u. a. einwenden kann, sie sei im Kern mengentheoretisch orientiert und von der analogen Frage in der Mengenlehre mehr oder weniger abhängig. Vgl. die Fußnote 4 auf S. 349.

[2] Ob dennoch ein etwa „unbeweisbarer, aber richtiger" Satz dieser Art sich als neues Axiom dem Axiomensystem hinzufügen ließe, läßt bei der mathematischen Ungreifbarkeit der in Anführungszeichen gesetzten Worte kaum eine Erörterung zu.

stehen: entweder könnte man der Ansicht sein, daß eine Entscheidung jener Frage ihrer Natur nach über die Möglichkeiten der menschlichen Vernunft hinausgehe, oder die Meinung vertreten, daß nur unser bisheriger Begriff von der natürlichen Zahl nicht hinreiche, d. h. daß das Axiomensystem der Theorie der natürlichen Zahlen (Fußnote auf S. 360) nicht vollständig genug sei, um die Entscheidung jeder auf natürliche Zahlen bezüglichen Frage zu ermöglichen. In diesem Falle wäre die Hinzufügung weiterer (uns freilich kaum vorstellbarer) Axiome erforderlich, an denen sich zunächst etwa die Zahlenlehre in ähnlicher Weise zu verschiedenen möglichen Typen „gabeln" könnte, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Es könnte z. B. der FERMATsche Satz als ein derartiges Axiom in Frage kommen. Am Beispiel des Kontinuumproblems und anderer Fragen leuchtet ein, daß für die Mengenlehre eine Prüfung der Vollständigkeit unseres Axiomensystems in diesem Sinn noch weit größeren Schwierigkeiten begegnen würde und daß die zweite Möglichkeit hier in der Tat ernstlich ins Auge zu fassen wäre.

Eng verwandt mit dieser Auffassung der Vollständigkeit, aber lange nicht so weitgehend und eher einer Prüfung unterziehbar gestaltet sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems, wenn wir sie in einem Sinn verstehen, der zunächst am Beispiel der Geometrie geschildert sei. Die Aussage des Parallelenaxioms läßt sich zwar aus den übrigen geometrischen Axiomen nicht *herleiten*, doch ist sie *verträglich* mit ihnen. Aus dieser Verträglichkeit aber folgt keineswegs, daß andersartige Annahmen — solche nämlich, die dem Parallelenaxiom widersprechen — nicht ebensogut mit den übrigen Axiomen verträglich wären; vielmehr wird auch diese Verträglichkeit durch die nichteuklidischen Geometrien gewährleistet. Kurz: mehrere einander widersprechende Aussagen, die natürlich niemals beweisbare Folgen eines und desselben Axiomensystems sind, können dennoch jede für sich mit dem System vereinbar sein; ein solches Axiomensystem läßt nicht bloß im Sinn der Deduzierbarkeit mit den gegenwärtigen oder künftigen Hilfsmitteln der Mathematik, sondern in einem absoluten Sinn (darstellbar durch Unabhängigkeitsbeweise) die Frage offen, ob gewisse einschlägige Fragen so oder so zu beantworten sind. Ein derartiges Axiomensystem wird mit Fug und Recht als unvollständig zu bezeichnen sein. Mit mehr Aussicht auf tatsächliche Klärung, als es bei der Auffassung des vorigen Absatzes der Fall war, wird man das Problem der Vollständigkeit also folgendermaßen stellen können: $\mathfrak{A}$ sei eine in das Axiomensystem einschlägige Aussage; gleichviel ob es gelingen mag, die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}$ aus dem System zu deduzieren oder eine solche Deduzierbarkeit auch nur theoretisch sicherzustellen, so soll jedenfalls nur *entweder* die Richtigkeit *oder* die Falschheit von $\mathfrak{A}$ — nicht aber jede dieser beiden Möglichkeiten — mit dem Axiomensystem vereinbar sein, wenn dieses als „vollständig" gelten

Grund der Axiome noch nicht entscheiden, ob es z. B. Mengen gibt, die sich selbst als Element enthalten (vgl. RUSSELLS Antinomie, S. 211), was bei dem rein formalen Charakter der Relation ε keineswegs von vornherein absurd, vielmehr höchstwahrscheinlich widerspruchsfrei annehmbar ist. Auf der anderen Seite sind auch Mengen mit der Axiomatik vereinbar, deren Elemente weder Mengen noch auf bloße Mengen zurückzuführen sind, wie z. B. Mengen von Objekten der Außenwelt. Die Existenz solcher und ähnlicher, dem Mathematiker z. T. jedenfalls nicht allzu sympathischer Mengen ist auf Grund unserer Axiome nicht *ausgeschlossen*, noch viel weniger freilich etwa *gesichert*. Demnach läßt sich mit dem vorstehenden Axiomensystem ebensowohl z. B. eine Deutung des Grundbegriffs „Menge" vereinen, bei der eine Menge Element ihrer selbst sein kann, wie auch die entgegengesetzte Annahme mit den Axiomen verträglich ist. Das Axiomensystem legt also den Mengenbegriff sicherlich nicht in unzweideutiger Weise fest, es ist nicht monomorph.

Die verschiedenen hiernach noch bestehenden Möglichkeiten bezüglich der überhaupt existierenden Mengen zu beschränken und als innersten Kern aller vorkommenden Mengen nur die Nullmenge zuzulassen, ist — auch abgesehen von dem Ziel der Vollständigkeit unseres Axiomensystems — sehr wünschenswert. Eine solche Beschränkung würde eine Vereinfachung des mengentheoretischen Gebäudes bedeuten, ohne daß dieses dadurch an Bedeutung und Anwendbarkeit verlöre. Denn wohl alle mathematisch bedeutsamen Mengen, z. B. die Mengen von Zahlen oder Punkten, können, nötigenfalls unter Änderung der Bezeichnung, mit einer so eingeschränkten Axiomatik gesichert werden. Andererseits stehen Mengen der im vorigen Absatz geschilderten Art, die nach den bisherigen Axiomen zulässig sind, mit gewissen paradoxen Mengen in zu engem Zusammenhang (vgl. MIRIMANOFF a. a. O.), als daß die Zulassung solcher Mengen gleichgültig erscheinen könnte.

Wenn es überhaupt möglich ist, diesen Mangel bei einem wie immer gearteten axiomatischen Aufbau der Mengenlehre zu vermeiden, so muß dies im vorliegenden Fall wohl in der Weise geschehen, daß *der Mengenbegriff so enge beschränkt wird, als es mit den Axiomen I—VII (und eventuell VIII) überhaupt verträglich erscheint*. Das läuft dann in der Tat wohl darauf hinaus, daß als Ausgangspunkt die Nullmenge festgesetzt wird, die so als ursprünglicher Baustein aller Mengen dient. Dann sind nur solche Mengen zulässig, die aus der Nullmenge und den etwa durch Axiom VII geforderten Mengen durch beliebige, aber natürlich endlichmalige Anwendung der einzelnen Axiome hervorgehen; namentlich also nur Mengen, die sich *nicht* als Element enthalten. Eine derartige Einschränkung des Mengenbegriffs würde erreicht durch eine Forderung, die man ohne Anspruch auf möglichst scharfe Fassung etwa folgendermaßen ausdrücken kann (vgl. WEYL [1] und FRAENKEL [5]):

Axiom der Beschränktheit. Außer den durch die Axiome II bis VII (bzw. VIII) geforderten Mengen existieren keine weiteren Mengen.

Man kann das Axiom auch dahin ausdrücken, daß der Begriff der Menge so eng sein solle, als es mit den bisherigen Axiomen überhaupt vereinbar ist. In beiden Fassungen ist das induktive Moment wesentlich. Offenbar trägt dieses Axiom einen wesentlich andersartigen Charakter als alle bisherigen; es ist weder relational noch im gewöhnlichen Sinn existential, vielmehr gehen die übrigen *Axiome* (nicht nur die Grundrelation und der Mengenbegriff) wesentlich in

stehen: entweder könnte man der Ansicht sein, daß eine Entscheidung jener Frage ihrer Natur nach über die Möglichkeiten der menschlichen Vernunft hinausgehe, oder die Meinung vertreten, daß nur unser bisheriger Begriff von der natürlichen Zahl nicht hinreiche, d. h. daß das Axiomensystem der Theorie der natürlichen Zahlen (Fußnote auf S. 360) nicht vollständig genug sei, um die Entscheidung jeder auf natürliche Zahlen bezüglichen Frage zu ermöglichen. In diesem Falle wäre die Hinzufügung weiterer (uns freilich kaum vorstellbarer) Axiome erforderlich, an denen sich zunächst etwa die Zahlenlehre in ähnlicher Weise zu verschiedenen möglichen Typen „gabeln" könnte, wie die Geometrie am Parallelenaxiom. Es könnte z. B. der FERMATsche Satz als ein derartiges Axiom in Frage kommen. Am Beispiel des Kontinuumproblems und anderer Fragen leuchtet ein, daß für die Mengenlehre eine Prüfung der Vollständigkeit unseres Axiomensystems in diesem Sinn noch weit größeren Schwierigkeiten begegnen würde und daß die zweite Möglichkeit hier in der Tat ernstlich ins Auge zu fassen wäre.

Eng verwandt mit dieser Auffassung der Vollständigkeit, aber lange nicht so weitgehend und eher einer Prüfung unterziehbar gestaltet sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems, wenn wir sie in einem Sinn verstehen, der zunächst am Beispiel der Geometrie geschildert sei. Die Aussage des Parallelenaxioms läßt sich zwar aus den übrigen geometrischen Axiomen nicht *herleiten*, doch ist sie *verträglich* mit ihnen. Aus dieser Verträglichkeit aber folgt keineswegs, daß andersartige Annahmen — solche nämlich, die dem Parallelenaxiom widersprechen — nicht ebensogut mit den übrigen Axiomen verträglich wären; vielmehr wird auch diese Verträglichkeit durch die nichteuklidischen Geometrien gewährleistet. Kurz: mehrere einander widersprechende Aussagen, die natürlich niemals beweisbare Folgen eines und desselben Axiomensystems sind, können dennoch jede für sich mit dem System vereinbar sein; ein solches Axiomensystem läßt nicht bloß im Sinn der Deduzierbarkeit mit den gegenwärtigen oder künftigen Hilfsmitteln der Mathematik, sondern in einem absoluten Sinn (darstellbar durch Unabhängigkeitsbeweise) die Frage offen, ob gewisse einschlägige Fragen so oder so zu beantworten sind. Ein derartiges Axiomensystem wird mit Fug und Recht als unvollständig zu bezeichnen sein. Mit mehr Aussicht auf tatsächliche Klärung, als es bei der Auffassung des vorigen Absatzes der Fall war, wird man das Problem der Vollständigkeit also folgendermaßen stellen können: $\mathfrak{A}$ sei eine in das Axiomensystem einschlägige Aussage; gleichviel ob es gelingen mag, die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}$ aus dem System zu deduzieren oder eine solche Deduzierbarkeit auch nur theoretisch sicherzustellen, so soll jedenfalls nur *entweder* die Richtigkeit *oder* die Falschheit von $\mathfrak{A}$ — nicht aber jede dieser beiden Möglichkeiten — mit dem Axiomensystem vereinbar sein, wenn dieses als „vollständig" gelten

kennzeichnet und die Aussagen der Axiome wurden, mindestens in ihrer großen Mehrzahl, teils als analytische Urteile, teils als unmittelbare Tatsachen der Erfahrung oder der inneren Anschauung betrachtet; so angesehen bedurften sie keiner Begründung und konnten, da evident, keinesfalls zu Widersprüchen Anlaß geben. Ein derartiger Gedankengang erscheint uns heute nicht nur deshalb als unbefriedigend, weil unser Vertrauen auf die Zuverlässigkeit der Erfahrung oder der Anschauung durch mancherlei unbezweifelbare mathematische Tatsachen[1] erschüttert ist; vielmehr können wir uns von vornherein mit viel weniger Recht auf unmittelbare Anschauung berufen angesichts der Entwicklung, die sich — übrigens schon lange vor EUCLID beginnend — bezüglich der Auswahl der Axiome vollzogen hat und auf die hinzuweisen nicht überflüssig sein wird.

Wenn man unter den Sätzen eines mathematischen Gebietes, z. B. der Geometrie oder der Algebra oder der Mengenlehre, eine Anzahl auswählen und als Axiome hervorheben will, so hat man nach dem Vorangehenden allenfalls darauf zu achten, daß das Axiomensystem möglichst unabhängig und vollständig ist, also keine überflüssigen Bestandteile aufweist und kein zur Begründung des Gebietes noch erforderliches Axiom vermissen läßt. Damit ist natürlich der Entscheidung darüber, *welche* Sätze des Gebietes als Axiome bezeichnet und welche also aus diesen deduktiv erschlossen werden sollen, noch ein freier, allzu freier Spielraum gelassen[2]. In Wirklichkeit verfährt man bei der Auswahl der Axiome etwa so: man untersucht die einfacheren Sätze des Gebietes, aus denen man sicher ist die übrigen herleiten zu können, auf die ihnen zugrunde liegenden wesentlichen Voraussetzungen von möglichst allgemeiner und einfacher Natur und allenfalls von möglichst einleuchtendem, mit Erfahrung oder Anschauung übereinstimmendem Charakter; falls die aufgefundenen Voraussetzungen genügen, um aus ihnen die als Ausgangspunkt benutzten Sätze herleiten zu lassen, so bezeichnet man die Voraussetzungen als Axiome. Die so bei der Auswahl der Axiome herangezogenen Kriterien der „Allgemeinheit", der „Einfachheit" und der „wesentlichen" Bedeutung sind offenbar von durchaus relativer Art; es kann also nicht wundernehmen, wenn die Zurückführung einer Wissenschaft auf Axiome, ihre „Axiomatisierung", eine zeitbedingte, von Geschmacksfragen abhängige und daher — zum mindesten vom mathematischen Standpunkt — wohl nie endgültig und einheitlich vollendbare Aufgabe darstellt.

---

[1] Z. B. die Existenz der nichteuklidischen Geometrien, der stetigen nicht differentiierbaren Funktionen, der ein Quadrat vollkommen erfüllenden Kurven usw.

[2] Die auf S. 341 erwähnten Untersuchungen von HERTZ vermögen eine Einengung dieses Spielraums durch objektive Kriterien nur für die allereinfachsten Fälle anzubahnen.

Wer etwa die Sätze der elementaren Planimetrie oder der Algebra (im Sinn der Lehre von den Gleichungen) im angegebenen Sinn durchmustert, wird in jener Disziplin vielleicht den Pythagoreischen Lehrsatz, in dieser den „Fundamentalsatz der Algebra" (vgl. S. 241) als eine wesentliche, allgemeine und verhältnismäßig einfache gemeinsame Voraussetzung vieler planimetrischer bzw. algebraischer Sätze erkennen; er wird daher mit Recht diese Sätze als Axiome der betreffenden Disziplin zugrunde legen. Nähere Betrachtung und der Vergleich mit benachbarten Gebieten haben indes gezeigt, daß man jeden der beiden Sätze auf *noch allgemeinere* Voraussetzungen zurückführen kann; „allgemeiner" vor allem in dem Sinn, daß die neuen Voraussetzungen es gestatten, gleichzeitig mit dem Pythagoreischen Lehrsatz bzw. dem Fundamentalsatz der Algebra auch noch andere, ähnlich allgemeine Sätze aus den Nachbargebieten herzuleiten. In diesem Sinn wird man es als einen — wiederum nicht etwa endgültigen — Fortschritt ansehen dürfen, wenn man die *neuen* Voraussetzungen als Axiome kennzeichnet und die alten Axiome, mindestens teilweise, dieses Charakters entkleidet und zu beweisbaren Sätzen stempelt. Für dieses fortschreitende Verfahren hat HILBERT den bezeichnenden Ausdruck von der *Tieferlegung der Fundamente der einzelnen Wissensgebiete* geprägt; die Tieferlegung hat seit den Anfängen der mathematischen Forschung begonnen, lange bevor an Axiomatisierung gedacht wurde, und hat von jeher eine der wichtigsten Aufgaben jener Forschung dargestellt. Das methodisch Wesentliche in jeder Etappe dieses Axiomatisierungsprozesses liegt also darin, daß man die Begriffe, Methoden und Aussagen der betreffenden Wissenschaft, wie sich historisch entwickelt hat, nachträglich logisch analysiert und das Wesentliche des sich hierbei ergebenden Materials an die Spitze des Ganzen stellt.

Was im besonderen die Mengenlehre betrifft, so mag es genügen, auf das Beispiel des Auswahlaxioms zu verweisen; auf S. 295ff. wurde geschildert, wie dieses nicht etwa eines schönen Tages erfunden wurde und dann dazu diente, neue Sätze zu beweisen, sondern wie es umgekehrt auf dem Wege des Rückwärtsschreitens, nämlich durch Analyse bekannter oder vermuteter Sätze in bezug auf die ihnen zugrunde liegenden Voraussetzungen, als Axiom „entdeckt" wurde.

Bei dieser Sachlage wird die Frage in der Tat brennend, ob denn die Axiome einzeln widerspruchsfrei und in ihrer Gesamtheit miteinander verträglich sind. Man kann nach dem Gesagten offenbar nicht mehr auf die unmittelbare Anschaulichkeit der einzelnen Axiome oder gar auf ihren Ursprung aus der Erfahrung pochen, sofern man überhaupt eine solche Begründung als logisch und erkenntniskritisch zureichend betrachten wollte; denn die Axiome sind ja nicht aus der Erfahrung, sondern aus den Sätzen unseres Wissens-

gebietes entnommen[1] und nur allenfalls im Sinn eines möglichst engen *Anschlusses* an Erfahrung oder Anschauung ausgewählt; überdies sind oft gar manche Lehrsätze des Wissensgebietes, also Folgerungen aus den Axiomen, weit anschaulicher und unmittelbarer einleuchtend als die Axiome selbst, die sich also ihrerseits zu ihrer Rechtfertigung auf jene Folgerungen berufen müßten (vgl. S. 304f.). Selbst wenn aber ein Verfahren vorläge, um ein einzelnes Axiom, wennschon nicht als zwingend, so doch als in sich widerspruchsfrei und deshalb für mathematische Benutzung brauchbar zu erweisen, so wären wir immer noch nicht am Ziel. Denn wir gebrauchen ja ein ganzes *System* von Axiomen, deren Gesamtheit erst vermöge gegenseitiger Verkoppelung der undefinierten Grundbegriffe diesen ihre Bedeutung gibt; in einem solchen System kann sehr wohl jedes einzelne Axiom *in sich* widerspruchsfrei sein, während die Axiome *miteinander* nicht verträglich sein und daher in ihrer Gesamtheit zu Widersprüchen führen mögen. Das wird am deutlichsten an Hand einiger Beispiele erkennbar werden.

Zwei einfache geometrische Sätze, von denen jeder in geeignetem Rahmen als widerspruchslos oder als „richtig" nachgewiesen werden kann, besagen: „Ein Außenwinkel eines ebenen Dreiecks ist größer als jeder der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel" und „Je zwei in der nämlichen Ebene verlaufende Gerade haben mindestens einen gemeinsamen Punkt". Wollte man diese beiden Sätze[2] als Axiome einem Axiomensystem der Geometrie einfügen, das im übrigen den Begriffen „Punkt" usw. einen Sinn der üblichen Art beilegen mag, so würde man bald auf Widersprüche stoßen; diese beruhen darauf, daß man auf Grund des erstgenannten Satzes leicht zwei Gerade angeben kann, die *keinen* gemeinsamen Punkt aufweisen[3].

---

[1] Allerdings wird unter diesen Umständen eine neue Frage brennend, die bei der inhaltlichen Axiomatisierung im Sinne EUCLIDS zurücktreten konnte: wie kommt es, daß wir die Ergebnisse einer formalen, axiomatisch begründeten Wissenschaft mit Erfolg auf die Fakten der äußeren Erfahrung anwenden können, mit denen jene gar keinen Zusammenhang mehr teilen? Offenbar wird man so z. B. zwischen der Geometrie als formaler mathematischer Disziplin und der Geometrie als experimentell geleiteter, innig mit der Physik verwachsener Erfahrungswissenschaft begrifflich scharf zu unterscheiden haben. Ja sogar für die Arithmetik und die Logik erhebt sich dieses Problem, insofern als die Ergebnisse der formalen Arithmetik und der symbolischen Logik nicht von vornherein für das wirkliche, inhaltliche Rechnen und Denken Gültigkeit zu bewahren brauchten. An Literatur hierzu sei etwa genannt: BURKAMP [1] (bes. S. 265), CARNAP [1], LANGFORD [5], REICHENBACH [1], STUDY [2]; vgl. auch S. 383.

[2] Wenn der erste Satz noch zu kompliziert erscheint, um als Axiom zu dienen, so können an seine Stelle einfachere Axiome gesetzt werden, deren Folge er ist.

[3] In Wirklichkeit bestimmen diese Sätze, wenn man jeden mit anderen Axiomen geeigneter Art verbindet, zwei durchaus verschiedene Geometrien, so daß z. B. der Begriff „Gerade" in der ersten von anderer Art ist als in der zweiten. Jede dieser Geometrien ist für sich widerspruchslos, sie sind logisch gleichmöglich.

Solange ein solcher Widerspruch zwischen den Axiomen nicht bemerkt ist, könnte man, auf die Widerspruchslosigkeit der einzelnen Axiome gestützt, Schlüsse aus ihnen zu ziehen versucht sein und so für eine vermeintliche Realisation des Axiomensystems „geometrische“ Sätze herleiten wollen; das ist aber unstatthaft, weil sich aus einander widerstreitenden Prämissen stets Folgerungen ziehen lassen, die mit dem Satz des Widerspruchs in Konflikt stehen.

In dem vorstehenden Beispiel ist uns der Widerspruch bekannt und dieses Wissen behütet uns davor, zwei derartige Axiome gleichzeitig der Geometrie zugrunde zu legen. Wie steht es aber mit einer *grundsätzlichen* Sicherung gegen solche Widersprüche in einem Axiomensystem, das uns mangels Kenntnis derartiger Mängel einstweilen als widerspruchsfrei gilt und auf dem wir daher unbedenklich mancherlei Schlußfolgerungen, ja ganze Wissenschaften aufbauen? Welche Überlegungen behüten uns vor solchen Fallstricken selbst bei den scheinbar einfachsten logischen und mathematischen Gegenständen, etwa bei der Lehre von den natürlichen Zahlen? PEANO hat ein einfaches Axiomensystem für diese Lehre angegeben[1], an dessen Widerspruchslosigkeit kein Mensch ernstlich zweifelt, so wenig wie an der Gültigkeit der aus ihm sich ergebenden Folgerungen (also etwa daran, daß sich durch fortgesetztes Addieren und Subtrahieren natürlicher Zahlen niemals die Gleichung $4 = 5$ ergibt). Wenn aber diese Überzeugung *bewiesen* werden soll, so ist dazu offenbar ein Nachweis der Widerspruchslosigkeit jenes Axiomensystems (oder eine gleichwertige Überlegung) erforderlich. Stellen wir uns etwa vor, es bestehe ein uns bisher unbekanntes logisches Gesetz des Inhalts: Wie immer mehr als eine Billion verschiedener Begriffe miteinander logisch verknüpft werden, immer wird sich dabei notwendig schließlich ein Widerspruch ergeben. Dann wäre der uns vertraute Begriff der natürlichen Zahl unzulässig; es könnte höchstens eine Billion verschiedener Zahlen geben, über eine Billion hinaus dürfte man nicht zählen; täte man es dennoch, so müßte sich im Verlauf des Rechnens früher oder später ein Widerspruch ergeben, d. h. eine Gleichung der Art $4 = 5$. Das würde zur Voraussetzung haben, daß die Axiome PEANOS, die eine Gesamtheit von *unendlichvielen* verschiedenen Zahlen sichern, entweder einzeln oder in ihrer Gesamtheit einen Widerspruch enthielten. Umgekehrt schlösse der Nachweis, daß PEANOS Axiomensystem widerspruchsfrei ist, jedes logische Gesetz solch fataler Art aus.

Nun kann man ja darauf verweisen, daß allgemein eben alle Wissenschaft sich auf ein subjektives, nicht weiter begründbares Vertrauen zur Gültigkeit bestimmter Wahrheiten gründe, auf gewisse Glaubens-

---

[1] Siehe PEANO [3], ferner etwa PADOA [4] und LOEWY [1], S. 1ff., sowie die an beiden Stellen angeführte Literatur; vgl. dazu ferner noch HAHN [3].

oder Erfahrungssätze zurückgehe. Wirklich wird von einem derartigen Standpunkt aus zuweilen die Meinung laut, das Streben nach einem Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein gegebenes Axiomensystem sei eine Art Sport, an dessen Stelle man sich besser konkreteren und fruchtbareren Problemen zuwenden möge; man habe ja auch in anderen Wissenschaften und in der älteren Geschichte der Mathematik jenem Problem keine Beachtung geschenkt. Demgegenüber werde nochmals auf den grundsätzlichen Unterschied hingewiesen: Gewiß bedarf man keines Nachweises für das widerspruchslose Dasein und Funktionieren der Außenwelt, sofern man an eine solche glaubt, und auch viele Erzeugnisse unserer Gedankenwelt können ruhig, mit mehr oder weniger Berechtigung im einzelnen, als widerspruchslos hingenommen werden, sofern nämlich die betreffenden Begriffsbildungen — als auf primitiv-inhaltlichen Ideen und daran anschließenden Definitionen beruhend — und daher auch die mit ihnen geformten Aussagen hinreichend anschaulich oder einleuchtend, kurz „evident“ sind[1]. Das gilt auch vielfach von den „Axiomen“ und „Postulaten“ des EUCLID, die inhaltliche Aussagen sind. Von alledem ist aber im Fall einer Axiomatik im strengen, formalistischen Sinn keine Rede. Die in einer solchen auftretenden Grundbegriffe (Grundrelationen usw.) sind ja überhaupt nicht definiert, also ohne jede inhaltliche Kennzeichnung, und die Axiome, die ihnen als Ersatz eine gewisse formale Prägung aufdrücken wollen, können also keineswegs evident oder auch nur plausibel sein. Daß sie uns so erscheinen, liegt nur daran, daß wir bei ihnen unwillkürlich oft an die gleichbezeichneten Begriffe der definitorisch aufgebauten Theorie denken, die ja aber gerade ausgeschaltet werden soll. In Wirklichkeit hat es die Axiomatik nicht gleichmäßig mit Begriffen und Aussagen zu tun, sondern letztere sind das Ursprüngliche, Übergeordnete, das daher nicht etwa von den Begriffen her seine Legitimation erweisen kann. Um uns vor der Eventualität zu schützen, daß die Axiome unsinnig, d. h. miteinander unverträglich sind, ist also ein Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit ganz und gar unentbehrlich.

Die Intuitionisten freilich, die das mathematische Gebäude auf einsichtige Konstruktionen stützen, und die Logizisten, die — etwa von einer realistisch genommenen, natürlich widerspruchslosen Außenwelt ausgehend — sich ganz und gar auf ihre Begriffe stützen und aus diesen erst die Aussagen als sekundär, nämlich als inhaltlich genommene Eigenschaften der Begriffe herausholen, sie alle haben einen derartigen Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht nötig; ebensowenig natürlich die Vertreter eines genetischen Aufbaus nach älterer Art, wie im Fall der Mengenlehre etwa CANTOR. Für den Axio-

[1] Daß man es freilich mit dieser Evidenz vielfach (auch in der Mathematik) zu leicht genommen hat und die Folgen dann oft nicht ausgeblieben sind, beweist die Geschichte der Wissenschaft zur Genüge.

matiker aber ist die Frage brennend und wird geradezu zum Grundproblem der axiomatischen Methode: Wie ist es möglich, die Widerspruchslosigkeit eines gegebenen Axiomensystems, d. h. die Widerspruchsfreiheit der einzelnen Axiome und deren Verträglichkeit miteinander, positiv nachzuweisen?

Doppelt ernst tritt diese Frage, und zwar sogar auch unabhängig von der formalistischen Auffassung, im Fall der Mengenlehre an uns heran, wo wir als gebrannte Kinder das Feuer um so mehr zu scheuen Anlaß haben. Hier sind es ja nicht hypothetische und durchaus unplausibel erscheinende logische Gesetze, wovor wir uns zu fürchten haben, sondern die Antinomien haben positiv gezeigt, daß in den Grundlagen der CANTORschen Mengenlehre ein schwacher Punkt verborgen ist — so sehr verborgen, daß seit drei Jahrzehnten in einer der Mathematik sonst glücklicherweise ganz fremden Art der Kampf darüber hin und her wogt, *wo* jener Punkt zu suchen sei. Der sorglich abgegrenzte Zaun der Axiomatik ZERMELOs hat dem Übel freilich insoweit Abhilfe geschaffen, als innerhalb dieses Zaunes, wie sich beweisen läßt (vgl. S. 322f.), die bekannten Widersprüche nicht vorkommen können. Aber wird man nicht vielleicht künftig *neue* Antinomien entdecken, die auch durch ZERMELOs Axiome nicht ausgeschlossen werden und also in gewissen, uns unsichtbaren Widersprüchen zwischen diesen Axiomen ihren letzten Grund haben müßten? Hat ZERMELO, um eine Ausdrucksweise POINCARÉs in anderem Sinn wieder aufzunehmen, beim Bau seines festen Zaunes zum Schutze der Schafe der legitimen Mengenlehre vor den paradoxienbehafteten Wölfen nicht möglicherweise innerhalb des Zaunes ein paar Wölfe zurückgelassen, die unbeschadet des Zaunes Schaden stiften können?

Es ist schließlich nicht etwa möglich — auch nicht im Fall einfacherer Verhältnisse, wie z. B. bei der Lehre von den ganzen Zahlen — sich zur Lösung unserer Frage auf die Art zu berufen, wie wir zu den Axiomen gelangt sind, und zu schließen: da wir die Axiome als Voraussetzungen sicherer, wissenschaftlich anerkannter Lehrsätze erkannt haben, so können wir durch ein geeignetes Umkehrverfahren jenen die nämliche Sicherheit und Widerspruchslosigkeit garantieren wie diesen. Eine solche Überlegung käme auf einen Zirkelschluß hinaus. Einer der Hauptzwecke, zu denen man eine Disziplin mittels der axiomatischen Methode begründet, ist ja gerade der Wunsch, die Sätze der Disziplin als widerspruchsfrei nachzuweisen; hierfür aber kommt es, wie wir gesehen haben, eben auf die Widerspruchslosigkeit der Axiome an[1].

Wenn für dieses schwierige Problem eine Lösung überhaupt möglich ist, so hat das noch besondere Bedeutung. In der axiomatischen

[1] Als charakteristische Beispiele *anderer* Auffassung des Problems der Widerspruchslosigkeit seien z. B. die (einander selbst scharf entgegengesetzten) Standpunkte COUTURATs und POINCARÉs genannt; vgl. POINCARÉ [5], S. 164ff. und 276.

Mengenlehre sind (vgl. namentlich S. 324) die nicht-prädikativen Prozesse keineswegs ausgeschlossen, vielmehr sogar unumgänglich nötig, obgleich sich bei ihrer Benützung auch der nicht auf den Intuitionismus eingeschworene Mathematiker eines unbehaglichen Fröstelns nicht ganz erwehren kann. Ebenso wird der freilich schon weit salonfähigere Satz vom ausgeschlossenen Dritten, der indes von BROUWER und seinen Anhängern so entschieden abgelehnt wird, in die Axiomatik miteinbezogen (vgl. S. 332). Wenn nun der Nachweis der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems, das namentlich auch den bedenklich erscheinenden Begriff der Potenzmenge umfaßt, wirklich gelingt, so ist damit gezeigt, daß die Anwendung jener beiden umstrittenen „transfiniten" Schlußweisen, wenn auch nicht a priori, so doch a posteriori zulässig ist, nämlich zu keinem Widerspruch führen kann. Die transfiniten Schlußweisen würden so zwar nicht durch ihre inhaltliche Wahrheit und Einsichtigkeit, wohl aber durch ihre unzweifelhafte Gefahrlosigkeit (trotz ihrer Tragweite!) legitimiert. Dies etwa ist der Standpunkt HILBERTS, der somit den methodischen Ausgangspunkt seiner intuitionistischen Gegner weitgehend — allerdings zum Zweck der Bestreitung ihrer Thesen — selbst aufnimmt.

Das Gelingen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises würde überdies noch ein Bedenken psychologischer Art aufklären und lösen, das beim Nachdenken über die intuitionistische Lehre naheliegt und schon auf S. 245f. angedeutet wurde. Wer heute probeweise ein bestimmtes erkenntnistheoretisches oder ethisches Problem den Philosophen der Welt zur Lösung stellen wollte, der könnte im voraus sicher sein, eine Reihe nicht nur aneinander vorbeigehender, sondern sogar einander widersprechender Antworten zu erhalten. Das ist einfach darauf zurückzuführen, daß (auch eine vollkommen deduktive und zwingende Schlußführung in den eigentlichen Beweisen angenommen) die Voraussetzungen und Ausgangsthesen verschieden sind und einander mehr oder weniger zuwiderlaufen. Wenn dagegen das versuchsweise gestellte Problem eigentlich mathematischer Natur ist — mag es selbst den schwierigsten Teilen der Mengenlehre angehören —, so ist schlimmstenfalls, etwa von intuitionistischer Seite, die Antwort zu gewärtigen, das gestellte Problem sei sinnlos; von all denen aber, die seinen Sinn bejahen und zu einer lückenlosen Lösung gelangt zu sein glauben, sind nach allen bisherigen Erfahrungen nur übereinstimmende Antworten auf die gestellte Frage zu erwarten. Dieses Ergebnis mag dem als seltsam erscheinen, der die intuitionistische Kritik als berechtigt oder wenigstens als in sich möglich anerkennt und somit in der Benutzung der nicht-prädikativen Schlußweisen, des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, der reinen Existenzprinzipien von der Art des Auswahlaxioms usw. unzulässige Voraussetzungen verwendet glaubt; warum führen diese nicht wie überall sonst zu Widersprüchen, sondern zu

Schlußfolgerungen, die, wenn nicht richtig, so doch zum mindesten übereinstimmend sind? Der verschiedene Ausfall des gedachten Experiments im philosophischen und im mathematischen Fall wird aber sofort verständlich, wenn die verwendeten „falschen" Prinzipien sich doch — und zwar gemeinsam — als mit den übrigen Axiomen der Mathematik widerspruchsfrei verträglich erweisen. Dann kann man natürlich bei ihrer Mitbenutzung ebensowenig zu widerstreitenden Resultaten gelangen, wie das möglich ist, wenn man allein von den *allgemein* anerkannten Prinzipien der Mathematik ausgeht.

Wenn auf den letzten Seiten die hervorragende *Bedeutung* des Problems der Widerspruchslosigkeit betont wurde, so läßt sich bezüglich seiner *Bewältigung* zunächst sagen, daß in vielen, sogar den meisten Fällen eine in relativem Sinn befriedigende und grundsätzlich einfache Lösung gelungen ist. Sie besteht darin, daß man die Begriffe (und Relationen) der in Frage stehenden Disziplin (etwa der Geometrie) den Begriffen (und Relationen) einer vor Widersprüchen schon gesicherten Disziplin (z. B. der Arithmetik) umkehrbar eindeutig und „isomorph" (S. 349) zuordnet, so daß jeder Satz der Geometrie durch die Zuordnung in einen bestimmten Satz der Arithmetik übergeht und umgekehrt; die Zuordnung spielt hierbei die gleiche Rolle wie ein ideales Wörterbuch bei der Übersetzung von Sätzen einer Sprache in eine andere. Enthielten nun die Axiome der Geometrie einen Widerspruch, gäben sie also Anlaß zur Herleitung eines widerspruchsvollen geometrischen Satzes, so lieferte die Übersetzung in die Sprache der Arithmetik einen widerspruchsvollen arithmetischen Satz, was wir als ausgeschlossen angenommen haben. Die Geometrie bzw. ein geeignetes geometrisches Axiomensystem ist also ebenso widerspruchsfrei und sicher wie die Arithmetik. Die Herstellung der erforderlichen Zuordnung wird in diesem Fall mittels der Koordinaten, d. h. der analytischen Geometrie bewerkstelligt, die sich so in einem neuen Sinn als wertvoll erweist. Ebenso ist, wie schon auf S. 349 erwähnt, der Beweis für die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien dadurch gelungen, daß man eine isomorphe Zuordnung zwischen den Punkten, Geraden, Ebenen je einer nichteuklidischen Geometrie sowie ihren Verknüpfungen einerseits, gewissen Gebilden („Scheinpunkten" usw.) der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und geeigneten Verknüpfungen zwischen diesen andererseits herstellte. Ähnliche Methoden, die Widerspruchslosigkeit einer Disziplin auf die einer anderen zurückzuführen, lassen sich für weitere Fälle angeben; es genüge die Bemerkung, daß z. B. die Theorie der rationalen (bzw. komplexen) Zahlen sich durch Einführung von *Paaren* ganzer (bzw. reeller) Zahlen auf die Theorie der ganzen (reellen) Zahlen, die Theorie der geordneten Mengen durch die auf S. 317 f. angedeutete Betrachtung auf die Theorie der ungeordneten Mengen (d. h. auf das Axiomensystem des § 16) zurückführen läßt.

Diese „hinabsteigende" Methode führt nun aber in der Mathematik nicht etwa zu einem unendlichen Regreß, sondern sie endet nach wenigen großen Schritten sehr bald bei zwei Fundamentaldisziplinen: bei der *Lehre von den natürlichen Zahlen* und bei der *Mengenlehre*. Beide Gebiete können offenbar nicht auf noch „einfachere", schon als widerspruchslos erkannte mathematische Disziplinen zurückgeführt werden, weil ja umgekehrt alle diese sich auf Zahlenlehre und Mengenlehre stützen. Die Widerspruchslosigkeit der Axiomensysteme, auf die diese Disziplinen aufgebaut werden können, läßt sich auf die angegebene Art nicht erweisen und bleibt offen. Damit ist aber nicht allein die Sicherheit von Zahlen- und Mengenlehre, sondern die der ganzen Mathematik, dieser anscheinend sichersten aller Wissenschaften, in Frage gestellt; denn unsere Methode, den Bestand der übrigen mathematischen Disziplinen zu gewährleisten, bestand ja gerade darin, sie als relativ wahr, nämlich als „ebenso sicher" nachzuweisen wie Zahlen- und Mengenlehre. Umgekehrt wird mit dem Gelingen eines endgültigen und absoluten Nachweises für die Widerspruchslosigkeit der Axiome jener beiden Grunddisziplinen die Feststellung erreicht sein, daß die Sätze der Mathematik unanfechtbare, in sich geschlossene Wahrheiten darstellen.

Man wird zunächst daran denken, zur Sicherung der beiden mathematischen Grunddisziplinen sich im entsprechenden Sinn auf die *Logik*[1] zu berufen; also die Konstruktion eines Axiomensystems für die Logik und den Nachweis seiner Widerspruchslosigkeit zu fordern und dann Zahlen- und Mengenlehre durch ein geeignetes Zuordnungsverfahren auf die Logik zurückzuführen. Es kann dahingestellt bleiben, ob die Philosophen sich des ehrenvollen Auftrags zu entledigen in der Lage wären, den ihnen so die Mathematiker zuschöben durch Überweisung einer Aufgabe, die ihre eigenen Kräfte übersteigt: nämlich der Aufgabe, ein Verfahren zu einem *absoluten* Widerspruchslosigkeitsbeweis aufzufinden. Indes scheint dieser Ausweg schon deshalb schwer gangbar, weil auch die Logik bereits in ihren Anfängen nicht ohne Zahl- und Mengenbegriff auskommt, das Verfahren also sehr in Gefahr schwebt sich zirkelhaft zu gestalten. Logik, Zahlenlehre und Mengenlehre erscheinen gegenseitig aufs engste miteinander verknüpft und nicht schlechthin in dem Verhältnis des Allgemeinen (Logik) zum Besonderen (Zahlen- und Mengenlehre) stehend; ihre endgültige Begründung durch Nachweis der Widerspruchslosigkeit eines oder einiger geeigneter Axiomensysteme, die alle drei Gebiete umfassen, muß als eine einheitliche Aufgabe angepackt werden. Immerhin kann die Methode WHITEHEADS und RUSSELLS, nach denen ja in der Tat die Mathematik als Teil der Logik zu betrachten ist (S. 266 und 376), als eine Zurückführung unseres

[1] Die Methode, die von DEDEKIND [2] zu einer rein logischen Begründung der Lehre von den ganzen Zahlen herangezogen wurde, ist Einwänden ausgesetzt, die mit den Antinomien der Mengenlehre zusammenhängen (vgl. S. 306f.).

Problems auf die Widerspruchsfreiheit der Logik aufgefaßt werden, wobei diese freilich nicht eigentlich axiomatisch begründet erscheint; welche Schwierigkeiten dieser Weg bietet, wurde in § 15 beleuchtet.

7. Hilberts „metamathematische“ Methode. Nachdem Hilbert schon 1900 in seinem berühmten Vortrag [4] (vgl. Padoa [3]) die Frage der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome als im Vordergrund der mathematischen Probleme stehend hervorgehoben hatte, entwickelte er 1904 einen ersten, sein Ziel zunächst nicht erreichenden Versuch [5] zum gleichzeitigen Aufbau der Logik und der Arithmetik. Einen weiteren, vor allem im Grundsätzlichen bedeutsamen Schritt vorwärts in der nämlichen Richtung bedeutet J. Königs Werk [5], das die Frucht der Arbeit seiner letzten acht Lebensjahre darstellt und posthum herausgegeben worden ist (vgl. auch schon [2] und [3] sowie F. Bernstein [5]). U. a. findet sich die in der neuesten Entwicklung ausschlaggebende Methode, die Widerspruchsfreiheit durch „Wertung“ von Aussagen nachzuweisen, im wesentlichen schon bei König. Die weiteren Untersuchungen, die Hilbert (unter sehr wesentlicher Mitarbeit von Bernays) und sein Schüler Ackermann zur Lösung der nämlichen Aufgabe angestellt haben und die namentlich noch durch von Neumann wesentlich gefördert worden sind[1], stammen aus jüngster Zeit und sind bisher nicht abgeschlossen; indes glaubt Hilbert mit seinen (z. T. noch unveröffentlichten) Forschungen so weit vorgedrungen zu sein, daß „durch sie die einwandfreie Begründung der Analysis und Mengenlehre gelingt“, und daß man nunmehr „auch an die großen klassischen Probleme der Mengenlehre von der Art des Kontinuumproblems und an die nicht minder wichtigen noch offenen Probleme der mathematischen Logik erfolgreich wird herantreten können“. Unabhängig aber von dem Erfolg nach solchen Richtungen und grundsätzlich am wichtigsten ist Hilberts Tendenz, System und Kritik scharf voneinander zu trennen, oder in Hilberts Ausdrucksweise: der Mathematik die Metamathematik gegenüberzustellen; dem Grundgedanken nach entspricht diese Tendenz der Methodenlehre von Fries und Nelson.

Über die spezielleren Sonderanschauungen Königs genüge — abgesehen etwa von einem Hinweis auf seine Beschreibung der Denkvorgänge — die Hervorhebung seines Standpunktes hinsichtlich des Mengenbegriffs. König glaubt auf eine *Beschränkung* dieses Mengenbegriffs, wie sie durch die Antinomien nahe-

[1] Hilbert [7]—[10], ferner Ackermann [1], [2], [4] und die — besonders begrifflich und methodisch einen wesentlichen Fortschritt darstellende — Arbeit von Neumann [3]; vgl. auch Ackermann [3], Bernays [1]—[3] (nebst Müller [2]) sowie [5] und [6], Cipolla [3] (vornehmlich kritisch), Gonseth [1] (S. 221ff.), Grelling [3], Hilbert-Ackermann [1], B. Levi [3] und Weyl [6] und [7], besonders § 10, sowie (für Äußerungen von philosophischer Seite) Becker [2] und [3], Burkamp [1] (besonders §§ 118f.) und Stammler [1] (S. 154ff.) und [2]. Siehe auch Nr. 8 (S. 376ff.). Eine weit engere Zielsetzung bei Dingler [4].

gelegt erscheint, verzichten zu können, gleichwohl aber in der Lage zu sein, überhaupt eine *Definition* jenes Begriffs (im Gegensatz zum axiomatischen Verfahren) auf Grund seiner logischen Vorbereitungen zu geben. Es handelt sich um eine „Präzisierung und damit verbundene Verallgemeinerung" des Mengenbegriffs; deren wesentlicher Zug liegt darin, daß eine Menge nicht schon allein durch die Gesamtheit ihrer Elemente bestimmt wird, wie es nach CANTOR (S. 15) und nach der Axiomatik (S. 275) der Fall ist, sondern daß auch ein gewisses „Wie" des Enthaltenseins der Elemente in der Menge, mit anderen Worten: die Art der Zusammenfassung der Elemente, von Bedeutung ist. Die Unterscheidung zwischen denjenigen Mengen, die sich selbst als Element enthalten, und den anderen Mengen spielt hierbei eine gewisse Rolle. Zu einer wenn auch rohen Veranschaulichung der Idee, daß eine Menge durch die Gesamtheit ihrer Elemente nicht völlig bestimmt zu sein braucht, diene etwa das von KÖNIG angegebene Beispiel einer Urne, in der sich rote Kugeln und schwarze Würfel befinden; die Sammelbegriffe der in der Urne liegenden *roten* Körper und der in der Urne liegenden *kugelförmigen* Körper gelten dann als voneinander verschieden, weil sie durch verschiedene Eigenschaften charakterisiert sind, obgleich doch beide Gesamtheiten die nämlichen Körper umfassen. Die Mengen werden also nicht als rein extensionale Begriffe eingeführt, sondern erscheinen noch abhängig vom „Sinn" der definierenden Eigenschaft. KÖNIG baut mit seinem Mengenbegriff, der an Umfang sowohl über den RUSSELLschen wie über den axiomatischen Mengenbegriff hinausgeht, die CANTORsche Mengenlehre in ihrer ganzen Ausdehnung auf und leitet insbesondere auch die Axiome der Auswahl und des Unendlichen her, während er die Antinomien teils als überhaupt mißverständlich, teils als vermöge des neuen Mengenbegriffs wegfallend darzutun sucht.

Bei der außerordentlichen grundsätzlichen Bedeutung, die diesen fundamentalsten Problemen der Mathematik — insofern sie überhaupt lösbar sind — zukommt, werde die Richtung jener jüngsten Arbeiten trotz ihres nicht abgeschlossenen Charakters in aller Kürze angedeutet.

Der Mathematik, die von den Axiomen und den darin auftretenden nichtdefinierten Grundbegriffen (Grundrelationen usw.) ausgeht, um auf dieser rein *formalen*, jeder „Bedeutung" entkleideten Grundlage mittels deduktiver Schlüsse ein ebenso formales Gebäude von Lehrsätzen zu errichten, stellt HILBERT die „Metamathematik" gegenüber, die nichtformale, sondern *inhaltliche* Überlegungen anzustellen hat. Den Gegenstand der inhaltlichen Überlegungen bilden die Axiome, Lehrsätze und Beweise der formalen Mathematik; mit diesen Urteilen und Schlüssen der gewöhnlichen Mathematik operiert die Metamathematik in ähnlicher Weise wie die Arithmetik mit den Zahlen, die Geometrie mit den Punkten, Geraden usw. Der Zahlenlehre entspricht so eine Beweistheorie. Die naturgemäße Forderung, daß bei aller Bedeutung des Formalisierens in der Mathematik die Wissenschaft doch letzten Endes gewisse inhaltliche Erkenntnisse zutage zu fördern habe und nicht in ein bloßes Spiel mit willkürlichen Spielregeln ausarten dürfe, wird also in dem Sinne befriedigt, daß die inhaltlichen Überlegungen auf ein „höheres" Niveau verlegt werden, nämlich von der Mathematik in die Metamathematik. „Wie der Physiker seinen Apparat, der Astronom seinen Standort untersucht, wie der Philosoph Vernunftkritik übt, so hat . . .

der Mathematiker seine Sätze [eigentlich gemeint: seine Beweisprinzipien] erst durch eine Beweiskritik sicherzustellen . . ."

Daß hierbei die Metamathematik nicht etwa mit der Logik identifiziert werden darf, wurde schon oben sachlich begründet. Vielmehr sollen die Wurzeln des neuen Verfahrens ausschließlich in gewissen primitiven, unmittelbar anschaulichen Erkenntnissen liegen, ohne daß tieferliegende logische Hilfsmittel benutzt werden. Diese Beschränkung stellt freilich kein scharfes Programm dar, kann aber durch Aufzählung der zulässigen anschaulichen Betrachtungen bis zu einem gewissen Grad näher bestimmt werden. Auch in HILBERTS eigenem Kreis haben sich die Ansichten über den Umfang dieser Anschauungsgrundlagen im Laufe der Zeit gewandelt: die „reine Anschauung" im philosophischen oder auch nur im intuitionistischen Sinn sollte, so schien es noch vor kurzem, ausgeschlossen sein, namentlich also auch die von POINCARÉ an die Spitze der Mathematik gestellte Anschauung des Allgemeinbegriffs der natürlichen Zahl (wie überhaupt jede Anschauung unendlicher Mengen); dagegen scheint heute der Unterschied zwischen den Anschauungsgrundlagen des Formalismus und denen des Intuitionismus weitgehend verwischt (vgl. S. 378f.) und HILBERTS „finite Einstellung" als etwa das, was der Philosoph „reine Anschauung" zu nennen pflegt (siehe besonders BERNAYS [6]).

Der zunächst vorhandene Widerstreit zwischen der Mannigfaltigkeit des Untersuchungsmaterials, wie es in den mathematischen Axiomen, Sätzen und Schlüssen vorliegt, und der Forderung der unmittelbaren Anschaulichkeit der inhaltlichen Untersuchung zwingt vor allem dazu, das Formalisieren so weit als möglich durchzuführen. Es gilt, nicht nur die Sätze, sondern auch die Beweise und deren Urzellen, die einzelnen Schlüsse, auf eine formale und zwar typische Form zu bringen. Die nach dieser Richtung von FREGE und anderen geleisteten Vorarbeiten auf dem Gebiet der symbolischen Logik (S. 263) werden benutzt und ausgebaut; ursprünglich geschaffen als Zeichen für inhaltliche Begriffe, besonders zur Vermeidung der aus der gewöhnlichen Sprache allzu leicht quellenden Mißverständnisse, treten sie hier als inhaltsleere bloße Zeichen auf dem Papier auf. So liegt hier wiederum ein glänzendes Beispiel für den Nutzen der Vorrats- und Hamsterwirtschaft auf wissenschaftlichem Gebiete vor, ähnlich wie in den Fällen der (ursprünglich als reine Gedankengymnastik erscheinenden) griechischen Kegelschnittslehre, ohne die KEPLER seine Gesetze nicht hätte entdecken können, oder der absoluten Geometrie und Invariantentheorie, deren Vorhandensein und Kenntnis EINSTEIN die Formulierung seiner Relativitäts- und Gravitationstheorie gestattete.

Mittels der symbolischen Logik gelingt es, jeden Satz als eine Formel, jeden Schluß als eine auf typische Form gebrachte Aufeinanderfolge von Formeln und jeden Beweis als eine typische Aufeinanderfolge von

Schlüssen darzustellen, also die ganze Mathematik zu einem bloßen Bestand von Formeln zu gestalten. Zu den üblichen Individualzeichen, Veränderlichen, Beziehungszeichen und Verknüpfungszeichen der Mathematik treten demgemäß noch weitere Zeichen, wie etwa das der Negation, das der Folge oder Implikation[1] ($\to$) und die Zeichen für „alle" und „es gibt". Z. B. wird unter einem Schluß eine anschauliche Figur des folgenden Schemas verstanden, in dem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln bedeuten:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \\ \hline \mathfrak{B} \end{array}$$

oder in Worten: wenn die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ vorliegen, d. h. als beweisbar gelten, so hat man auch $\mathfrak{B}$ als beweisbare Formel zu betrachten. Aus Figuren dieser Art[2] setzen sich die formalisierten Beweise zusammen; das mathematische Schließen und Beweisen wird also ersetzt durch ein rein formales Operieren nach bestimmten Regeln, unabhängig von jedem inhaltlichen Denken. Wie schon die in die Axiome eingehenden Grundbegriffe ohne inhaltliche (namentlich logische) Bedeutung sind, so erscheinen die Sätze (unter ihnen auch speziell die Axiome) als bedeutungslose Konfigurationen von Zeichen. Diese Zeichen sind das Material der axiomatisierten und formalisierten Mathematik, ähnlich wie die Schachfiguren das Material des Schachspiels; die intuitionistische Bezeichnung dieser Mathematik als „Formelspiel" ist so durchaus im Sinne der Axiomatiker selbst. Übrigens ist dieser treffende, schon von THOMAE[3] angeregte und dann namentlich von WEYL (besonders [5], S. 147) weitgehend durchgeführte Vergleich mit dem Schachspiel geeignet, das Wesen der HILBERTschen Methode in einer Art zu beleuchten, die keineswegs am Oberflächlichen haften

---

[1] Angesichts der noch heute immer wieder auftretenden Mißverständnisse sei ausdrücklich hervorgehoben, daß auch schon in der *inhaltlichen* symbolischen Logik das Folgezeichen $\to$ die formale Implikation und nicht etwa das — weit engere — kausale oder logische Verhältnis von Grund und Folge bezeichnet; $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ besagt also: „non-$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$", d. h. „wenn $\mathfrak{B}$ nicht gilt, so gilt auch $\mathfrak{A}$ nicht". So sind z. B. die Aussagen:

(Kant lebte vor Plato) $\to (2 \cdot 2 = 4)$
(Kant lebte vor Plato) $\to (2 \cdot 2 = 5)$
(Plato lebte vor Kant) $\to (2 \cdot 2 = 4)$

sämtlich richtig, dagegen:

(Plato lebte vor Kant) $\to (2 \cdot 2 = 5)$

falsch. Hiermit wird das syllogistische Folgern gegenüber dem üblichen Gebrauch in der älteren Logik erweitert, während natürlich nichtsyllogistische Deduktionen wie DESCARTES' *Cogito ergo sum* nicht darunter fallen.

[2] Freilich in *beliebiger* Anzahl — womit schon die Induktion in die Beweistheorie eingeht (vgl. unten)!

[3] Vgl. dazu FREGE [2 II], §§ 86ff.

bleibt. Danach entsprechen die Formeln den verschiedenen Stellungen der Figuren auf dem Brett; das System der Axiome der Ausgangsstellung des Spiels; die für die Deduktion neuer Formeln aus schon bewiesenen maßgebenden Schlußregeln den Zugregeln des Spiels; eine „beweisbare" Formel einer „spielgerechten" Stellung; endlich die Formel des Widerspruchs (s. u.) einer Stellung, wo etwa 9 Bauern oder 10 Damen der gleichen Farbe vorkommen.

Der eigentliche Zweck der Metamathematik, die an diese Formalisierung anknüpft, besteht nun allein in dem *Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome der gewöhnlichen Mathematik*; insofern sich für die Mathematik „Wahrheit" und „Existenz" auf die Widerspruchsfreiheit reduzieren (S. 380), hat also die Metamathematik die letzte Begründung aller mathematischen Aussagen zu liefern. Erst hier ist von inhaltlichen, sinnvollen Sätzen, also von eigentlichen Erkenntnissen die Rede, wie ja auch zwar nicht ein Zug im Schachspiel, wohl aber die Lösung eines Schachproblems (d. h. eine Aussage über mögliche Züge) eine Erkenntnis darstellt. Bei alledem ist übrigens die Mathematik keineswegs als ein abgeschlossenes Gebäude zu denken; wie sich vielmehr der „gewöhnliche" mathematische Fortschritt durch Ableitung neuer Formeln aus den Axiomen auf dem Weg *formaler* Schlüsse vollzieht, so erfolgt unabhängig hiervon eine andersartige Entwicklung der Wissenschaft durch Aufstellung neuer Axiome (man denke an das Auswahlaxiom!) und den Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit und Verträglichkeit mittels *inhaltlicher* Schlüsse.

Die für den Nachweis der Widerspruchslosigkeit hiermit gestellte Aufgabe zerfällt in zwei grundsätzlich gleich bedeutsame Teile: erstens ist für die Behauptung von der Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems (für Teile oder das Gesamtsystem der Mathematik) eine geeignete *Fassung* zu finden und zweitens sind *Methoden* zu entwickeln, die jene Behauptung zurückführen auf die unmittelbar anschaulichen Überlegungen, die die Wurzeln unserer Betrachtung bilden sollen.

Der erste Teil wird erledigt durch eine Formalisierung auch der Begriffe des Widerspruchs und der Widerspruchslosigkeit. Falls nämlich $\mathfrak{A}$ eine beliebige Formel (Aussage) bezeichnen kann und $\overline{\mathfrak{A}}$ ihre formale Negation, so soll die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems besagen, daß aus ihm nicht zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ gleichzeitig gefolgert werden können. Führt man neben dem Zeichen der Gleichheit ($=$) zur Bezeichnung ihrer Negation das Ungleichheitszeichen ($\neq$) ein und bedenkt man, daß nach den Axiomen aus einem Widerspruch jede beliebige Behauptung folgt[1], so kann man, da z. B. $0 = 0$ eine beweisbare Formel ist, die Widerspruchslosigkeit eines

---

[1] Daher kann man die Widerspruchsfreiheit auch so ausdrücken: Es gibt mindestens eine unbeweisbare Aussage. (Vgl. von Neumann [3], S. 14.)

Axiomensystems auch so ausdrücken: durch Beweise, deren einzelne Formeln aus dem Axiomensystem hervorgehen, kann niemals die Formel $0 \neq 0$ erhalten werden. (Seine ursprüngliche Art, das Zeichen $\neq$ zu diesem Zweck als zunächst von der Gleichheitsrelation *unabhängig* einzuführen, hat HILBERT später aufgegeben.) Der erste Schritt der Metamathematik wird demnach darin bestehen, den Nachweis jener Behauptung der Widerspruchslosigkeit zu führen für ein Axiomensystem, das die Gesamtheit der natürlichen Zahlen begründet.

Der Beweis einer solchen Behauptung wird sich derart vollziehen, daß alle aus dem Axiomensystem fließenden Schlüsse und Sätze auf einfache typische Normalformen gebracht und dann ihrer Struktur nach näher untersucht werden. Das entscheidende Moment hierbei liegt in der Wahl der logischen und mathematischen Hilfsmittel, die bei der Durchführung dieser Untersuchung gebraucht werden dürfen; sie sollen sich, wie bemerkt, auf den Bereich des unmittelbar Anschaulichen beschränken und insbesondere natürlich nicht von der Schwierigkeitsordnung der *zu beweisenden* Tatsache sein. In erster Linie muß offenbar das Material, mit dem überhaupt operiert wird, nämlich die Zeichen und ihre Wiedererkennbarkeit und Unterscheidung, gesichert sein. Was die erlaubten Methoden betrifft, so wird z. B. bei der Untersuchung der Axiome der Zahlenlehre das Zählen bis zu einer gegebenen Zahl und die Induktion bzw. Rekursion in dem engsten Sinn zugelassen: im Sinn des anschaulichen Auf- und Abbaus einer ganzen Zahl, die als ein aus lauter Einsen zusammengesetztes Zahlzeichen aufzufassen ist, und mit der Maßgabe, daß in einer anschaulich vorliegenden endlichen Gesamtheit von Zeichen ein bestimmtes Zeichen, wenn überhaupt, so an einer angebbaren Stelle *zum erstenmal* auftritt und daß gewisse Prozesse von unendlichvielen Schritten dann völlig durchgeführt werden können, wenn sich je ein einzelner Schritt des Prozesses stets vornehmen läßt. Auf diese Weise wird von HILBERT in [7] ein wesentlicher Ausschnitt aus der axiomatischen Theorie der natürlichen Zahlen als widerspruchsfrei nachgewiesen, wobei die Induktion im formalen (nicht in dem soeben erwähnten inhaltlich-anschaulichen) Sinn verstanden und gerechtfertigt wird. Noch wesentlich darüber hinaus gelangten (unter Benutzung auch von HILBERT [8]) ACKERMANN [1] und VON NEUMANN [3], die die klassische Mathematik in einem Teilumfang als widerspruchsfrei erweisen, wie er etwa der Schrift WEYL [2] oder dem RUSSELLschen System bei Ausschluß von Reduzibilitäts- (und Multiplikations-) Axiom (S. 260 und 267) entspricht. Mit den Methoden, wie sie diesem Teil der Mathematik entsprechen, lassen sich also keinesfalls neue Antinomien von bisher unbekannter Struktur herleiten.

In [8] (und [9]) geht HILBERT an die transfiniten Schlußweisen im allgemeinen heran, die (wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten) auch in unendlichen Bereichen die Aussagen erzwingen sollen, die hier

nicht mehr durch finite Konstruktion zu erhalten sind. An der Spitze stehen wiederum „alle" und „es gibt" (vgl. S. 258f.). Hier führt HILBERT ein formal wesentlich vereinfachendes neuartiges Axiom ein, das als „logisches Auswahlaxiom" bezeichnet wird; zu ihm mag uns der Satz vom ausgeschlossenen Dritten leiten. Nach diesem besteht nämlich, wenn $f(x)$ eine beliebige Eigenschaft oder Satzfunktion ist (z. B. „x ist bestechlich"), die Disjunktion: entweder gilt $f(x)$ für alle x, oder es gibt ein x, für das die kontradiktorisch entgegengesetzte Aussage $\overline{f(x)}$ zutrifft. Im ersten Fall soll nun nach dem Axiom zur Funktion $f(x)$ ein bestimmter Argumentwert τ_f wählbar sein, der gleichsam als Vertreter aller x hinsichtlich unserer Funktion gelten kann; im angeführten Beispiel erhielte man zu $f(x)$ einen Aristides, für den gilt: wenn Aristides bestechlich ist, so ist es jeder Mensch. Im zweiten Fall ist der zu wählende Vertreter τ_f für die Funktion $f(x)$ ein beliebiges x, für das $f(x)$ falsch ist. Aus diesem Axiom läßt sich ein wesentlicher Teil der transfiniten Schlußweisen herleiten. So unbegründet auch der Glaube an die *Ausführbarkeit* der Auswahlakte vermöge des logischen Auswahlaxioms ist, so gibt doch HILBERT in [8] (vgl. auch ACKERMANN [2]) wenigstens andeutungsweise und unter Vornahme gewisser Vereinfachungen an, wie sich dieses Axiom als mit den übrigen Axiomen *verträglich* erweist und wie sich damit die übliche Verwendung von „alle" und „es gibt" und die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten innerhalb *unendlicher* Gesamtheiten sichern läßt. Auf Grund dessen wird die Bildung von Zahlenfolgen (z. B. reellen Zahlen) der den Intuitionisten unzulässig erscheinenden Art und ferner die Möglichkeit reiner Existenzbeweise von „transfinitem", nicht konstruktivem Charakter ermöglicht und gerechtfertigt. Das logische Auswahlaxiom läßt sich als eine Erweiterung des gewöhnlichen Auswahlprinzips (S. 282ff.) auffassen, insofern gleich der dort verwandten „Auswahlmenge" auch die Funktion τ_f jeder Satzfunktion $f(x)$ bzw. der ihr entsprechenden Menge einen „ausgezeichneten" Vertreter zuordnet[1]. Dieser äußeren Übereinstimmung entspricht durchaus das innere Wesen beider Axiome: obgleich die Auswahl nicht konstruktiv zu sichern ist, kann man schadlos immer so tun, als sei sie vollziehbar oder vollzogen, und zwar in dem scharfen Sinn, daß zu einer mittels der Auswahl bewiesenen Tatsache niemals ein Widerspruch — z. B. in Form eines Gegenbeispiels — erzielt werden kann.

[1] Noch enger wird der Anschluß an das Auswahlprinzip der Mengenlehre bei der „ε-Funktion", durch die HILBERT und seine Schule die in [8] gebrauchte τ-Funktion seither ersetzt haben. Durch diese ε-Funktion wird einer beliebigen Satzfunktion nicht mehr (vgl. oben, 2. Fall) ein Gegenbeispiel, sondern in natürlicherer und einfacherer Weise ein positives Beispiel zugeordnet. Fordert man noch durch ein besonderes Axiom, daß umfangsgleichen Satzfunktionen durch die logische Auswahlfunktion stets der nämliche Wert zugeordnet werden soll, so fallen logische und mengentheoretische Auswahlfunktion zusammen.

Gelänge es also z. B., mit der Annahme der Auswahlfunktion die Transzendenz von 2^{π} nachzuweisen, so müßte es aussichtslos sein, nach einer algebraischen Gleichung zu fahnden, der 2^{π} genügen sollte; die Transzendenz wäre damit im gewöhnlichen Sinn gesichert. Der Aufsatz schließt mit einer Anwendung des neuen Axioms zur Begründung des Auswahlprinzips in dem Fall, wo es sich um eine Menge von Mengen reeller Zahlen handelt (vgl. Beispiel 3 auf S. 292f.).

Hier drängt sich schon bei flüchtigem Überblick die Frage auf, wie sich denn solche Erkenntnisse, die das formalisierte Bild *unendlicher* Gesamtheiten und dazu gehöriger Schlußweisen betreffen, auf eine unmittelbar anschauliche und konkrete, also um so mehr überhaupt *endliche* Grundlage zurückführen lassen. Zur Beantwortung mögen HILBERTS eigene Worte angeführt werden: „Unser Denken ist finit; indem wir denken, geschieht ein finiter Prozeß. Diese sich von selbst betätigende Wahrheit wird in meiner Beweistheorie gewissermaßen mit benutzt in der Weise, daß, wenn irgendwo sich ein Widerspruch herausstellen würde, mit der Erkenntnis dieses Widerspruchs auch zugleich die betreffende Auswahl aus den unendlich vielen Dingen verwirklicht sein müßte. In meiner Beweistheorie wird demnach nicht behauptet, daß die Auffindung eines Gegenstandes unter den unendlich vielen Gegenständen stets bewirkt werden kann, wohl aber, daß man ohne Risiko eines Irrtums stets so tun kann, als wäre die Auswahl getroffen. Wir können WEYL wohl das Vorhandensein eines circulus zugeben, aber dieser circulus ist nicht vitiosus. Vielmehr ist die Anwendung des tertium non datur stets ohne Gefahr." ([8], S. 160; vgl. hierzu auch die verwandten älteren Ausführungen im letzten Teil von BROUWER [2].)

Der dritte, aus dem Jahre 1925 stammende Vortrag HILBERTS [9] gibt im ersten Teil einen Blick aus der Vogelschau auf das Grundprinzip seiner Methode. Das gesteckte Ziel ist, endlich auch das aktual Unendliche oder Transfinite zu *rechtfertigen*[1], nachdem das potentiell Unendliche, wie es namentlich in der Infinitesimalrechnung auftritt, bereits seit geraumer Zeit über eine solide und tragfähige Grundlage verfügt. Eine „transiente" Begründung (S. 119) des Transfiniten, unter Berufung etwa auf räumliche oder überhaupt außermathematische Tatsachen, kommt nicht in Frage, da die Erfahrung uns nirgends zweifelsfrei Unendliches bietet; vielmehr beginnt in der Natur das Transfinite und Kontinuierliche selbst dort, wo es bis vor kurzem sich

[1] In der Tat gibt auch ein so entschieden intuitionistischer Leugner der transfiniten Zahlen wie BOREL (vgl. [2], S. 159) zu, daß sie zu richtigen und legitimen *Resultaten* verhelfen können, ähnlich wie die unrechtmäßigen Methoden in der Anfangszeit der Infinitesimalrechnung (vgl. D'ALEMBERTS auf S. 305 zitiertes Wort) oder wie der Gebrauch der divergenten Reihen durch EULER, der „mit den Problemen auf Du und Du stehend" die unrechtmäßigen Hilfsmittel in hinreichend taktvoller Weise zu benutzen wußte.

noch einer gewissen Geltung zu erfreuen schien, heute im Zeitalter der Relativitäts- und der Quantentheorie sich im Großen wie im Kleinen mehr und mehr zu verflüchtigen, um dem Endlichen und Diskreten Platz zu machen. Das Unendliche läßt sich eben augenscheinlich nicht im inhaltlichen Sinne sichern, wie dies etwa RUSSELL wohl als Ziel vorschwebt, wenn er die Hypothese seines Unendlichkeitsaxioms aufstellt. Demgegenüber betont HILBERT die innere Verwandtschaft oder sogar Wesensgleichheit seiner metamathematischen Methode mit der in den verschiedensten Gebieten der Mathematik erprobten *Methode der idealen Elemente*; diese typisch „immanente" Begründungsmethode hat gemäß der heute in der Mathematik herrschenden Auffassung begrifflich den Vorzug vor der „transienten"[1]. Wie die Einführung der idealen Zahlen oder der Ideale in der Zahlentheorie, der komplexen Zahlen in Algebra und Funktionenlehre, der uneigentlichen (namentlich der „unendlichfernen") Gebilde in der Geometrie, so verbreitet bei der Grundlegung der *gesamten* Mathematik erst die Hinzunahme transfinitidealer Aussagen zu den finit-anschaulichen das volle Licht. Für finite Aussagen sind seit zwei Jahrtausenden die Elementarprozesse der Aristotelischen Logik geläufig, zu denen neben dem tertium non datur z. B. das scheinbar völlig gefahrlose Verfahren zählt, aus einer Aussage ihre Negation oder (durch Abspaltung) eine Teilaussage zu gewinnen[2]. Man hat diese Prozesse, dem wissenschaftlichen Bedürfnis folgend, ebenso auf transfinite Aussagen übertragen, wie man die ausnahmslose Existenz der Gleichungswurzeln durch Hinzunahme der komplexen Zahlen, die Dualität zwischen Punkt und Gerade bzw. Ebene durch Erfindung der unendlichfernen Punkte erzwang. Läßt man also die transfiniten Aussagen und das übliche Operieren mit ihnen, obgleich inhaltlich leer und einer einsichtigen Begründung entbehrend, ebenso wie die idealen Elemente spezieller mathematischer Gebiete zunächst rein formal zu, so bedarf es zu ihrer nachträglichen Rechtfertigung „lediglich" eines Beweises der Widerspruchsfreiheit. Gerade dieser Beweis stellt die Aufgabe der Metamathematik dar. So erscheinen die beiden einander scheinbar widerstreitenden Thesen von der beherrschenden Stellung des *Unendlichen* in der Mathematik und von der Notwen-

---

[1] Damit werden die von BECKER [2], S. 476—482, gegen HILBERTS Methode erhobenen Einwendungen hinfällig. Vgl. auch (namentlich zu BECKERS Bemerkungen über die Begründung der komplexen Zahlen) Fußnote auf S. 381 und die Schilderung der sich entwickelnden Anschauungen über eine „möglichst gute" Begründung der komplexen Zahlen usw. bei FRAENKEL [2] und STAMMLER [1].

[2] Indes wird z. B. der schon im Altertum bekannte Satz, wonach zu einer Primzahl p stets eine größere Primzahl unterhalb $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 2$ existiert, aus einer finiten, in eine endliche Disjunktion zerlegbaren und jedesmal in endlichem Verfahren verifizierbaren Aussage zu einer transfiniten Existentialaussage, sobald man die Worte „unterhalb $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 2$" fortläßt; so harmlos, wie es scheint, ist also selbst die Gewinnung von Teilaussagen sicher nicht.

digkeit, dennoch alle Wissenschaft auf konkrete *endliche* Anschauung zu gründen, vermöge der Methode der idealen Elemente miteinander versöhnt. „Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden. Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist... lediglich die einer Idee — wenn man, nach den Worten KANTS, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird — einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat." (HILBERT [9], S. 190.)

Schließlich zeichnet HILBERT im zweiten Teil dieser Arbeit die Umrisse eines möglichen Beweises des Kontinuumssatzes, d. h. der CANTORschen Vermutung $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; oder schärfer und eingeschränkter: eines Beweises für die *Widerspruchsfreiheit* dieser Annahme, bei der die Widerspruchsfreiheit des kontradiktorischen Gegenteils und somit eine Gabelung (S. 349) immer noch denkbar wäre, solange kein vollständiges Axiomensystem der Mengenlehre feststeht. (Auch die Entscheidbarkeit der mathematischen Probleme schlechthin wird hier nur in diesem Sinn der Verträglichkeit verstanden.) Indes kann mit der a. a. O. vorliegenden Skizze das Kontinuumproblem nicht als endgültig erledigt gelten, solange nicht die Ausführung vollendet und namentlich der Beweis einiger dabei verwendeter Hilfssätze geführt ist, die sehr tief liegen und ihrem Schwierigkeitsgrad nach vielleicht an den zu beweisenden Satz selbst heranreichen mögen (vgl. dazu auch ACKERMANN [4], BECKER [2] und SUDAN [1]). Überdies und vor allem drängt sich das Bedenken auf, daß sich in der hier verfolgten Methode einstweilen ja vielmehr ein Beweisgang der Metamathematik vollzieht als die Herleitung eines eigentlich mathematischen, also formelhaft zu gewinnenden Satzes.

Indes liegt das ganze gigantische Unternehmen HILBERTS vorläufig nur in Bruchstücken vor; bei der Sprödigkeit des Gegenstands, der an kleinen und kaum bemerkbaren etwa fehlenden Zwischengliedern scheitern kann, läßt sich vorläufig ein endgültiges Urteil über den Erfolg nicht fällen. Gerade wegen des Flusses, in dem sich die Untersuchung noch befindet, schien neben einer flüchtigen Gesamtüberschau auch die vorstehende Schilderung der einzelnen Arbeiten HILBERTS zweckmäßig. Zu ihnen tritt ein weiterer, beim Druck dieser Seiten noch nicht veröffentlichter Vortrag [10], der die Gegenstände von [9] weiter behandelt, neue von ACKERMANN erzielte Fortschritte schildert und im übrigen namentlich dem logischen Auswahlaxiom HILBERTS fernere Betrachtungen widmet.

8. **Das Verhältnis der Mathematik zur Logik. Schlußbemerkungen zum Streit um die Grundlegung der Mathematik.** Nicht nur vom mathematischen, sondern fast noch mehr vom erkenntnistheoretischen Stand-

punkt aus ist an der Methode Königs und Hilberts besonders bemerkenswert die *Grundlage,* auf der das ganze Verfahren beruht: ein primitiv, aber doch hinreichend ausgestattetes Arsenal unmittelbar *anschaulicher* Erkenntnisse, die weder mathematischen noch logischen Charakter mehr tragen. Vergleicht man dies mit dem Fundament der intuitionistischen und logizistischen Schulen, die im vorigen Kapitel behandelt worden sind, so findet man, daß unter den heutigen Mathematikern *drei verschiedene Ansichten über das gegenseitige Verhältnis der Logik und der Mathematik einander gegenüberstehen*[1].

Nach Brouwer beruht die Mathematik auf der reinen Anschauung, insbesondere auf der Urintuition der natürlichen Zahl; die Logik gründet sich, wie er ausdrücklich behauptet, erst auf die Mathematik. Zum Verständnis dieser etwas zugespitzten These ist zu bemerken, daß die Mathematik nach Brouwers Auffassung die Gesamtheit der *gedanklichen mathematischen Konstruktionen* und nicht etwa deren formelmäßigen oder sprachlichen Ausdruck darstellt (vgl. S. 225f.); damit wird die Begründung der Mathematik auf die Logik untunlich, während die Logik mindestens teilweise der mathematischen Intuition bedarf. Gerade umgekehrt ist es nach den modernen Logizisten[2] (Dedekind, Frege, Russell usw.), denen Brouwer geradezu vorwirft, sie befaßten sich mit der mathematischen *Sprache* statt mit der Mathematik: Für sie ist die Mathematik, die ihnen als die Theorie der Satzfunktionen (Eigenschaften, Relationen usw.) gilt, aus der allgemeinen Logik zu begründen; daher muß bei einem vollständigen Aufbau des mathematischen Gebäudes, wie er z. B. in den *Principia Mathematica* angestrebt wird, vor allem die Logik begründet und aus ihr oder vielmehr als Teil von ihr die Mathematik hergeleitet werden. Diese Auffassung steht natürlich in scharfem Widerspruch zu derjenigen von Kant[3] in der Kritik der reinen Vernunft; wenn Kant dem reinen Denken die reine Anschauung zur Seite stellt, so ist ja freilich auch bei Russell nicht das Denken der erste Ausgangspunkt, aber dafür ein für Kant noch unannehmbareres Element: die Empfindungen. Von der Festrede, die Couturat anläßlich des hundertsten Todestages von Kant in Paris gehalten hat, äußert Poincaré denn auch ironisch, man habe gemerkt, daß sie der Feier des Jubiläums von Kants *Tode* gelten solle. Gewissermaßen in der Mitte zwischen beiden Anschauungen, grundsätzlich indes doch wohl der ersten näher-

[1] Für die in diesem Zusammenhang wesentliche Frage, was unter der Mathematik überhaupt zu verstehen ist, vgl. etwa Voss [1], S. 14ff., Weyl [7], S. 50ff. und Burkamp [1], S. 240ff., sowie die zahlreichen dortigen Literaturangaben.

[2] Indes vertreten nicht etwa alle „Logistiker“ (d. h. Vertreter der symbolischen Logik, wie z. B. die italienische Schule) diese Auffassung, die ja mit dem formalen Standpunkt der Symbolik nicht notwendig verknüpft ist.

[3] Für Kants Auffassung zur Mathematik überhaupt sei Barié [1] (S. 175 bis 190) und [2] genannt.

kommend, steht die „formalistische" Schule HILBERTS und seiner Anhänger, die die Intuitionisten so grimm befehden und umgekehrt. Auch HILBERT erblickt die Wurzeln der Mathematik in gewissen von der Logik unabhängigen, *vor* allem Denken als unmittelbares Erlebnis vorhandenen primitivsten anschaulichen Gegebenheiten, die freilich andersartig und vielleicht nicht so umfassend verstanden werden wie von den Intuitionisten; vielmehr sollen jene „außer-logischen konkreten Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind, . . . sich . . . vollkommen in allen Teilen überblicken lassen, und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf." In der Mathematik sind solche Gegebenheiten, von denen die Sicherheit des logischen Schließens abhängig ist, insbesondere die *Zeichen*. Mit dieser Einstellung beruft sich HILBERT ausdrücklich auf KANT, in dessen Lehre es einen integrierenden Bestandteil ausmache, „daß die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann"; auch LEIBNIZ scheint, so sehr sonst mit Recht sein Name mit den Anfängen der Logistik verknüpft wird, diesem Grundgedanken sich nicht völlig verschlossen zu haben (vgl. MAHNKE [1], S. 506ff.). Aus jenen anschaulichen Wurzeln heraus sind dann nach HILBERT Mathematik und Logik und zwar in zunächst einheitlicher Entwicklung aufzubauen, da der Aufbau der Mathematik, wenn auch nicht allein von der Logik aus möglich, doch gewisser Methoden der Logik notwendig bedarf[1].

Zum Schluß noch einige Worte über die Beurteilung der Metamathematik HILBERTS und über die Stellung, die namentlich die Intuitionisten ihr gegenüber einnehmen, sowie überhaupt zur Gesamtlage, in der sich die Grundlegung der Mathematik nach der Schilderung in diesem und dem vorigen Kapitel befindet! Ein erster möglicher und der Sache nach unvermeidlicher Gegenstand der Diskussion zur Metamathematik ist die sachliche Umgrenzung und äußere Beschreibung des Gebiets des „unmittelbar Anschaulichen", das als Ausgangspunkt und letzte Rechtfertigung der Metamathematik dient. *Daß überhaupt* ein Ausgangspunkt als gegeben zugrunde gelegt werden muß, liegt in der Natur des menschlichen Denkens, da die Begründung nicht zu endlos neuen Wurzeln zurückschreiten kann; der „anschauliche" Charakter des Ausgangspunkts entspringt einer Stellungnahme in philosophischer Hinsicht, gegen die der Mathematiker als solcher ebensowenig Einwände erheben wird wie gegen den empiristischen Ausgangspunkt RUSSELLS,

---

[1] Vgl. zu dieser dreifachen Gliederung BURKAMP [1] (bes. V. Studie) und [2] sowie DUBISLAV [1], der indes den Standpunkten der Intuitionisten wie auch der Logizisten wohl nicht voll gerecht wird; vor allem aber BERNAYS [5] (vgl. auch schon [1]).

gleichviel wie der Einzelne sich weltanschaulich dazu stellen mag. Hingegen wird man über die *Umgrenzung* des als Ausgangspunkt dienenden Gebietes naturgemäß verschieden denken können, und zwar nach zweierlei Richtungen. Einmal mag man auf den subjektiven Charakter des Begriffs „unmittelbar anschauliche Gewißheit" hinweisen, mit dem in der Geschichte der Wissenschaft schon manches Mal nur vermeintliche Wahrheiten gestützt wurden und der überdies im Laufe der Zeiten fühlbar wechselt; man kann also diese oder jene Tatsache des ausgezeichneten Gebietes bezweifeln und als eines Beweises bedürftig erklären. Zweitens kann man, zwar den zwingenden Charakter der fraglichen Sätze zugebend, doch die Notwendigkeit der gerade getroffenen Gebietsumgrenzung bestreiten und ein anderes Gebiet als eine mindestens ebensogut brauchbare Grundlage in Vorschlag bringen. Indes hat HILBERT seine Anschauungsgrundlage so eng gewählt, daß Bedenken der erstgenannten Art einstweilen nur grundsätzlich und kaum praktisch in Betracht kommen dürften; die zuletzt angeführten Erwägungen hinwiederum sind offenbar von keiner nachhaltigen Bedeutung.

Ein ferneres, ernsteres Bedenken, das erst bei einer endgültigen Darstellung von Grund auf behoben werden kann, bezieht sich darauf, ob überall bei den inhaltlichen Schlüssen die Benutzung solcher logischer Prinzipien streng vermieden wird (und sich vermeiden läßt), deren Begründung im formalen Sinn eben das Ziel jener Schlüsse ist; also ob z. B. in bezug auf das logische Schließen, das sich in zwar endlichen, aber nicht beschränkten Prozessen vollzieht, Gesetze wie das vom ausgeschlossenen Dritten niemals verwendet zu werden brauchen.

Was die *vollständige Induktion* und die Lehre von den natürlichen Zahlen betrifft, so liegt namentlich der Einwand nahe: der Widerspruchsfreiheitsbeweis bezwecke ja zu zeigen, daß es unmöglich ist, durch *beliebig viele* Schlüsse zu einem Widerspruch zu gelangen. In diesem „beliebig viel" stecke aber schon das induktive Moment in seiner Allgemeinheit, auf dessen Begründung es gerade ankommt und von dem nur ein spezieller Kern unter den primitiven Anschauungsgrundlagen der Metamathematik HILBERTS zugrunde gelegt erscheint; so könne man nach wie vor an der Anschauung POINCARÉS festhalten, wonach jede Begründung der vollständigen Induktion selbst schon eine vollständige Induktion voraussetze.

Indes ist dieser Einwand von keiner wesentlichen Bedeutung; der Eindruck eines klaffenden Gegensatzes dürfte weniger auf die wirkliche Sachlage zurückgehen als auf die Heftigkeit, mit der beide Seiten, die intuitionistische wie die formalistische, einen hier kaum vorhandenen Widerstreit der Meinungen herauszuarbeiten scheinen. Letztlich ist, wie a priori zu vermuten war und nach den letzten formalistischen Veröffentlichungen (besonders von NEUMANN [3]) auch

kaum mehr zu bestreiten ist, die in HILBERTS Anschauungsgrundlage vorkommende Rekursion bzw. Induktion nichts wesentlich Anderes als die von POINCARÉ an die Spitze der Mathematik gestellte (und ja gerade auch von ihm zu den synthetischen Urteilen a priori im Sinne KANTS gerechnete!) vollständige Induktion, ja selbst als der von BROUWER als Quelle aller mathematischen Konstruktionen reklamierte Begriff der natürlichen Zahl. Erst *nach* Zulassung dieser Grundlage scheiden sich die Geister, und zwar wird da von HILBERT zunächst die Aufgabe in Angriff genommen, mittels der inhaltlichen Induktion die formale Induktion der axiomatisierten Mathematik zu begründen; eine Aufgabe, die allerdings für die Intuitionisten bedeutungslos ist, aber doch wohl auch den Formalisten nicht als ausschlaggebend für den Wert ihrer Methoden erscheint und keinen unübersteiglichen Schwierigkeiten begegnen kann. Die Würfel über den Erfolg oder Mißerfolg der Metamathematik werden auf einem anderen Felde fallen müssen: beim Beweis der Widerspruchsfreiheit im Gebiet *jenseits* des Diskret-Abzählbaren.

In der Tat: auch wenn man sich gezwungen sieht, die natürlichen Zahlen, sei es inhaltlich oder formal, als etwas Gegebenes und somit zum Ausgangspunkt Gehöriges hinzunehmen, so wäre es immer noch ein Unternehmen von wahrhaft gigantischer mathematischer und philosophischer Bedeutung, von jenem Ausgangspunkt aus das *Kontinuum*, also die Gesamtheit der reellen Zahlen, als widerspruchsfrei zu erweisen. Auch noch in dieser starken Einschränkung — wenn man also aus dem metamathematisch zu legitimierenden Gebiet „von unten her" das Endliche und die Zahlenreihe, „nach oben hin" die Mächtigkeiten und Ordnungszahlen der allgemeinen und speziellen Mengenlehre ausscheidet — würde ein vollständiges Gelingen der Untersuchungen HILBERTS wohl den meisten Mathematikern als ein Markstein seltener Art in der Entwicklung der Wissenschaft erscheinen. Dabei würden neben der Rechtfertigung des „tertium non datur" sich innerhalb der klassischen (WEIERSTRASSschen) Mathematik u. a. auch die Schwierigkeiten endgültig auflösen, die in der zirkelhaften oder wenigstens nicht-prädikativen Verflechtung der Begriffe „Teilmenge" und „Potenzmenge" (vgl. S. 252f.) ihren Grund haben; als Ausgangsmenge träte hierbei wesentlich nur die Zahlenreihe auf. Immerhin kann der Verfasser nicht verhehlen, daß er auch noch bei dieser eingeschränkten Fassung des Problems trotz der in ACKERMANN [1] und VON NEUMANN [3] enthaltenen wesentlichen Fortschritte die Erreichbarkeit des Zieles einstweilen in Zweifel zu ziehen geneigt ist; diese Zweifel verstärken sich naturgemäß für den Fall, daß man das Ziel noch weiter steckt, nämlich die allgemeine Mengenlehre mit ihren in der Potenzmenge, der allgemeinen Auswahl usw. gipfelnden Schwierigkeiten mit einbezieht.

Vom entschieden intuitionistischen Standpunkt aus gibt es schließlich einen noch weit tiefergehenden Einwurf gegen die Problemstellung und Methode HILBERTS; einen Einwurf, der auch nicht beseitigt würde, wenn die volle Durchführung im bezeichneten Sinne gelingen sollte. Dieser Einwurf ist eine Folge der verschiedenen Auffassungen, die man mit dem Begriff der *mathematischen Existenz* verbindet. Nach der heute vorherrschenden und namentlich von der Schule HILBERTS, doch auch z. B. von POINCARÉ (vgl. z. B. [5], S. 137) vertretenen Auffassung *existiert* in der Mathematik, was *widerspruchsfrei* ist[1]; höchstens noch der *Erfolg* wird als zusätzliches Kriterium für die Rechtmäßigkeit einer widerspruchsfreien Begriffsbildung zugelassen. Hiernach ist die Existenz der wie immer gewählten möglichen Deutungen der Grundbegriffe einer Axiomatik und die Zulässigkeit der auf Grund der Axiome angewandten Schlußweisen gesichert, sobald gezeigt ist, daß man durch erlaubte Schlußfolgerungen aus den Axiomen niemals zu einander widersprechenden Ergebnissen gelangen kann. Von diesem Standpunkt aus sind durch den Widerspruchslosigkeitsbeweis der Metamathematik in der Tat die Begriffe und Aussagen der Mathematik als existierend erwiesen. Solcher Anschauung steht indessen scharf gegenüber die Meinung BROUWERS und seiner Anhänger, wonach in der Mathematik Existenz nichts anderes bedeutet als (gedankliche) Konstruierbarkeit aus intuitiv gegebenen Grundelementen[2]. Ein Beweis für die Widerspruchslosigkeit der Mathematik ist nach dieser Anschauung (und wesentlich auch nach der logizistischen) ganz unnötig, da ja alle mathematischen Ergebnisse durch einsichtige Prozesse von einsichtigen Ausgangspunkten her folgen. Auf der anderen Seite würde aber nach intuitionistischer Auffassung die Mathematik, wenn sie alles zuließe, was widerspruchsfrei ist, in ein schrankenloses Spiel ausarten, während nur das Teilgebiet des Konstruierbaren wissenschaftlichen Charakter behielte. Eine nur als „widerspruchsfrei" erwiesene Theorie kann, so meint BROUWER, ebensowenig auf „Wahrheit" Anspruch erheben, wie ein Verbrecher, dessen Tat mit vorgegebenen Untersuchungsmitteln nicht nachweisbar ist, deshalb ein

[1] Das schließt natürlich nicht aus, daß schon *vor* dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Mathematiker seine als widerspruchsfrei vermuteten Begriffe zunächst postulieren kann (und in praxi beinahe immer so verfährt). Vgl. z. B. HESSENBERG [6], S. 146.

[2] Auch von rein philosophischer (und speziell logizistischer) Seite wird öfters hervorgehoben, daß erst die Existenz eines Begriffs seine Widerspruchslosigkeit verbürge und nicht umgekehrt. (Vgl. z. B. die Literaturangaben bei HÖLDER [3], S. 114, sowie auch schon PASCALS Wort: Ni la contradiction n'est marque de fausseté ni l'incontradiction n'est marque de vérité.) Doch fehlt es von dieser Seite — trotz BECKER [2] und gelegentlicher Bemerkungen bei NATORP [1] und anderen — noch an einer befriedigenden Umgrenzung des Begriffs „Existenz" in der Mathematik, soweit nicht ausdrücklich auf ein festes System, etwa das der *Principia Mathematica*, Bezug genommen wird. Vgl. ferner zum Existenzproblem SCHOLZ [2].

Ehrenmann zu sein braucht. BROUWER gibt demnach seinen Gegnern in der Tat zu (und hat das auch von Anfang an ausgesprochen), daß die Verwendung des tertium non datur auch in unendlichen Bereichen nicht zu Widersprüchen führt; das ist aber in seinen Augen keine Ehrenrettung jenes Prinzips. So ist HILBERTS Fragestellung, die dem konsequenten Axiomatiker als das höchste Problem der Mathematik überhaupt gilt und in deren Beantwortung er einen der kühnsten, neuartigsten und grundsätzlich wichtigsten Schritte in der Entwicklung des Erkenntnisproblems schlechthin erblicken würde, für den konsequenten Intuitionisten im entscheidenden Punkt geradezu bedeutungslos. Immerhin könnten Intuitionisten gemäßigter Art dem Gelingen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises, wenn nicht entscheidenden, so doch bedeutsamen Erkenntniswert zusprechen; dies ist z. B. auch die Meinung WEYLS (vgl. [7] und seine Bemerkungen zu HILBERT [10]).

Daß der geschilderte Standpunkt der radikalen Intuitionisten — namentlich infolge der (schwerlich zu beseitigenden) Vieldeutigkeit des Wortes „Konstruktion“ — wesentlich dogmatischer Art und nur für den zwingend ist, der von Haus aus oder auf Grund seiner Erfahrungen mit der klassischen Mathematik die entsprechende Geisteshaltung mitbringt, mag folgender „Präzedenzfall“ dem Leser näherbringen: Ein so nüchterner, der Mathematik so nahestehender Logiker wie NELSON macht schon 1905 (in [1], besonders S. 385—393) beinahe dieselbe Unterscheidung (dem Wortlaute nach) wie BROUWER zwischen logischer Widerspruchsfreiheit oder Denkbarkeit einerseits, „Konstruierbarkeit“ (oder auch „Anschaulichkeit“) andererseits. Auch er betont, daß das Gebiet des anschaulich Konstruierbaren enger ist als das des Denkbaren und daß der Mathematiker sich auf jenes engere Gebiet zu beschränken habe, wenn er nicht „die Selbständigkeit seiner eigenen Wissenschaft untergraben und sie in ein bloßes logisches Spiel mit analytischen Sätzen auflösen“ wolle, „ohne den Gesichtspunkt der Wahrheit dieser Annahmen und ihrer Folgen“. So weit werden die Intuitionisten ihrem scheinbaren Gesinnungsgenossen freudig zustimmen. Doch die Enttäuschung folgt auf dem Fuß, wenn sie von NELSON über das Gebiet des alleinseligmachenden Konstruierbaren zu hören bekommen, daß dazu zwar die Euklidische Geometrie und die gemeinen komplexen Zahlen gehören sollen[1], nicht aber die hyperbolische oder elliptische Geometrie und

[1] Offenbar spielt für die Vorzugsstellung, die hiermit den gemeinen komplexen Zahlen zuerkannt wird, eine Hauptrolle ihre Veranschaulichung in der GAUSSschen Zahlenebene. Indes steht, wie namentlich angesichts der — nicht in demselben, wohl aber in verwandtem Sinn erhobenen (auf S. 374 erwähnten) — Einwände BECKERS gegenüber HILBERT betont sei, diese transient-anschauliche Begründung des Imaginären nicht nur grundsätzlich, sondern auch hinsichtlich der Verallgemeinerungsfähigkeit weit z. B. hinter der (immanent-begrifflichen) ersten CAUCHYschen Begründungsart von 1847 zurück, die sich nach KRONECKERS Vorgang auf die Erweiterungen von Körpern und Ringen übertragen läßt. (STEINITZ [1], S. 197. Vgl. auch FRAENKEL [3], S. 155; KRULL [1], S. 110; besonders HASSE [1], Abschn. III.) Gerade die von BECKER [2] und [3] angeführte Charakterisierung der komplexen Zahlen durch LEIBNIZ als „pene inter Ens et non-Ens Amphibium“, die heute doch für *jede* Betrachtungsart der komplexen Zahlen überholt ist, sollte ein Warnungszeichen sein, nicht jetzt anderen idealen Gebilden diese Bezeichnung allgemeingültig zu erteilen, wie dies BECKER a. a. O. für die idealen Aussagen der Metamathematik tut.

die höheren komplexen Zahlen; und wenn NELSON aus diesem Ausschluß der nichteuklidischen Geometrie (als eines unanschaulichen Spieles) aus der Mathematik geradezu ein Vertrauensvotum für KANT herleitet, dessen Bezeichnung der Euklidischen Axiome als synthetische Urteile a priori berechtigt sei und keineswegs im Widerspruch damit stehe, daß in der Tat auch die Verneinung des Parallelenaxioms mit den übrigen Axiomen verträglich, also widerspruchsfrei ist! (Übrigens verweist auch KANT wiederholt auf die *Konstruktion* als methodisches Merkmal der Mathematik.)

Der Verfasser, der bisher (auch in den §§ 14 und 15) versucht hat, volle Objektivität im Streit der Meinungen zu wahren, sollte an dieser Stelle vielleicht auch seiner *subjektiven Stellungnahme* Raum geben, die natürlich — da nicht ausschließlich durch wägbare Momente bestimmt — für den Leser keineswegs maßgebend sein kann; sie ist überdies eine Funktion der Zeit und mag also durch die fernere wissenschaftliche Entwicklung mehr oder weniger schnell beeinflußt werden.

An ein schließliches Durchdringen des *Intuitionismus*, zumal in der ihm durch BROUWER gegebenen tieferen und radikaleren Ausprägung, vermag ich nicht zu glauben. Theoretisch ist dieses Urteil vor allem bedingt durch den dogmatisch eingeführten und nicht genügend scharf und einheitlich umgrenzten Begriff der Konstruktion (vgl. oben und S. 225ff.), der im System die ausschlaggebende Rolle spielt; wie man bei fast unveränderter Einkleidung doch etwas durchaus Anderes meinen kann, ist soeben an einem krassen Beispiel gezeigt worden. Auch die Auffassung der Logik als einer nachträglichen, wesentlich die Ausdrucksweise betreffenden Abstraktion aus der Mathematik kann ich mir nicht zu eigen machen. Über diese theoretischen Bedenken aber überwiegen beinahe die praktischen, wie sie namentlich auf S. 240ff. umrissen worden sind; es erscheint mir menschlich zuviel verlangt und wissenschaftlich nicht gerechtfertigt, daß die klassische Mathematik des vorigen Jahrhunderts oder auch „nur" die Mengenlehre CANTORS trotz all ihrer gewaltigen, sogar auf das *Gemüt* des Fachmanns erschütternd wirkenden Erfolge nun in ihren wesentlichsten Teilen als Schuldopfer preisgegeben werden müßte für die Verfehlungen in gewissen Randbezirken, die obendrein zum Teil gar nicht spezifisch jenen Gebietserweiterungen zur Last gelegt werden können. Ebenso ist es beinahe unerträglich (wenn auch nicht ohne rechtfertigenden Präzedenzfall in der Wissenschaftsgeschichte), daß die intuitionistischen Fesseln den Aufbau auch der als rechtmäßig zugestandenen Teile der Mathematik in einem Maße komplizieren, das nicht nur die didaktische Verwendbarkeit der neuen Methoden aufs äußerste einengt, sondern auch den Forschern die Kritik und sogar die Selbstkritik ernstlich erschwert. Ein so skeptisches Urteil über die bleibenden positiven Ergebnisse des Intuitionismus vermag indes in keiner Weise die Bedeutung zu schmälern, die seinen Äußerungen von KRONECKER und POINCARÉ

bis BROUWER in negativer, kritischer Hinsicht zukommen. Es ist sein wissenschaftlich hoch zu bewertendes Verdienst, auf z. T. schwer kenntliche und tatsächlich übersehene Lücken in der Begründung der Analysis und der Mengenlehre hingewiesen und so der notwendigen Grundlagenkritik neue, vielseitige und fruchtbare Impulse gegeben zu haben, die nicht zum mindesten im gegenwärtigen Schaffen der Formalisten sichtbar fortwirken. Da jene Lücken z. T. auch heute noch von einer haltbaren Ausfüllung weit entfernt sind, so kann man den Intuitionismus gegenwärtig keinesfalls als eine schon überwundene Erscheinung betrachten.

Auch gegenüber dem *Formalismus*, wie er sich bei HILBERT und seinen Schülern ausprägt, kann ich Bedenken nicht unterdrücken, die mir seinen schließlichen vollen Sieg nicht wahrscheinlich machen. Sieht man ab von der kaum ausschlaggebenden und mehr in allgemeine Weltanschauungsbezirke weisenden Wertung des „Zeichens", so bleibt zunächst der ernstliche Zweifel am erfolgreichen Durchdringen der Methode: sei es bezüglich des Beweises der Widerspruchsfreiheit für die allgemeine Mengenlehre oder auch nur für die klassische Theorie des Kontinuums, sei es bezüglich der Bewältigung konkreter mathematischer Aufgaben wie des Kontinuumproblems auf der vorliegenden, der Metamathematik als Material dienenden axiomatischen Grundlage. Aber auch wenn eine erfolgreiche Zukunftsentwicklung diese zweifelnde Skepsis Lügen strafen sollte, so bleibt ein auf ganz anderer Ebene liegendes Bedenken: es betrifft die Auswahl der speziellen, „Mathematik" genannten axiomatischen Grundlage und ihre Beziehung zu den Anwendungen. Widerspruchsfreie Axiomensysteme lassen sich ja, vielleicht sogar in ähnlichem Wirkungsumfang, auch anderweitig aufstellen; warum also soll man, wenn schon die Axiome nicht einsichtig begründet werden, gerade das Zeichenspiel mit *diesem* Axiomensystem durch den ehrenden Beinamen einer Wissenschaft, der „Mathematik", auszeichnen? Und wenn die prästabilierte Harmonie zwischen der reinen Mathematik und dem der mathematischen Behandlung unterworfenen Naturgeschehen schon in vergangenen Zeiten ein ernstes Problem bildete, so war und ist doch ein erleichterndes Moment der *notwendige* Charakter der Mathematik, wie er aus unserer naturgegebenen geistigen Struktur und allenfalls aus einer historisch und psychologisch bedingten Einstellung des mathematischen Denkens auf die Beschaffenheit der Welt hervorgehen mag. Wenn aber die Mathematik ein — lediglich widerspruchsfreies — Spiel bedeutet, dann wirkt nicht bloß die erfolgreiche Anwendbarkeit der Analysis auf die Erscheinungen des Universums doppelt erstaunlich, sondern man bemerkt schon nicht einmal mehr einen inneren Grund, warum die Gesetze der formalen Arithmetik durchaus den Erfahrungen entsprechen, die das am Zahlgestell hantierende Kind hinsichtlich des Zählens der ihm „gegebenen" Gegenstände (oder Emp-

findungen) macht![1]. Der Formalismus hat so zwischen der Mathematik und der Welt eine Kluft hervorgebracht, deren Überbrückung kaum mehr vorstellbar erscheint. Freilich ist — und das wird man als einen Vorzug gegen den Intuitionismus buchen müssen — die Leistung des Formalismus, und zwar schon seine bisherige, eine positive wissenschaftliche Errungenschaft von hohem und unzerstörbarem Werte auch dann, wenn die formalistische Begründung der Mathematik nicht voll gelingt oder grundsätzlich abgelehnt wird; nur BROUWER und seine Anhänger werden bestreiten, daß hier ein von *jedem* anderen Standpunkt sinnvolles Problem von einer über die Mathematik hinausreichenden Bedeutung gestellt und in gewissem, wenn auch einstweilen vielleicht absolut bescheidenem Ausmaß gefördert worden ist.

So ist denn der Verfasser geneigt, von den drei hier in den Vordergrund getretenen Systemen der grundsätzlichen Einstellung nach dem *Logizismus* im Sinne RUSSELLS und seiner Mitarbeiter den Vorzug zu geben, namentlich auch was die Einfügung der Mathematik in den weiteren Rahmen der Logik betrifft. Diese inhaltliche Einbeziehung der Mathematik in das System der Logik schließt keineswegs die Anerkennung der Tatsache aus, daß in formaler Hinsicht die Mathematik eine Art Vorrang besitzt, insofern als auch die „theoretische" Logik gleich jeder exakten Wissenschaft ihre Systematik der Gesetzlichkeit des mathematischen Formalismus einordnen muß. Natürlich gilt das Bekenntnis zu RUSSELL nicht für den empiristischen Ausgangspunkt und die Lehre von den Individuen, statt deren man ebensogut andere Auffassungen vertreten kann; überhaupt ist das weltanschauliche, speziell auch das erkenntnistheoretische Glaubensbekenntnis RUSSELLS m. E. recht nebensächlich für sein logisch-mathematisches Gebäude. Daß dieses von seiner Vollendung noch weit entfernt ist, daß namentlich die mit dem Reduzibilitätsaxiom heute noch verknüpften Schwierigkeiten einen ablehnenden Standpunkt einstweilen sehr wohl zu begründen vermögen, wurde in § 15[2] hinlänglich betont; allein diese Schwierigkeiten sind wahrscheinlich überwindbar, und selbst wenn sie es nicht sein sollten, so kann das, solange nicht von anderer Einstellung her ein voller Erfolg zu verzeichnen ist, ebensowohl den Schranken des menschlichen Denkens zur Last gelegt werden, über die das hier vorliegende Problem hinausgehen mag, wie etwa der Falschheit oder Unzweckmäßigkeit der logizistischen Einstellung. Was nament-

---

[1] Praktisch könnte sich demgegenüber der Formalismus vielleicht darauf berufen, er suche die formale Mathematik so einzurichten, daß den im finit-anschaulichen Denken gültigen Gesetzen nach Möglichkeit gleichartige Bilder im Transfinit-Formalen entsprechen; ob ein etwaiges heuristisches Prinzip dieser Art aber schon die obigen grundsätzlichen Bedenken forträumen würde, darf bezweifelt werden.

[2] Zu der dort genannten Literatur sei noch FEYS [2] genannt (Analysen der Arbeiten RUSSELLS und WITTGENSTEINS).

lich die Stellung der *axiomatischen Methode* innerhalb des Logizismus betrifft, so erscheint mir der etwas geringschätzige Standpunkt RUSSELLS gegenüber dieser nur „postulatorischen" Einstellung als durchaus nicht unumgänglich. Nicht zu jeder Zeit und zu jedem Zweck kann und soll diese oder jene Theorie auf die letzten Erkenntniswurzeln zurückgeführt werden; ja selbst so ursprüngliche Gebiete wie die Zahlen- und die Mengenlehre — um gar nicht von der Geometrie zu reden, die einstweilen ihren Hafen in den *Principia Mathematica* noch schmerzlich vermißt — sollen neben einer endgültigen (und entsprechend langwierigen und schwierigen) Begründung auch einen Aufbau benutzen, der diejenigen befriedigt, die zwar mit der dem Zeitalter angemessenen Strenge vorzugehen wünschen, aber von einem im engeren Sinn „mathematischen" Ausgangspunkt aus; d. h. von der „Mitte" des WHITEHEAD-RUSSELLschen Systems aus, etwa mit den natürlichen Zahlen oder auch mit den Mengen als „gegebenem" Material anhebend. So wird eine axiomatische Behandlung in allen Teilen der Mathematik erwünscht (man denke nur an die Gruppen- und Körpertheorie!); für die Zahlen- und die Mengenlehre aber, die bei solcher Beschränkung des Ausgangspunktes als „ursprüngliche" Gebiete erscheinen und keine genetische Behandlung mehr zulassen, ist der axiomatische Aufbau zum Zweck der Darstellung (nicht der Begründung) geradezu ein Erfordernis. In diesem Sinn dürften die Überlegungen dieses Kapitels auch im logizistischen System ihre Bedeutung bewahren; doppelt bewahren beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft, wo auch der Logizismus die Mengenlehre nur mit Hilfe der Typentheorie aufzubauen vermag, ohne doch bisher die Lösung aus den allzu beengenden Fesseln dieser Typentheorie gefunden zu haben.

Schließlich sind, wie vielleicht nicht überflüssig ist hervorzuheben, die hier entwickelten drei Begründungsarten der Mengenlehre und überhaupt der Mathematik keineswegs stets scharf voneinander geschieden, vielmehr durch eine Reihe möglicher und auch tatsächlich vorkommender Übergangsstufen miteinander verknüpft. Vor allem aber sind sie auch nicht etwa *ausschließend* im Sinne eines „quartum non datur". Die Zeit, die so manche Auffassungen begraben hat, wird auch neue erstehen lassen oder ältere zu frischem Leben erwecken. Namentlich erscheint es sehr wohl denkbar, den älteren, vorzugsweise konstruktiven Standpunkt CANTORS, wie er besonders in [7] hervortritt[1], derart auszubauen und zu befestigen, daß die Antinomien von selbst fortfallen und nur die Schwierigkeiten übrigbleiben, die zwischen der Potenzmenge und den Konstruktionsprinzipien der Ordnungszahlentheorie klaffen; Schwierigkeiten, von denen das Kontinuumproblem nur ein weithin sichtbares Symptom ist und die in

[1] Vgl. den dortigen Mengenbegriff im Gegensatz zur Definition [12 I].

keiner konservativen Begründung einstweilen eine Lösung gefunden haben. Das Auswahlprinzip würde bei solcher Auffassung wohl zu einer Trivialität und die Potenzmenge von ihrem nichtprädikativen Makel befreit, wie überhaupt dieser z. B. von PLESSNER vertretene Standpunkt die Grenzen der Wissenschaft am weitesten hinauszustecken erlaubte; im Grundsätzlichen freilich wäre — vor allem vermöge der Vorzugsstellung des Konstruktiv-Anschaulichen — hiermit paradoxerweise ein besonders enger Anschluß an Ideen des Intuitionismus erzielt.

Jedenfalls besteht gegenwärtig bei einer der ganz großen Grund- und Schicksalsfragen der Mathematik der bedenkliche Zustand, daß die beteiligten Forscher in großen Gruppen einander widersprechen, zumeist sogar aneinander vorbeireden. Der Gegensatz in den Anschauungen ist von wesentlich dogmatischer Art und läßt wenig Hoffnung auf einen baldigen Ausgleich durch Überzeugung des Gegners; man begreift danach POINCARÉs pessimistisches Wort: die Menschen verstehen sich nicht, weil sie nicht die nämliche Sprache sprechen und weil es Sprachen gibt, die sich nicht erlernen lassen. Mit Recht verspricht sich HADAMARD (Vorrede zu GONSETH [1]) allgemeinhin so lange nicht allzuviel von Versuchen zur Wiederherstellung der erschütterten Theorien, als „das Erdbeben noch andauert" und einen endgültigen Überblick über den angerichteten Schaden unmöglich macht. Der Fortschritt der Wissenschaft, auch in den großen Phasen, ist eben nicht so gradlinig und stetig, wie es dem erfolgreichen Forscher bei seiner Tätigkeit erscheint und — soll der Antrieb nicht nachlassen — erscheinen *muß*. Vielmehr muß die älteste und vollkommenste der Wissenschaften es mit ansehen, daß der Weg, der nach A. COMTE generell von der theologischen Epoche eines Erkenntnisgebietes über die metaphysische zur positivistischen führt, für sie von der letzten wieder zur vorangehenden Phase zurückzubiegen droht und daß so Probleme wiederauftauchen, denen man glaubte zur Zeit der Sophisten einerseits, des Aufkommens der Infinitesimalrechnung andererseits zum unwiderruflich letztenmal begegnet zu sein.

Man darf aber trotzdem wohl der sicheren Hoffnung Raum geben, daß im Lauf von, wenn nicht Jahren, so doch Jahrzehnten sich allmählich eine Klärung vollziehen wird und daß sich — vielleicht im Zug einer gewissen Reform der Logik, aber wohl kaum von dem den Intuitionisten vorschwebenden Ausmaß — schließlich, wie in manchen so großen Streitfragen der Wissenschaftsgeschichte, auch hier eine Lösung herauskristallisiert, die jeder der beteiligten Schulen in einem gewissen Sinn Recht gibt. Eine solche Auffassung dürfte näherliegen als der Glaube an eine dauernde Spaltung der Auffassungen vom Wesen der Mathematik und als DINGLERS (offenbar von SPENGLER unglücklich beeinflußte) Deutung der mathematischen Grundlagenkrise als „Teilvorgang des allgemeinen Hinabgleitens der Wissenschaft in

das Chaos“ ([5], S. 94f.) — ganz zu schweigen von HADAMARDS resignierter Meinung, als sei die zum gegenseitigen Verständnis der Menschen erforderliche biologische Anpassung der menschlichen Gehirne zwar dort hinreichend fortgeschritten, wo die Erfahrung (POINCARÉ würde sagen: die Möglichkeit der Verifikation) regulierend und zwingend leite, nicht aber in den jenseits der Erfahrung gelegenen Gefilden; hier gelinge ein Sich-Überzeugen so wenig wie zwischen einem Farbenblinden und einem Normalsichtigen, die, auf eine wüste Insel verschlagen, sich über den (wirklichen oder nur vermeintlichen) Einfluß der Wellenlänge des Lichtes auf die Farbempfindung im Auge hoffnungslos streiten.

Wenn die Erörterungen des vorstehenden Paragraphen, namentlich in den letzten Nummern, vielfach über die Mengenlehre hinaus die Gesamtmathematik betrafen und — entsprechend der grundlegenden Rolle der Mengenlehre — betreffen mußten, so seien schließlich die speziell den Aufbau der Mengenlehre angehenden Ergebnisse dieses Kapitels nochmals kurz zusammengefaßt. Wir haben eine Begründung der Mengenlehre nach der axiomatischen Methode kennengelernt, bei der der Begriff der Menge nicht definiert, sondern als Grundbegriff eingeführt wird und seine formale Umgrenzung durch die Axiome erhält, während von einer inhaltlichen Begriffsbestimmung überhaupt nicht die Rede ist. Der Umfang dieses Mengenbegriffs erweist sich von solcher Art, daß die rechtmäßigen Mengen der CANTORschen Mengenlehre, soweit dies zu übersehen ist, unter den neuen Begriff gebracht werden können; auch die Begriffsbildungen und Methoden der klassischen Mengenlehre, insbesondere die Theorie der Äquivalenz und diejenige der Ordnung und Wohlordnung, haben Raum in dem errichteten Gebäude. Dagegen werden die Mengen, die bisher zu Antinomien Anlaß gegeben haben, ausgeschlossen, und zwar in so allgemeinem Sinn, daß auch das Auftreten weiterer Widersprüche innerhalb des neuen Aufbaus unserer Wissenschaft hinreichend unwahrscheinlich wird. Die Unabhängigkeit des Axiomensystems ist im wesentlichen gesichert, während die Frage, ob sich auch die Vollständigkeit des Systems erzielen läßt, noch der Klärung bedarf. So darf diese Neubegründung der Mengenlehre als eine im großen ganzen durchgreifende Überwindung der Krise betrachtet werden, die von den Antinomien ausging. Zur endgültigen Sicherung des neuen Aufbaus ist noch der Nachweis erforderlich, daß widerspruchsvolle Mengen niemals auf Grund der Axiome gewonnen werden können; dazu bedarf es eines Beweises der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems, der seinerseits nicht zu trennen ist von einem Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der Mathematik überhaupt. Einem derartigen Nachweis steuern die neuen Forschungen HILBERTS und seiner Schüler zu, die freilich heute noch nicht als abgeschlossen und völlig geklärt betrachtet werden können.

§ 19. Schluß: Die Bedeutung der Mengenlehre.

Wir haben das von CANTOR in kühner Intuition errichtete, von ZERMELO und anderen mit bedachtsamem Scharfsinn ausgebaute und befestigte Gebäude der Mengenlehre nunmehr in seinen Grundlinien kennengelernt. Gewisse Aufgaben und Fragen wurden hierbei genauer erörtert, unter Bevorzugung namentlich der *grundsätzlich* bedeutsamen Punkte, während entsprechend dem Ziel dieses Buches andere ausgedehnte und wichtige Teile der heute schon sehr umfassenden und weitverzweigten mengentheoretischen Wissenschaft — darunter vor allem die Theorie der Punktmengen — entweder nur flüchtig gestreift oder überhaupt nicht berührt worden sind. In den §§ 2—12 sind wir im Sinne CANTORS auf intuitivem und gewissermaßen naivem Weg vorgegangen; die Kritik und der Aufbau nach den Prinzipien der modernen mathematischen Grundlagenforschung fand in den beiden letzten Kapiteln eingehende Behandlung. Der Leser, der tiefer in die Mengenlehre eindringen will, sei auf die in dem Literaturverzeichnis aufgeführten Lehr- und Handbücher verwiesen, namentlich auf das ausgezeichnete Buch HAUSDORFFS [3] bzw. [4].

Nach der Natur der Fragen, mit denen wir uns vornehmlich beschäftigt haben und die in der Tat den Kern unserer Disziplin darstellen, könnte es den Anschein haben, als wäre die Mengenlehre vornehmlich aus *philosophischem* Interesse erwachsen, insbesondere aus der Frage nach der logischen Berechtigung des Begriffs des Unendlichgroßen und nach seiner arithmetischen Verwendbarkeit. Gewiß haben Gedankengänge dieser Art ihren Anteil an dem Lebenswerk CANTORS gehabt. Sie hatten sogar schon lange vor ihm den Ausgangspunkt BERNARD BOLZANOS gebildet, des böhmischen Geistlichen, der auf mathematischem wie philosophischem Gebiete seiner Zeit so weit vorausgeeilt war und erst in neuerer Zeit allmählich voll gewürdigt wird[1]. BOLZANO hat in

[1] In philosophischer Hinsicht ist an erster Stelle seine „Wissenschaftslehre" [2] zu nennen, für deren Einfluß auf die neuere Philosophie man etwa ZIEHEN [2], S. 173ff., vergleiche und die auch in neuester Zeit noch nicht genügend ausgeschöpft sein dürfte, trotz der Bemühungen KORSELTS und anderer; auch die kleine, schon 1810 erschienene Schrift [1] bietet viel des Interessanten. In der Mathematik ist es namentlich die Lehre von den reellen Zahlen und Funktionen, die BOLZANO bedeutsame Fortschritte verdankt in Punkten, wo nicht nur seine *Lösung*, sondern schon die *Problemstellung* seiner Zeit — den überragenden GAUSS nicht ausgenommen — weit vorauseilte; erst die Wiederentdeckung mancher von seinen Erkenntnissen durch WEIERSTRASS hat sie wirklich bekannt werden lassen und noch die allerjüngste Zeit hat das Ergebnis zutage gefördert, daß eine der merkwürdigsten Konstruktionen von WEIERSTRASS — die einer stetigen, nirgends differentiierbaren Funktion — im Grunde schon im Besitz von BOLZANO war. Vgl. JAŠEK [1] und KOWALEWSKI [1]. Für BOLZANOS Leben und Schaffen überhaupt vergleiche man BERGMANN [1] und FELS [1] und [2], wo sich weitere Hinweise finden; an ersterer Stelle (S. 212ff.) auch eine ausführliche Bibliographie seiner Werke, die in einer (von einer Kommission bei der Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften besorgten) Gesamtausgabe 1928 zu erscheinen beginnen sollen.

seinen beiden letzten Lebensjahren (1847—1848) die „Paradoxien des Unendlichen“[1] geschrieben und damit — bewundernswert selbständig — den ersten und einzigen ernstlichen Vorstoß vor CANTOR in der Richtung gemacht, die später zur Mengenlehre führte; der Ausdruck „Menge“ findet sich schon bei ihm. Die das Unendlichgroße auszeichnenden „paradoxen“ Eigenschaften, unter denen die Äquivalenz einer Menge mit einer eigentlichen Teilmenge (vgl. S. 23) an erster Stelle steht, hat BOLZANO zwar klar erkannt, aber sie vorzugsweise als auffallende und interessante Sondererscheinungen gewürdigt, welche der üblichen mathematischen Behandlung mehr oder weniger im Wege zu stehen schienen; insbesondere drang er noch nicht zur vollen Erkenntnis der Tragweite des Äquivalenzbegriffs und zur Prägung der Begriffe der unendlichen Kardinalzahl und Ordnungszahl durch. Erst CANTOR stellte konsequent den Gesichtspunkt voran, das Unendlichgroße aus seinen eigenen Eigenschaften und Gesetzen heraus systematisch zu ergründen und zu begründen, und baute so BOLZANOs Paradoxiensammlung, die er kannte und innerhalb ihrer Grenzen würdigte (vgl. CANTOR [7 V], S. 561), zu einer Wissenschaft aus[2].

Indes hat für CANTOR neben und selbst vor diesen an die Logik anstoßenden Fragen namentlich ein anderes, rein mathematisches Interesse den Anstoß zu den Untersuchungen gegeben, die die Anfänge der Mengenlehre darstellen. In vielen Teilen der Analysis (z. B. in der Theorie der trigonometrischen Reihen, bei der Integration unstetiger Funktionen) war man zu Fragestellungen gekommen, die eine Heraushebung gewisser unendlicher Mengen von reellen Zahlen (oder Punkten) aus der *Gesamtheit* aller reellen Zahlen zwischen zwei festen Zahlen (oder aller Punkte einer Strecke) erforderlich machten, also zu Fragen, die wir heute zur Theorie der linearen Punktmengen rechnen. Schon vor CANTOR hatten sich namentlich HANKEL [1] und PAUL DU BOIS-REYMOND [1] mit derartigen Fragen beschäftigt; sie konnten aber mangels eines methodischen Werkzeugs keine wesentlichen Erfolge erzielen, obgleich der letztgenannte schon weitgehend unendliche Mengen zur Erreichung des Zieles heranzog. CANTOR nahm (CANTOR-STÄCKEL [1]; vgl. CANTOR [2], S. 130 Fußnote) auf Anregung von E. HEINE seit 1869 derartige Untersuchungen auf, speziell über trigonometrische Reihen und ihre Ausnahmestellen, wobei ihm 1870 in [3] der wichtige Beweis der *Eindeutigkeit* der Entwicklung in eine trigonometrische Reihe gelang. Aus diesen Arbeiten erwuchs ihm zunächst der Begriff

---

[1] BOLZANO [3]. Neuerdings stellt sich heraus (vgl. JAŠEK [1] und weitere Forschungen dieses Autors), daß der erste Herausgeber die „Paradoxien“ stellenweise auf eigene Faust verschlimmbessert hat und daß somit manche darin enthaltene Irrtümer wohl gar nicht auf BOLZANOs Rechnung zu setzen sind; Untersuchungen hierüber sind im Gange.

[2] Siehe auch den kurzen und schönen historischen Überblick VIVANTI [1].

des Grenzpunktes, der in engem Zusammenhang mit den in § 10 eingeführten Begriffsbildungen steht; bei der Fortführung und Verallgemeinerung seiner Untersuchungen erkannte er — nicht mit einem Mal, sondern mit allmählich immer kühner und kühner werdendem Schwung — daß neuartige Hilfsmittel zur Bewältigung jener Aufgaben erforderlich seien, und schuf wesentlich zu diesem Zweck seine Mengenlehre. Er hat sich aber allmählich, im Gegensatz zu DU BOIS-REYMOND, von der Rücksicht auf die Anwendungen befreit, die Mengenlehre mehr und mehr um ihrer selbst willen ausgebaut und sie durch systematische Darstellung zum Rang einer selbständigen mathematischen Disziplin erhoben.

Dieser der Analysis zugehörige Fragenkomplex muß nicht nur bezüglich der *Entstehung* der Mengenlehre, sondern noch mehr bezüglich ihrer *Anwendungen* auf andere mathematische Gebiete an erster Stelle genannt werden. Die Verknüpfung zwischen Mengenlehre und Funktionentheorie ist so eng geworden, daß diese ohne jene kaum mehr zu denken ist; die meisten Lehrbücher der Funktionentheorie weisen Eingangsabschnitte mengentheoretischen Inhalts auf, ja es wird bezüglich vieler Überlegungen aus der Theorie der Punktmengen und der der reellen Funktionen vom subjektiven Geschmack abhängen, ob man sie zur einen oder zur anderen Disziplin rechnen will. (Für die einschlägigen Lehrbücher vergleiche man die Hinweise auf S. 164.) Unter den vielen glänzenden Erfolgen, zu denen die Mengenlehre der Funktionentheorie verholfen hat, sei hier nur einer erwähnt, dessen Bedeutung dem mit der Infinitesimalrechnung vertrauten Leser sofort einleuchten wird. Der seit mehr als zwei Jahrhunderten in der Analysis (und ihren Anwendungen auf Naturwissenschaft und Technik) unentbehrliche, durch A. L. CAUCHY (1823) und namentlich B. RIEMANN (1851) streng und allgemein begründete Begriff des *bestimmten Integrals* einer Funktion versagt in gewissen Fällen; dann nämlich, wenn die zu integrierende Funktion (bzw. das zugrunde gelegte Argument) so stark unstetig ist, daß der als Integral definierte Grenzwert nicht existiert. Mittels mengentheoretischer Betrachtungen, nämlich durch geeignete Definition und Begründung des *Inhalts (oder Maßes) zwei- und mehrdimensionaler Punktmengen*, ist es indes namentlich H. LEBESGUE seit 1902 gelungen, auch für ausgedehnte Klassen von Funktionen, die im obigen Sinn nicht integrierbar sind, einen naturgemäßen Integralbegriff einzuführen (den man inzwischen auch auf andere Weise zu beherrschen gelernt hat); der neue Begriff ist übrigens von solcher Art, daß das RIEMANNsche und das LEBESGUEsche Integral, soweit beide existieren, miteinander übereinstimmen. So haben die Methoden der Mengenlehre für einen der wichtigsten Begriffe der Analysis zu einer wesentlichen Erweiterung geführt. Namentlich für diese Anwendungen der Mengenlehre (wie auch für sie selbst) existiert seit 1919 sogar eine eigene Zeitschrift, die in Warschau erscheinenden „Fundamenta Mathematicae“.

Die Fragestellungen der Funktionenlehre, die CANTOR zu seinen Entdeckungen führten, sind gleichzeitig enge mit der *Geometrie* verknüpft; es genügt, an die Theorie der Punktmengen zu erinnern, wo die mengentheoretischen Methoden Unterscheidungen und Zergliederungen gestatten, die vorher der Geometrie unmöglich waren, und z. B. zum erstenmal eine scharfe Definition des Kontinuums ermöglichten (§ 10). Jene Methoden gewannen weiterhin u. a. Anwendung auf die Untersuchung stetiger Abbildungen zwischen geometrischen Mannigfaltigkeiten (Dimensionsbegriff, vgl. S. 102 und MENGER [3]) und überhaupt auf die modernen Fragen der *Analysis Situs* oder Topologie, die sich ganz allgemein mit der Anordnung räumlicher Gebilde beschäftigt. Auch die Fragen der *synthetischen Geometrie*, in der die Gerade als „Träger" aller auf ihr gelegenen Punkte, der Punkt als Träger aller durch ihn gehenden Geraden betrachtet wird, haben zur Zeit der Entstehung der Mengenlehre anregend gewirkt; auf dem Boden der synthetischen Geometrie ist wohl zuerst der Ausdruck „Mächtigkeit" erwachsen.

Schließlich ist unter den Fragen, die für die Entwicklung der Mengenlehre von Bedeutung gewesen sind, noch die Lehre von den *natürlichen Zahlen* zu nennen (vgl. S. 181 ff. und 320 f.), um die sich R. DEDEKIND mit seiner 1887 erschienenen Schrift [2] die größten Verdienste erworben hat. Aus dieser Schrift stammt u. a. eine ausgedehnte Verwendung des Begriffs der umkehrbar eindeutigen Zuordnung (Abbildung), namentlich die Theorie der „Ketten", die seit ihrer Verwendung und Ausdehnung durch ZERMELO [2] und HESSENBERG [8] zu allgemeiner und grundsätzlicher Bedeutung in der Mengenlehre gelangt ist (vgl. S. 205 ff.). Aber weit über die Mengenlehre hinaus hat der Begriff der umkehrbar eindeutigen Zuordnung, dessen Wesentlichkeit DEDEKIND in der Vorrede zu [2] in helles Licht setzt, eine immer steigende Bedeutung gewonnen, so namentlich in der modernen Gruppen- und Körpertheorie[1]. Ein wissenschaftlich wertvoller Briefwechsel, der der Herausgabe noch harrt, hat lange Zeit CANTOR und DEDEKIND verbunden; in der Art, wie CANTOR seine Ideen früher und später auffaßte und darstellte, ist denn auch DEDEKINDS Einfluß (im logizistischen Sinn) unverkennbar. — In der vorstehenden Darstellung der Mengenlehre sind übrigens der Begriff und die Grundeigenschaften der natürlichen Zahl durchgehends *vorausgesetzt* worden aus Gründen, die mehrfach Erörterung gefunden haben.

So hat sich, während im allgemeinen in der Mathematik ein gewisser Gegensatz fühlbar wird zwischen der geometrisch- bzw. analytisch-kontinuierlichen und der (in der neueren Zeit bevorzugten) arithmetisch-diskreten Betrachtungsweise, in der Mengenlehre ein gemeinsamer Mutterboden für beide Gedankenkreise ergeben. Eben eine

---

[1] Vgl. namentlich STEINITZ [1] und HASSE [1].

solche „wahre Fusion von Arithmetik und Geometrie" durch die Mengenlehre zu schaffen, innerhalb deren beide ihre gleichberechtigten Plätze finden sollten, war CANTORS bewußtes Streben (vgl. KLEIN [1_3], S. 288).

Abgesehen von den besonderen Anwendungen auf Analysis, Geometrie und Zahlenlehre[1], übrigens auch auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und Physik (vgl. z. B. ROSENTHAL [1] und [2] und PLANCHEREL [1])[2], fällt schließlich der Mengenlehre als dem allgemeinsten Zweig der Mathematik noch die bedeutsame Aufgabe zu, eine Reihe der wichtigsten Grundbegriffe der Mathematik — so z. B. die Begriffe der Anzahl (S. 55 ff.), der Anordnung (S. 124 ff. und 316 f.), der Funktion (vgl. S. 17 f. und 105) — methodisch zu untersuchen und zu einem möglichst reinen und gesicherten Aufbau der Grundlagen aller mathematischen Wissenschaften wertvolle Hilfsmittel beizusteuern. Die Mengenlehre stellt hiernach nicht nur einen wesentlichen Teil, sondern geradezu das Fundament der mathematischen Wissenschaft dar, ein Anspruch, der ihr nur vom Standpunkt der Intuitionisten begreiflicherweise bestritten wird.

Die großen Erfolge, die die Mengenlehre in all den genannten Hinsichten schon gegenwärtig aufzuweisen hat, haben bewirkt, daß diese Disziplin trotz ihrer Jugend heute einen wichtigen, ja einen bevorzugten Platz innerhalb des Gebietes der Mathematik einnimmt; ein innerhalb der Gesamtwissenschaft so führender Forscher wie HILBERT bezeichnet sie als „einen der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweige der Mathematik überhaupt" und gegenüber den intuitionistischen Angriffen als ein von CANTOR geschaffenes „Paradies, aus dem uns niemand soll vertreiben können"[3]. Wenn bis in das letzte Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts hinein CANTOR und seine Ideen nur in einem engen Kreise seiner mathematischen Zeitgenossen Anerkennung und Würdigung gefunden haben, so hat sich dies seither ziemlich rasch völlig verändert; die Mengenlehre wird jetzt innerhalb der Mathematik höchst intensiv benutzt und weit über die Grenzen der Fachmathematiker hinaus studiert. Diese ihre heutige Wertschätzung aber liegt, abgesehen von der Wichtigkeit ihrer Anwendungen, zu einem

---

[1] Auch für gewisse andere Fälle, bei denen es sich fast ausschließlich um endliche (und ausnahmsweise um abzählbare) Gesamtheiten handelt, erweisen sich die Methoden der Mengenlehre als fruchtbar; vgl. ZERMELO [5], D. KÖNIG [2] und KALMÁR [1].

[2] Anwendungen der Mengenlehre auf mathematische Physik (in einem anderen Sinn) hat CANTOR schon 1882 vorhergesagt ([7 III], S. 120f.; vgl. auch ROSENTHAL-BOREL [1], S. 905, Fußnote 160, sowie SCHOENFLIES [12], S. 22). — Daß gewisse Anwendungen „auf die Naturlehre der Organismen" zwecks „einer genaueren Ergründung des Wesens des Organischen" etwa „die eigentliche Veranlassung" für CANTORS Untersuchungen über Punktmengen geboten hätten, wie er selbst in einem Brief vom 22. September 1884 erklärt (SCHOENFLIES [12], S. 20), wird man im Hinblick auf seine damalige Gemütsverfassung cum grano salis zu verstehen haben.

[3] HILBERT [6], S. 411; [9], S. 170.

wesentlichen Teil auch an dem nämlichen Umstand, der ihr zunächst die allgemeine Anerkennung vorenthielt: sie stellt einen der größten und kühnsten Schritte dar, die die mathematische Entwicklung jemals getan hat. Und wenn WHITEHEAD in einem schönen Aufsatz über „Mathematik als ein Element in der Geschichte des Denkens“[1] die Mathematik als die *originalste* Schöpfung des menschlichen Geistes kennzeichnet, so gebührt — im Hinblick auf die dortige Begründung — dieser Ehrentitel wiederum unter den mathematischen Disziplinen zuvörderst der Mengenlehre als demjenigen Zweig der Mathematik, der am wenigsten Anlehnung an die äußere sinnliche Erfahrung findet[2], der am reinsten dem freien Denken des Menschen entsprungen ist. Mit dieser wahrhaft schöpferischen Eroberung der Welt des Unendlichen bedeutet CANTORS Werk eine Erweiterung des wissenschaftlichen Horizontes von nicht geringerem Ausmaße als das Kopernikanische Weltsystem in der Astronomie, als die EINSTEINsche Relativitätstheorie oder die PLANCKsche Quantenlehre in der Physik.

---

[1] WHITEHEAD [1], 2. Kapitel.

[2] Vgl. Fußnote 2 auf S. 119, sowie S. 373 f.

Literaturverzeichnis.

Ausschließlich die Schriften, auf die im vorliegenden Buch ausdrücklich Bezug genommen ist, sind nachstehend aufgeführt; ein Werturteil ist also in der Nennung oder Nichtnennung nicht enthalten, wohl aber ist ein solches bei den aufgeführten Schriften öfters im Text zu finden. In Rücksicht auf die reichhaltigen Zusammenstellungen der älteren Literatur, wie sie sich namentlich in den Schriften SCHOENFLIES [1] und [8], W. H. YOUNG [1], ROSENTHAL-BOREL [1] sowie (für die logistische Literatur) LEWIS [1] finden, ist von den *älteren* Arbeiten einschlägigen Inhalts meist nur eine den jeweiligen Zwecken angepaßte Auswahl angeführt.

Für die abstrakte Mengenlehre ist an Lehrbüchern — etwa in der Reihenfolge von den elementareren zu den tiefergehenden Darstellungen — GRELLING [2], HESSENBERG [3], NATUCCI [1] (Kap. 5—7), LITTLEWOOD [1], HAUSDORFF [3] und [4] zu nennen (für holländische Leser auch HAALMEIJER-SCHOGT [1]); kurze, aber anregende Einführungen bei HESSENBERG [10], KLEIN [1] und VERRIEST [1] sowie in zahlreichen Lehrbüchern der Funktionenlehre. Für eindringende Studien kommt allein das ausgezeichnete Lehrbuch von HAUSDORFF in Betracht. Daneben vergleiche man noch CANTORS Originalaufsätze (die demnächst gesammelt erscheinen werden), namentlich [7 V] und [12]. Handbücher von mehr enzyklopädischem Charakter sind SCHOENFLIES [1] und [8]. Man vergleiche auch etwa die kürzeren enzyklopädischen Darstellungen in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (deutsche Ausgabe, Bd. I, I A 5 von A. SCHOENFLIES, französische Ausgabe, T. I, 7 von R. BAIRE) sowie in PASCALS Repertorium der höheren Mathematik (2. Aufl., Bd. I 1, S. 17—30, von H. HAHN). Die Lehr- und Handbücher der Theorie der Punktmengen und reellen Funktionen findet man auf S. 164 zusammengestellt.

ACKERMANN, W. [1] Begründung des „tertium non datur" mittels der HILBERTschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. *Mathematische Annalen*, Bd. 93, S. 1—36. 1924.

— [2] Die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms. *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse*, 1924, S. 246—250.

— [3] Was ist Mathematik? *Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht*, Bd. 58, S. 449 bis 455. 1927.

— [4] Zum HILBERTschen Aufbau der reellen Zahlen. *Mathem. Annalen*, Bd. 99, S. 118—133. 1928.
Siehe auch unter HILBERT.

ALEXANDROFF, P. [1] Darstellung der Grundzüge der URYSOHNschen Dimensionstheorie. *Math. Ann.*, Bd. 98, S. 31—63. 1928.

ARTIN, E. und O. SCHREIER [1] Algebraische Konstruktion reeller Körper. *Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamburgischen Universität*, Bd. 5, S. 85—99. 1927.

BAER, R. [1] Über nicht-Archimedisch geordnete Körper. *Sitzungsber. der Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl.*, Jg. 1927, 8. Abh., S. 3—13.

— [2] Algebraische Theorie der differentiierbaren Funktionenkörper. I. Ebenda, S. 15—32.

BAER, R. [3] Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. *Mathem. Zeitschr.*, Bd. 27, S. 536—539. 1928. (Vgl. auch ebenda, S. 540—543.)
— [4] Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik. Erscheint in der *Math. Zeitschr.*, Bd. 29. 1928 oder 1929.

BAIRE, R. [1] Sur les fonctions des variables réelles. *Annali di Matem. p. ed appl.*, (3) Bd. 3, S. 1—123. 1899. (Auch selbständig als Thèse erschienen.)
— [2] Leçons sur les fonctions discontinues. Paris 1905.
Siehe auch BOREL [2], Note IV.

BALDUS, R. [1] Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. (*Wissen und Wirken*, Bd. 11.) Karlsruhe i. B. 1924.
— [2] Über das Archimedische Axiom. *Math. Zeitschr.*, Bd. 26, S. 757—761. 1927.
— [3] Nichteuklidische Geometrie. (*Sammlung Göschen*, Nr. 970.) Berlin und Leipzig 1927.
— [4] Zur Axiomatik der Geometrie. I. Über HILBERTS Vollständigkeitsaxiom. Erscheint in den *Math. Ann.* 1928 oder 1929.

BANACH, S. [1] Un théorème sur les transformations biunivoques. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 6, S. 236—239. 1924.

BARIÈ, G. E. [1] La posizione gnoseologica della matematica. Torino 1925.
— [2] La dottrina matematica di KANT nell' interpretazione dei matematici moderni. *Atti del V Congresso Internaz. di Filosofia, Napoli 1924*, S. 571—582. 1925.

BARZIN, M. und A. ERRERA [1] Sur la logique de M. BROUWER. *Acad. R. de Belgique, Bull. de la Cl. des Sciences*, (5) Bd. 13, S. 56—71. 1927.

BECKER, O. [1] Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, Bd. 6, S. 385—560. 1923.
— [2] Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. (Sonderdruck aus dem *Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenolog. Forschung*, Bd. 8.) Halle a. S. 1927.
— [3] Das Symbolische in der Mathematik. *Blätter f. deutsche Philosophie*, Bd. 1, S. 329—348. 1928.

BEHMANN, H. [1] Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. *Math. Ann.*, Bd. 86, S. 163—229. 1922.
— [2] Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von RUSSELL und WHITEHEAD. Inauguraldissertation Göttingen 1923. (Nicht gedruckt; nur maschinenschriftlich vorhanden. Vgl. dazu *Jahrbuch der math.-naturw. Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen*, 1922 [Juli—Dezember], Göttingen 1923, S. 55—64.)
— [3] Mathematik und Logik. (*Math.-phys. Bibliothek*, Bd. 71.) Leipzig u. Berlin 1927.
— [4] Entscheidungsproblem und Logik der Beziehungen. *Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Verein.*, Bd. 36, S. *17*f. 1927. (Siehe auch ebenda, Bd. 32, S. *66*f. 1923.)

BELL, E. T. [1] Arithmetic of logic. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 29, S. 597—611. 1927. (Vgl. dazu W. A. HURWITZ in *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 432. 1928.)

BENDIXSON, I. [1] Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. *Acta Mathematica*, Bd. 2, S. 415—429. 1883.
— [2] Nagra studier öfver oändliga punktmängder. *Öfvers. af K. Svenska Vet.-Ak. Förhandl.*, Bd. 40, No. 2, S. 31—35. 1883.
— [3] Sur la puissance des ensembles parfaits de points. *Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar*, Bd. 9, Nr. 6. 1884.
— [4] Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles. Ebenda, Nr. 7.

BERGMANN, H. [1] Das philosophische Werk BERNARD BOLZANOS. Nebst einem Anhange: BOLZANOS Beiträge zur philosophischen Grundlegung der Mathematik. Halle a. S. 1909.
— [2] Das Unendliche und die Zahl. Halle a. S. 1913.
BERNAYS, P. [1] Über HILBERTS Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 31, S. 10—19. 1922.
— [2] Die Bedeutung HILBERTS für die Philosophie der Mathematik. *Die Naturwissenschaften*, Bd. 10, S. 93—99. 1922.
— [3] Erwiderung auf die Note von Herrn ALOYS MÜLLER „Zahlen als Zeichen". *Math. Ann.*, Bd. 90, S. 159—163. 1923.
— [4] Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalkuls der „Principia mathematica". *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 25, S. 305—320. 1926.
— [5] Probleme der theoretischen Logik. *Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw.*, Bd. 33, S. 369—378. 1927.
— [6] Über NELSONS Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik. *Die Naturwissenschaften*, Bd. 16, S. 142—145. 1928.
Siehe auch unter HILBERT [10].
BERNSTEIN, B. A. [1] Complete sets of representations of two-element algebras. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 30, S. 24—30. 1924.
— [2] A generalisation of the syllogism. Ebenda, S. 125—127.
— [3] Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 26, S. 171—175. 1924.
— [4] A set of postulates for the logic of propositions. Ebenda, Bd. 28, S. 472 bis 478. 1926.
— [5] The dual of a logical expression. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 33, S. 309—311. 1927.
BERNSTEIN, F. [1] Über die Begründung der Differentialrechnung mit Hilfe der unendlichkleinen Größen. *Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 13, S. 241—246. 1904. (Vgl. ebenda S. 346 und 478—481.)
— [2] Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. *Math. Ann.*, Bd. 60, S. 187—193. 1905.
— [3] Untersuchungen aus der Mengenlehre. Ebenda, Bd. 61, S. 117—155. 1905. (Schon 1901 als Göttinger Inauguraldissertation erschienen.) Vgl. dazu auch ebenda, Bd. 60, S. 463f. 1905.
— [4] Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. *Ber. üb. d. Verhandl. der K. Sächsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, Bd. 60, S. 325—338. 1908.
— [5] Die Mengenlehre GEORG CANTORS und der Finitismus. *Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 28, S. 63—78. 1919.
BETSCH, CHR. [1] Fiktionen in der Mathematik. Stuttgart 1926.
BIEBERBACH, L. [1] Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert. *Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wissensch., Physik.-math. Klasse*, 1925. S. 381—398.
BOEHM, K. [1] Begriffsbildung. (*Wissen und Wirken*, Bd. 2.) Karlsruhe i. B. 1922.
DU BOIS-REYMOND, P. [1] Die allgemeine Funktionentheorie. 1. Teil. Tübingen 1882. (Keine Fortsetzung erschienen.)
BOLZANO, B. [1] Philosophie der Mathematik oder Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. (Ursprünglich 1810 erschienen.) Neu herausgegeb. mit Einleitung und Anmerkungen von H. FELS. (*Sammlung philosophischer Lesestoffe*, Bd. 9.) Paderborn 1926.
— [2] Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen Darstellung der Logik. 4 Bände. Sulzbach 1837. Neu herausgegeb. von A. HÖFLER; Leipzig 1914.
— [3] Paradoxien des Unendlichen. (Ursprünglich 1851 aus BOLZANOS Nachlaß herausgegeb. von FR. PŘIHONSKY.) Neu herausgegeb. durch A. HÖFLER, mit Anmerkungen versehen von H. HAHN. (*Philosophische Bibliothek*, Bd. 99.) Leipzig 1920.

BOREL, E. [1] Leçons sur la théorie des fonctions. Paris 1898.
— [2] Dasselbe. 2e édition (mit wichtigen weiteren Anhängen). Paris 1914. (3e éd. 1928.)
— [3] Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris 1905.
— [4] Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives. *Atti della R. Accad. dei Lincei, Rendiconti, Cl. di sc. fis. etc.*, Bd. 28, 2º Sem., S. 163—165. 1919.
— [5] A propos de la récente discussion entre M. R. WAVRE et M. P. LÉVY. *Revue de Métaph. et de Morale*, Bd. 34, S. 271—276. 1927.
BOUTROUX, P. [1] Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Deutsche Ausgabe von H. POLLACZEK-GEIRINGER. (*Wissenschaft u. Hypothese*, Bd. 28.) Leipzig u. Berlin 1927.
BRIDGMANN, P. W. [1] The logic of modern physics. New York 1927.
BRODÉN, T. [1] Über uneigentliche Redeweisen in der Mengenlehre und über einen Aufsatz des Herrn HJ. EKLUND. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, Avd. B, Bd. 29, S. 36—43. 1918. (Vgl. auch ebenda, Bd. 28, S. 21—32. 1917.)
— [2] Über verschiedene Gesichtspunkte bei der Grundlegung der mathematischen Analysis. *Lunds universitets årsskrift*, N. F., Avd. 2, Bd. 17, Nr. 7. 1921.
— [3] Eine realistische Grundlegung der Mathematik. Ebenda, Bd. 20, Nr. 1. 1924.
— [4] Einige Worte über aktuelle mathematische Prinzipfragen. *Den sjette Skandinaviske Matematikerkongres i København* 1925 (København 1926), S. 229—239.
— [5] Om den RUSSELLska antinomien. Lund 1926.
BROUWER, L. E. J. [1] Over de grondslagen der wiskunde. Dissertation. Amsterdam u. Leipzig 1907. (Vgl. dazu auch *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) Bd. 8, S. 326—328. 1908.)
— [2] De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, Bd. 2, S. 152—158. 1908.
— [3] Die möglichen Mächtigkeiten. *Atti del IV Congresso Intern. dei Matematici, Roma 1908*, Bd. 3, S. 569—571. 1909.
— [4] Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Ann.*, Bd. 70, S. 161—165. 1911. (Vgl. dazu auch *Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Proceedings*, Bd. 26, S. 799, Fußnote 19. 1923.)
— [5] Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Ebenda, Bd. 71, S. 305 bis 313. 1912.
— [6] Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Ebenda, Bd. 72, S. 55f. 1912.
— [7] Intuitionisme en formalisme. (Antrittsrede.) Groningen 1912. (In engl. Übersetzung im *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 20, S. 81—96. 1913.)
— [8] (Rezension des Werkes SCHOENFLIES [8].) *Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 23, S. 78—83. 1914.
— [9] Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde. *Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Verslagen (der wis- en natuurk. afd.)*, Bd. 25, S. 1418 bis 1423. 1917.
— [10] Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. I. und II. Teil. Amsterdam 1918/19. (Aus den *Verhand. d. Kon. Akademie v. Wetensch. te Amsterdam*, eerste sectie, deel XII, Nrs. 5 en 7.)
— [11] Wiskunde, waarheid, werkelijkheid. Groningen 1919.
— [12] Intuitionistische Mengenlehre. *Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 28, S. 203—208. 1919. (Abgedruckt auch in *Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Proceedings*, Bd. 23, S. 949—954. 1920.)
— [13] Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? *Math. Ann.*, Bd. 83, S. 201—210. 1921.
— [14] Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. I. Teil. Amsterdam 1923. (Aus den *Verhand. d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam*, eerste sectie, deel XIII, Nr. 2.)

BROUWER, L. E. J. [15] (und B. DE LOOR) Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Ebenda, *Proceedings*, Bd. 27, S. 186—188. 1924. (Vgl. auch ebenda, S. 631—634.)

— [16] Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. *Journ. f. (d. reine u. angewandte) Mathematik*, Bd. 154, S. 1—7. 1925.

— [17] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I—III. *Math. Ann.*, Bd. 93, S. 244—257. 1925. Bd. 95, S. 453—472. 1926. Bd. 96, S. 451—488. 1927. (Eine erweiterte und mit Verbesserungen versehene Wiedergabe von [10 I].) Teil IV erscheint demnächst ebenda.

— [18] Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 33, S. 251—256. 1925.

— [19] Über Definitionsbereiche von Funktionen. *Math. Ann.*, Bd. 97, S. 60 bis 75. 1927.

BRUNSCHVICQ, L. [1] Les étapes de la philosophie mathématique. 2e édition (unverändert!). Paris 1922.

BUCHHOLZ, H. [1] Das Problem der Kontinuität. (*Neue psycholog. Studien*, herausg. v. F. KRUEGER, Bd. 3, Heft 1, S. 1—110.) München 1927.

BURALI-FORTI, C. [1] Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Bd. 11, S. 154—164. 1897. (Vgl. auch ebenda, S. 260.)

— [2] Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel. *Biblioth. du Congr. Intern. de Philos., Paris 1900*, Bd. 3, S. 289—307. (1903.)

— [3] Logica matematica. Seconda edizione. Milano 1919.

BURKAMP, W. [1] Begriff und Beziehung. Studien zur Grundlegung der Logik. Leipzig 1927.

— [2] Die Krisis des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, Bd. 4, Heft 2, S. 59—81. 1927.

CAJORI, F. [1] Leibniz, the master-builder of mathematical notations. *Isis*, Bd. 7, S. 412—429. 1925.

CANTOR, G. [1] De transformatione formarum ternariarum quadraticarum. Habilitationsschrift. Halle (1869).

— [2] Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journ. f. Math.*, Bd. 72, S. 130—138. 1870.

— [3] Beweis, daß eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt. Ebenda, S. 139—142.

— [4] Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.*, Bd. 5, S. 123—133. 1872.

— [5] Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journ. f. Math.*, Bd. 77, S. 258—263. 1874.

— [6] Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Ebenda, Bd. 84, S. 242—259. 1878.

— [7] Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. *Math. Ann.*, Bd. 15, S. 1—8. 1879. II. Ebenda, Bd. 17, S. 355—359. 1880. III. Ebenda, Bd. 20, S. 113—122. 1882. IV. Ebenda, Bd. 21, S. 51—59. 1883. V. Ebenda, S. 545 bis 591. VI. Ebenda, Bd. 23, S. 453—488. 1884. Die Abhandlung V ist auch gesondert u. d. T. „Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre“ in Leipzig 1883 erschienen, die Abhandlungen I—V (wie auch [4]—[6]) in französischer Übersetzung (z. T. auszugsweise) in Bd. 2 der *Acta Mathematica*.

— [8] Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen. *Math. Ann.*, Bd. 19, S. 588—594. 1882.

— [9] Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche. *Zeitschr. f. Philosophie u. philosoph. Kritik*, N. F., Bd. 88, S. 224—233. 1886. (Mit Abweichungen, namentlich in der zweiten Hälfte, auch in *Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, Bd. 11, 1886, als Nr. 19 erschienen.)

CANTOR, G. [10] Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. u. II. Ebenda, Bd. 91, S. 81—125 und 252—270, 1887, und Bd. 92, S. 240—265, 1888. (Die Aufsätze [9] und [10] sind auch gesondert u. d. T. „Zur Lehre vom Transfiniten. Erste Abteilung“ in Halle a. S. 1890 erschienen. Ferner sind mit geringfügigen Abweichungen [9] und Teile von [10] in der Zeitschrift *Natur und Offenbarung*, Bd. 32, S. 46—49 und 226—233, 1886 veröffentlicht.)

— [11] Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein.*, Bd. 1, S. 75—78. 1892. (In italienischer Übersetzung erschienen in der *Rivista di Matematica*, Bd. 2, S. 165—167. 1892.)

— [12] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I. *Math. Ann.*, Bd. 46, S. 481—512. 1895. II. Ebenda, Bd. 49, S. 207—246. 1897. (In französischer Übersetzung erschienen in den *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, (5) Bd. 3, S. 343—437, 1899; in englischer Ausgabe von Ph. E. B. JOURDAIN in Chicago 1915; Abhandlung I auch in italienischer Übersetzung von F. GERBALDI in der *Rivista di Matematica*, Bd. 5, S. 129—162, 1895.)

— [13] Sui numeri transfiniti. (Estratto d'una lettera di GEORG CANTOR a G. VIVANTI.) [Deutsch] *Rivista di Matematica*, Bd. 5, S. 104—108. 1895

— [14] Lettera di GEORG CANTOR a G. PEANO. [Deutsch] Ebenda, S. 108—109. (Vgl. einen Brief von O. STOLZ „Zum Infinitärcalcul“, ebenda, S. 166—167.)

CANTOR-STÄCKEL [1] So wird eine (nicht gedruckte) von P. STÄCKEL herrührende Aufzeichnung über einen Vortrag zitiert, den CANTOR über seine mengentheoretischen Untersuchungen am 24. Sept. 1897 in Braunschweig (gelegentlich der Naturforscherversammlung) vor einem engeren Kreis von Fachgenossen gehalten hat und der namentlich in historischer Beziehung manches Interessante enthält. Die Aufzeichnung wurde dem Verfasser nach dem Erscheinen der 1. Auflage des vorliegenden Buches von STÄCKEL zur Verfügung gestellt.

CARATHÉODORY, C. [1] Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig u. Berlin 1918. 2. Aufl. 1927.

CARNAP, R. [1] Der Raum. (*Ergänzungshefte d. Kant-Studien*, Nr. 56.) Berlin 1922.

— [2] Physikalische Begriffsbildung. (*Wissen u. Wirken*, Bd. 39.) Karlsruhe i. B. 1926.

— [3] Eigentliche und uneigentliche Begriffe. *Symposion*, Bd. 1, S. 355—374. 1927.

— [4] Der logische Aufbau der Welt. Berlin-Schlachtensee 1928.

CASSIRER, E. [1] Kant und die moderne Mathematik. *Kantstudien*, Bd. 12, S. 1 bis 49. 1907.

— [2] Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910.

CHADWICK, J. A. [1] Logical constants. *Mind*, Bd. 36, S. 1—11. 1927.

— [2] On propositions belonging to logic. Ebenda, S. 347—353.

CHURCH, A. [1] Alternatives to ZERMELO's assumption. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 29, S. 178—208. 1927.

— [2] On the law of excluded middle. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 75 bis 78. 1928. (Vgl. auch E. R. HEDRICK, ebenda, S. 436.)

CHWISTEK, L. [1] Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik. *Math. Zeitschr.*, Bd. 14, S. 236—243. 1922.

— [2] The theory of constructive types. (Principles of logic and mathematics.) Part I and II. Extracted from the *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. Cracow 1923/25.

— [3] Sur les fondements de la logique moderne. *Atti del V Congresso Intern. di Filosofia, Napoli 1924*, S. 24—28. 1925.

— [4] Über die Hypothesen der Mengenlehre. *Math. Zeitschr.*, Bd. 25, S. 439 bis 473. 1926.

CIPOLLA, M. [1] Sul postulato di ZERMELO e la teoria dei limiti delle funzioni. *Atti della Accad. Gioenia di Sc. nat. in Catania,* (5) Bd. 6, Nr. V. 1913.
— [2] Analisi algebrica. 2ª ed. Palermo 1921.
— [3] Sui fondamenti logici della matematica secondo le recenti vedute di HILBERT. *Annali di Matematica,* (4) Bd. 1, S. 19—29. 1924.
CLAUBERG, K. W. und W. DUBISLAV [1] Systematisches Wörterbuch der Philosophie. Leipzig 1923.
COMBÉBIAC, G. [1] Sur les éléments de la théorie des ensembles ordonnés. *L'Enseignement Mathématique,* Bd. 8, S. 201—203. 1906.
COUTURAT, L. [1] L'infini mathématique. Thèse. Paris 1896.
— [2] Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch v. C. SIEGEL. Leipzig 1908.
— [3] Die Prinzipien der Logik. *Encyclopädie d. philosoph. Wissensch.,* Bd. 1 (Logik), S. 137—201. Tübingen 1912.
DEDEKIND, R. [1] Stetigkeit und irrationale Zahlen. (Ursprünglich 1872 erschienen.) 5. Aufl. Braunschweig 1927.
— [2] Was sind und was sollen die Zahlen? (Ursprünglich 1887 erschienen.) 4. Aufl. Braunschweig 1918.
DEMPF, A. [1] Das Unendliche in der mittelalterlichen Metaphysik und in der kantischen Dialektik. Münster i. W. 1926.
DIECK, W. [1] Die Paradoxien der Mengenlehre. *Ann. d. Philos. u. philos. Kritik,* Bd. 5, S. 43—56. 1926.
— [2] Der Widerspruch im Richtigen. Gemeinverständliche mathematische Kritik der geltenden Logik. Sterkrade 1926.
DINES L. L. [1] Complete existential theory of SHEFFER's postulates for Boolean algebras. *Bull. of the Amer. Math. Soc.,* Bd. 21, S. 183—188. 1915.
DINGLER, H. [1] Über die Bedeutung der BURALI-FORTIschen Antinomie für die Wohlordnungssätze der Mengenlehre. München 1911.
— [2] Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre und eine paradoxienfreie Mengendefinition. *Jahresber. d. Dtsch. Mathem.-Verein.,* Bd. 22, S. 307—315. 1913. (Vgl. auch ebenda, Bd. 28, S. 138—158. 1919.)
— [3] Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik, zugleich als Einführung in die Axiomatik. München 1915.
— [4] Über die Grundlagen der Arithmetik und deren Widerspruchslosigkeit. *Ann. d. Philos. u. philos. Kritik,* Bd. 5, S. 217—240. 1925.
— [5] Der Zusammenbruch der Wissenschaft und der Primat der Philosophie. München 1926.
DOETSCH, G. [1] Der Sinn der reinen Mathematik und ihrer Anwendung. *Kantstudien,* Bd. 29, S. 439—459. 1924.
DRESDEN, A. [1] BROUWER's contributions to the foundations of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* Bd. 30, S. 31—40. 1924.
— [2] Mathematics and natural science. *The Monist,* Bd. 37, S. 120—130. 1927.
DUBISLAV, W. [1] Über das Verhältnis der Logik zur Mathematik. *Ann. d. Philos. u. philos. Kritik,* Bd. 5, S. 193—208. 1926.
— [2] Über die Definition. 2. Aufl. Berlin 1927.
— [3] Die FRIESsche Lehre von der Begründung. Dömitz 1926.
Siehe auch unter CLAUBERG.
EATON, R. M. [1] Symbolism and truth. An introduction to the theory of knowledge. Cambridge Mass. (Harvad University Press) 1925.
EKLUND, H. [1] Über Mengen, die Elemente ihrer selbst sind. *Nyt Tidsskrift for Matematik,* Avd. B, Bd. 29, S. 8—28. 1918.
ENRIQUES, F. [1] Probleme der Wissenschaft. Übers. v. KURT GRELLING. 2 Teile. (*Wissensch. u. Hypoth.,* Bd. 11.) Leipzig u. Berlin 1910.

ENRIQUES, F. [2] Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique. *Revue de Métaph. et de Mor.*, Bd. 24, S. 149—164. 1917.
— [3] Sui fondamenti dell' aritmetica e sul principio dell' invarianza del numero. *Atti della R. Accademia dei Lincei (Roma), Rendiconti, Cl. di sc. fis. etc.*, (5) Bd. 32_{II}, S. 113—117. 1923.
— [4] Zur Geschichte der Logik. Deutsche Ausgabe v. L. BIEBERBACH. (*Wiss. u. Hypoth.*, Bd. 26.) Leipzig u. Berlin 1927.
FABER, G. [1] Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. *Math. Ann.*, Bd. 60, S. 196—203. 1905.
FECHNER, O. [1] Das Verhältnis der Kategorienlehre zur formalen Logik. Rostock 1927.
FEIGL, G. [1] Eine Bemerkung zu den Anordnungsaxiomen der linearen Geometrie. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 33, S. 166—168. 1925. (Vgl. auch ebenda, S. 2—24.)
— [2] Über das Archimedische Axiom. *Math. Zeitschr.*, Bd. 25, S. 590—601. 1926.
FELS, H. [1] Bernard Bolzano. *Philosoph. Jahrbuch d. Görresgesellschaft*, Bd. 39, S. 384—418. 1926.
— [2] Die Philosophie Bolzanos. Ebenda, Bd. 40, S. 319—336 und 423—448. (Siehe besonders S. 429ff.) 1927.
FETTWEIS, E. [1] Das Rechnen der Naturvölker. Leipzig u. Berlin 1927.
FEYS, F. [1] La transcription logistique du raisonnement. *Revue Néo-scolastique de Philosophie*, Bd. 26, S. 61—86. 1925.
— [2] Le raisonnement en termes de faits dans la logistique RUSSELLienne. Ebenda, Bd. 29, S. 393—421. 1927.
FINSLER, P. [1] Gibt es Widersprüche in der Mathematik? *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 34, S. 143—155. 1925.
— [2] Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. *Math. Zeitschr.*, Bd. 25, S. 676—682. 1926.
— [3] Über die Grundlegung der Mengenlehre. I. Teil. Die Mengen und ihre Axiome. Ebenda, S. 683—713. (Vgl. auch ebenda, Bd. 27, S. 540—542. 1928.)
— [4] Über die Lösung von Paradoxien. *Philos. Anzeiger*, Bd. 2, S. 183—192. 1927. (Vgl. auch ebenda, S. 202f.)
FRAENKEL, A. [1] Axiomatische Begründung von HENSELs *p*-adischen Zahlen. *Journ. f. Math.*, Bd. 141, S. 43—76. 1912.
— [2] Zahlbegriff und Algebra bei GAUSS. 1. Teil. Mit einem Anhang von A. OSTROWSKI. (Mater. f. e. wiss. Biogr. v. GAUSS, Heft VIII.) *Nachrichten der Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 1920, Beiheft, S. 1—59.
— [3] Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe. *Journ. f. Math.*, Bd. 151, S. 121—167. 1921.
— [4] Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen. I. *Math. Zeitschr.*, Bd. 13, S. 153—188. 1922.
— [5] Zu den Grundlagen der CANTOR-ZERMELOschen Mengenlehre. *Math. Ann.*, Bd. 86, S. 230—237. 1922.
— [6] Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. *Sitzungsb. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Physik.-math. Klasse*, 1922, S. 253—257.
— [7] Die neueren Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 33, S. 97—103. 1924.
— [8] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Math. Zeitschr.*, Bd. 22, S. 250—273. 1925.
— [9] Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. *Journ. f. Math.*, Bd. 155, S. 129—158. 1926.
— [10] Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. (*Wissensch. u. Hypoth.*, Bd. 31.) Leipzig u. Berlin 1927.
— [11] Über die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre. *Journ. f. Math.*, Bd. 157, S. 79—81. 1927.

FRAENKEL, A. [12] Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen. *Sitzungsber. d. Preuß. Ak. d. Wiss., Phys.-math. Kl.*, 1928.

FREGE, G. [1] Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.

— [2] Grundgesetze der Arithmetik. I und II. Jena 1893 und 1903.

FRINK, O. [1] The operations of Boolean algebras. *Annals of Mathematics*, (2) Bd. 27, S. 477—490. 1926.

GEIGER, M. [1] Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie. Augsburg 1924.

GEISSLER, K. [1] Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1902.

— [2] Grundgedanken einer übereuklidischen Geometrie durch die Weitenbehaftungen des Unendlichen. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 13, S. 233—240. 1904. (Vgl. auch ebenda, S. 341 u. 478.)

GONSETH, F. [1] Les fondements des mathématiques. Paris 1926.

GRELLING, K. [1] Die Axiome der Arithmetik mit besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zur Mengenlehre. Göttinger Inauguraldissertation 1910.

— [2] Mengenlehre. (*Math.-phys. Bibliothek*, Nr. 58.) Leipzig u. Berlin 1924.

— [3] Philosophy of the exact sciences: Its present status in Germany. *The Monist.*, Jg. 1928, S. 97—119.

— und L. NELSON [1] Bemerkungen zu den Paradoxien von RUSSELL und BURALI-FORTI. (Mit Anhängen von H. GOESCH und G. HESSENBERG.) *Abhandl. d. FRIESschen Schule*, N. F., Bd. 2, S. 301—334. 1907/1908.

GUTBERLET, C. [1] Das Problem des Unendlichen. *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik*, N. F., Bd. 88, S. 179—223. 1886.

— [2] (Rezension der 1. Auflage des vorliegenden Buches.) *Philos. Jahrb. d. Görresgesellschaft*, Bd. 32, S. 364—370. 1919.

GUTZMER, A. [1] Leopold Kronecker. *Naturwiss. Wochenschr.*, Bd. 8, S. 591—593. 1893.

HAALMEIJER, B. P. en J. H. SCHOGT [1] Inleiding tot de leer der verzamelingen. Groningen 1926.

HÄRLEN, H. [1] Sur la paradoxie logique dans la théorie des ensembles. *C. R. des séances de l'Acad. des Sc. Paris*, Bd. 184, S. 367—369. 1927.

— [2] Über Vollständigkeit und Entscheidbarkeit. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 37, S. 226—230. 1928.

HAGSTRÖM, K. G. [1] Om mängdteoriens paradoxier. *Nyt Tidsskrift for matem.*, Afd. B, Bd. 25, S. 1—19. 1914.

— [2] Note sur l'antinomie BURALI-FORTI. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Bd. 10, Nr. 2. 1914/1915.

HAHN, H. [1] Über die nichtarchimedischen Größensysteme. *Sitzungsber. d. math.-naturw. Kl. der Akad. d. Wiss. Wien*, Bd. 116 IIa, S. 601—655. 1907.

— [2] Theorie der reellen Funktionen. I. Bd. Berlin 1921. (II. Bd. noch nicht erschienen.)

— [3] Arithmetische Bemerkungen. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 30, S. 170—175. 1921. (Vgl. J. A. GMEINER, ebenda, S. 82—89 und S. 175—177.)

HAMEL, G. [1] Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Math. Ann.*, Bd. 60, S. 459—462. 1905.

HANKEL, H. [1] Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen. (Urspr. 1870 erschienen; wieder abgedruckt in:) *Math. Ann.*, Bd. 20, S. 63—112. 1882.

HARDY, G. H. [1] A theorem concerning the infinite cardinal numbers. *Quarterly Journ. of pure and appl. Math.*, Bd. 35, S. 87—94. 1903.

— [2] The continuum and the second number class. *Proceed. of the London Math. Society*, (2) Bd. 4, S. 10—17. 1907.

HARDY, G. H. [3] Orders of infinity. The „Infinitärcalcül" of PAUL DU BOIS-REYMOND. (*Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, No. 12.) 2nd ed. Cambridge (Engl.) 1924.

HARTOGS, F. [1] Über das Problem der Wohlordnung. *Math. Ann.*, Bd. 76, S. 438 bis 443. 1915. Vgl. dazu einen Vortrag von Miß I. M. SCHOTTENFELS, s. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 30, S. 230. 1924.

HASSE, H. [1] Höhere Algebra. II. Teil. (*Sammlung Göschen*, Nr. 932.) Berlin und Leipzig 1927.

HAUSDORFF, F. [1] Untersuchungen über Ordnungstypen. I und II. *Berichte üb. d. Verhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Kl.*, Bd. 58, S. 106—169. 1906. Bd. 59, S. 84—159. 1907. (Vgl. auch *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 16, S. 541—546. 1907.)

— [2] Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. *Math. Ann.*, Bd. 65, S. 435—505. 1908.

— [3] Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

— [4] Mengenlehre. (2. neubearbeitete Aufl. von [3]; *Göschens Lehrbücherei* I, 7.) Berlin u. Leipzig 1927.

HEINE, E. [1] Die Elemente der Functionenlehre. *Journ. f. Math.*, Bd. 74, S. 172 bis 188. 1872.

HERTZ, P. [1] Über die Axiomensysteme kleinster Satzzahl für ein System von Sätzen und den Begriff des idealen Elementes. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 31, S. 154—157. 1922.

— [2] Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. *Math. Ann.*, Bd. 87, S. 246—269. 1922. Bd. 89, S. 76—102. 1923.

HESSENBERG, G. [1] Über die kritische Mathematik. *Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges.*, Bd. 3, S. 21—28. 1904.

— [2] Das Unendliche in der Mathematik. *Abhandl. d.* FRIES*schen Schule*, N. F., [1. Bd.] 1. Heft, S. 137—190. 1904.

— [3] Grundbegriffe der Mengenlehre. (Sonderdruck aus den *Abhandl. d.* FRIES*schen Schule*, N. F., I. Bd., 4. Heft.) Göttingen 1906.

— [4] Potenzen transfiniter Ordnungszahlen. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 16, S. 130—137. 1907.

— [5] Kritik und System in Mathematik und Philosophie. *Abhandl. d.* FRIES*schen Schule*, N. F., Bd. 2, S. 77—152. 1907/8.

— [6] Willkürliche Schöpfungen des Verstandes? *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 17, S. 145—162. 1908. (Vgl. auch ebenda, S. 230f.)

— [7] Zählen und Anschauung. *Atti del IV Congresso Intern. dei Matematici, Roma 1908*, Bd. 3, S. 377—379. 1909.

— [8] Kettentheorie und Wohlordnung. *Journ. f. Math.*, Bd. 135, S. 81—133. 1909.

— [9] Transzendenz von e und π. Leipzig u. Berlin 1912.

— [10] Art. Mengenlehre in: *Taschenbuch f. Mathematiker u. Physiker*, Bd. 3, S. 69—81. 1913.

— [11] Vom Sinn der Zahlen. (Akademische Antrittsrede.) Tübingen 1922. Siehe auch unter GRELLING-NELSON.

HEYMANS, G. [1] Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens. 2 Bde. Leipzig 1890/94. (4. Aufl., Leipzig 1923.)

HEYTING, A. [1] Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde. (Dissertation Amsterdam.) Groningen 1925.

— [2] Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation. *Math. Ann.*, Bd. 98, S. 465—490. 1928.

— [3] Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie. Ebenda, S. 491—538.

HJELMSLEV, J. [1] Die natürliche Geometrie. *Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamburg. Universität*, Bd. 2, S. 1—36. 1923.

HILBERT, D. [1] Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.*, Bd. 38, S. 459—460. 1891.
— [2] Grundlagen der Geometrie. Ursprünglich 1899 erschienen. (*Wiss. u. Hypoth.*, Bd. 7.) 6. Aufl. Leipzig u. Berlin 1923.
— [3] Über den Zahlbegriff. *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 8, S. 180—184. 1900. (Auch als Anhang VI von [2] abgedruckt.)
— [4] Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internat. Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. *Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 1900, S. 253—297. (Mehrfach anderwärts abgedruckt.)
— [5] Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik. *Verhandl d. 3. intern. Math.-Kongresses in Heidelberg 1904*, S. 174—185. Leipzig 1905. (Auch als Anhang VII von [2] abgedruckt.)
— [6] Axiomatisches Denken. *Math. Ann.*, Bd. 78, S. 405—419. 1918.
— [7] Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abhandl. aus dem Mathemat. Seminar d. Hamburg. Universität*, Bd. 1, S. 157—177. 1922.
— [8] Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Math. Ann.*, Bd. 88, S. 151 bis 165. 1923.
— [9] Über das Unendliche. Ebenda, Bd. 95, S. 161—190. 1925. (Auszugsweise abgedruckt im *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 36, S. 201—215, 1927; in französischer Übersetzung in den *Acta Mathematica*, Bd. 48, S. 91—122, 1926.)
— [10] Die Grundlagen der Mathematik. (Mit Diskussionsbemerkungen von H. WEYL und einem Zusatz von P. BERNAYS.) *Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ.*, Bd. 6, S. 65—92. 1928.
HILBERT, D. und W. ACKERMANN [1] Grundzüge der theoretischen Logik. (*Diese Sammlung*, Bd. 27.) Berlin 1928. (Bei Abschluß des Druckes erschienen.)
HOBSON, E. W., [1] On the general theory of transfinite numbers and order types. *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 3, S. 170—188. 1905.
— [2] The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge (Engl.). I (3rd ed.) 1927, II (2nd ed.) 1926. Siehe auch unter J. KÖNIG [2].
HÖFLER, A. [1] Logik. (*Logik u. Erkenntnistheorie*, 1. Bd.) 2. Aufl. Wien u. Leipzig 1922.
HÖLDER, O. [1] Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. *Berichte über d. Verhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse*, Bd. 53, S. 1—64. 1901.
— [2] Die Arithmetik in strenger Begründung. Leipzig 1914.
— [3] Die mathematische Methode. Berlin 1924.
— [4] Der angebliche circulus vitiosus und die sogenannte Grundlagenkrise in der Analysis. *Berichte üb. d. Verhandl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Kl.*, Bd. 78, S. 243—250. 1926.
HORÁK, J. M. [1] Sur les antinomies de la théorie des ensembles. *Bull. international de l'Académie des Sciences de Bohême*, Bd. 26, S. 38—44. 1926.
VAN HORN, C. E. [1] An axiom in symbolic logic. *Proc. of the Cambridge Philos. Soc.*, Bd. 19, S. 22—31. 1920.
HUNTINGTON, E. V. [1] A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 3, S. 264—279. 1902.
— [2] Sets of independent postulates for the algebra of logic. Ebenda, Bd. 5, S. 288—309. 1904.
— [3] A set of postulates for ordinary complex algebra. Ebenda, Bd. 6, S. 209 bis 229. 1905.
— [4] The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory. *Annals of Mathematics*, (2) Bd. 6, S. 151—184. 1905. Bd. 7, S. 15—43. 1906. (Auch als selbständige Schrift erschienen, in 2. Aufl. Cambridge Mass. 1917, Neudruck 1921.)

HUNTINGTON, E. V. [5] Complete existential theory of the postulates for serial order. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 23, S. 276—280. 1917. (Siehe auch S. 280—282.)

— [6] A new set of postulates for betweenness, with proof of complete independence. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 26, S. 257—282. 1924.

HUREWICZ, W. [1] Grundriß der MENGERschen Dimensionstheorie. *Math. Ann.*, Bd. 98, S. 64—88. 1928.

HUSSERL, E. [1] Logische Untersuchungen. Bd. 1. 2. Aufl., Halle a. S. 1913.

— [2] Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. *Jahrb. f. Philosophie u. phänomenol. Forschung*, Bd. 1, S. 1—323. 1913.

JACOBSTHAL, E. [1] Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik. *Math. Ann.*, Bd. 66, S. 145—194. 1909.

— [2] Zur Arithmetik der transfiniten Zahlen. Ebenda, Bd. 67, S. 130—144. 1909.

JAŠEK, M. [1] Über den wissenschaftlichen Nachlaß BERNARD BOLZANOS. (Bericht über einen am 20. Sept. 1922 gehaltenen Vortrag.) *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 31, S. *109* f. 1922.

INGRAHAM, M. H. [1] Certain limitations of the value of the complete independence of a set of postulates. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 29, S. 199—200. 1923.

JOHNSON, W. E. [1] Logic. Part I—III. Cambridge (England) 1921—1924.

JOSEPH, H. W. B. [1] Logic and mathematics. *Journal of Philosophical Studies*, Bd. 3, S. 3—14. 1928.

JOURDAIN, PH. E. B. [1] On the general theory of functions. *Journ. f. Math.*, Bd. 128, S. 169—210. 1905. (Vgl. schon *The Messenger of Math.*, (2) Bd. 33, S. 78. 1903.)

— [2] The development of the theory of transfinite numbers. I—III. *Archiv d. Math. u. Phys.*, (3) Bd. 10, S. 254—281. 1905. Bd. 14, S. 289—311. 1909. Bd. 16, S. 21—43. 1910. Bd. 22, S. 1—21. 1914.

— [3] On isoid relations and theories of irrational numbers. *Proceed. of the fifth Intern. Congr. of Math., Cambridge 1912*, Bd. 2, S. 492—496. Cambridge (Engl.) 1913.

— [4] The philosophy of Mr. B. RUSSELL, with an appendix of leading passages from certain other works. London 1918. (Vgl. *The Monist*, Bd. 21, S. 481 bis 508, 1911, und Bd. 26, S. 24—62, 1916.)

— [5] A proof that every aggregate can be well-ordered. *Acta Mathematica*, Bd. 43, S. 239—261. 1922.

KAMKE, E. [1] Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Leipzig u. Berlin 1925.

— [2] Zur Definition der affinen Abbildung. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 36, S. 145—156. 1927.

KATZ, D. [1] Psychologie und mathematischer Unterricht. (*Abhandl. über d. mathemat. Unterricht in Deutschland*, Bd. III, Heft 8.) Leipzig u. Berlin 1913.

KEYSER, C. J. [1] Concerning autonomous doctrines and doctrinal functions. (Bericht über einen am 29. April 1916 gehaltenen Vortrag.) *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 22, S. 485. 1916.

— [2] The rôle of the concept of infinity in the work of LUCRETIUS. Ebenda, Bd. 24, S. 321—327. 1918.

— [3] Note concerning the number of possible interpretations of any system of postulates. Ebenda, S. 391—393.

— [4] Doctrinal functions. *The Journ. of Philos., Psychol. and Scient. Methods*, Bd. 15, S. 262—267. 1918.

— [5] Mathematical philosophy. New York 1922.

— [6] Concerning groups of dyadic relations of an arbitrary field. *Fundam. Mathematicae*, Bd. 7, S. 323—339. 1925. (Vgl. auch schon *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 23, S. 206, und Bd. 25, S. 436; 1917 bzw. 1919.)

KLEIN, F. [1] Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I. Ausgearb. von E. HELLINGER. 2. Aufl. Leipzig 1911. (In 3., v. FR. SEYFARTH bearb. Aufl. als Bd. 14 dieser Sammlung Berlin 1924 erschienen.)
— [2] Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I, für den Druck bearbeitet von R. COURANT und O. NEUGEBAUER. Berlin 1926.
KLEIN, FR. [1] Über das distributive Gesetz. Erscheint im *Jahresber. d. D. Math.-Ver.* 1928.
KNASTER, B. und C. KURATOWSKI [1] Sur les ensembles connexes. *Fundam. Math.*, Bd. 2, S. 206—255. 1921.
KNOPP, K. [1] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. (*Diese Sammlung*, Bd. 2.) 2. Aufl. Berlin 1924.
KÖNIG, D. [1] Sur les correspondances multivoques des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 8, S. 114—134. 1926.
— [2] Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta litt. ac. sc. univ. Hung. Franc.-Jos., sectio sc. math.*, Bd. 3, S. 121—130. 1927.
KÖNIG, J. [1] Zum Kontinuumproblem. *Math. Ann.*, Bd. 60, S. 177—180 und 462. 1905. (Vgl. auch schon *Verh. d. 3. internat. Math.-Kongr. in Heidelberg* 1904 [Leipzig 1905], S. 144—147.)
— [2] Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. *Math. Ann.*, Bd. 61, S. 156—160. 1905. (Vgl. auch A. C. DIXON und E. W. HOBSON in den *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 4, S. 18—20, 21—28, 317—319. 1906.)
— [3] Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. (2. Mitteilung.) Ebenda, Bd. 63, S. 217—221. 1907. ([2] und [3] auch französisch erschienen, *Acta Math.*, Bd. 30, S. 329—334, und Bd. 31, S. 89—93. 1906 und 1908.)
— [4] Sur la théorie des ensembles. *C. R. hebd. des séances de l'Académie des Sciences Paris*, Bd. 143, S. 110—112. 1906.
— [5] Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig 1914.
KORSELT, A. [1] Paradoxien der Mengenlehre. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 15, S. 215—219. 1906.
— [2] Über mathematische Erkenntnis. Ebenda, Bd. 20, S. 364—380. 1911.
— [3] Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes. *Math. Ann.*, Bd. 70, S. 294 bis 296. 1911.
— [4] Auflösung einiger Paradoxien. *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 25, S. 132—138. 1917
KORTMULDER, R. J. [1] De logische grondslagen der wiskunde. (Inauguraldissertation Leiden.) Amsterdam 1916.
KOWALEWSKI, G. [1] BOLZANOS Verfahren zur Herstellung einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion. *Berichte über d. Verhandl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse*, Bd. 74, S. 91—95. 1922.
KRULL, W. [1] Algebraische Theorie der Ringe. I. *Math. Ann.*, Bd. 88, S. 80 bis 122. 1923.
KURATOWSKI, C. [1] Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 2, S. 161—171. 1921.
— [2] Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques. Ebenda, Bd. 3, S. 76—108. 1922.
— [3] Théorie des continus irréductibles entre deux points. I. Ebenda, S. 200—231.
— [4] Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles. (Bericht über einen am 15. Febr. 1924 gehaltenen Vortrag.) *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, Bd. 3, S. 146f. 1925.
— [5] Une propriété des correspondances biunivoques. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 6, S. 240—243. 1925.
LANGER, SUSANNE K. [1] Confusion of symbols and confusion of logical types. *Mind*, Bd. 35, S. 222—229. 1926.

LANGER, SUSANNE K. [2] Form and content: a study in paradox. *The Journal of Philosophy*, Bd. 23, S. 435—438. 1926.
LANGFORD, C. H. [1] Analytic completeness of sets of postulates. *Proceed. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 25, S. 115—142. 1926.
— [2] Some theorems on deducibility. *Annals of Math.*, (2) Bd. 28, S. 16—40. 1927.
— [3] On inductive relations. *Bull. of the Am. Math. Soc.*, Bd. 33, S. 599—607. 1927.
— [4] An analysis of some general propositions. Ebenda, S. 666—672.
— [5] On propositions belonging to logic. *Mind*, Bd. 36, S. 342—346. 1927.
— [6] Singular propositions. Ebenda, Bd. 37, S. 73—81. 1928.
— [7] Some features of logical and mathematical propositions. (Bericht über einen am 29. Okt. 1927 gehaltenen Vortrag.) *Bull. of the Am. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 17. 1928.
LASKER, E. [1] Die Philosophie des Unvollendbar. Leipzig 1919.
LEBESGUE, H. [1] Intégrale, longueur, aire. Thèse. Paris 1902. (Auch in den *Annali di Matematica*, (3) Bd. 7 [1902] erschienen.)
— [2] Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1904.
— [3] Contribution a l'étude des correspondances de M. ZERMELO. *Bull. de la Soc. Math. de France*, Bd. 35, S. 202—212. 1907.
— [4] Sur certaines démonstrations d'existence. Ebenda, Bd. 45, S. 132—144. 1917.
Siehe auch BOREL [2], Note IV.
LENNES, N. J. [1] On the foundations of the theory of sets. (Bericht über einen im April 1922 gehalt. Vortrag.) *Bull. of the Am. Math. Soc.*, Bd. 28, S. 300. 1922.
LEVI, B. [1] Intorno alla teoria degli aggregati. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti*, (2) Bd. 35, S. 863—868. 1902.
— [2] Antinomie logiche? *Annali di Matem. p. ed appl.*, (3) Bd. 15, S. 187—216. 1908.
— [3] Sui procedimenti transfiniti. *Math. Ann.*, Bd. 90, S. 164—173. 1923. (Vgl. auch schon *Scritti matematici offerti ad* ENRICO D'OVIDIO. 1918.)
LEVI-CIVITA, T. [1] Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze* etc., (7) Bd. 4, S. 1765—1815. 1893.
LÉVY, P. [1] Sur le principe du tiers exclu. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 33, S. 253—258. 1926.
— [2] Critique de la logique empirique. Ebenda, S. 545—551.
LEWIS, C. I. [1] A survey of symbolic logic. Berkeley 1918.
— [2] La logique et la méthode mathématique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 29, S. 455—474. 1922.
LIETZMANN, W. [1] Trugschlüsse. (*Math.-phys. Biblioth.*, Bd. 53.) Leipzig u. Berlin 1923.
LINDENBAUM, A. und A. TARSKI [1] Communication sur les recherches de la théorie des ensembles. *C. R. des séances de la Soc. des Sciences et de Lettres de Varsovie*, Bd. 19, Classe III, S. 299—330. 1926.
LIPPS, H. [1] Die Paradoxien der Mengenlehre. *Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenolog. Forschung*, Bd. 6, S. 561—571. 1923.
— [2] Bemerkungen zu der Paradoxie des „Lügners". *Kantstudien*, Bd. 28, S. 335—339. 1923.
— [3] Entgegnung (auf FINSLER [4]). *Philos. Anzeiger*, Bd. 2, S. 193—201. 1927.
LITTLEWOOD, J. E. [1] The elements of the theory of real functions. Second edition. Cambridge (Engl.) 1926. (Ist eigentlich eine gedrängte und elegante Einführung in die Mengenlehre einschließlich der Elemente der Punktmengentheorie.)
LÖWENHEIM, L. [1] Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Math. Ann.*, Bd. 76, S. 447—470. 1915.

LOEWY, A. [1] Lehrbuch der Algebra. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Leipzig 1915.

LONDON, F. [1] Über die Bedingungen der Möglichkeit einer deduktiven Theorie. *Jahrb. f. Philos. u. phänomenolog. Forsch.*, Bd. 6, S. 335—384. 1923.

— [2] Über die Irreversibilität deduktiver Schlußweisen. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 33, S. 84—86. 1925.

DE LOOR, B. [1] Die hoofstelling van die algebra van intuïsionistiese standpunt. (Dissertation Amsterdam.) 1925.
Siehe auch unter BROUWER [15].

LÜROTH, J. [1] Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, Bd. 63, S. 222—238. 1907.

ŁUKASIEWICZ, J. [1] Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction. (Bericht über einen am 13. Juni 1924 gehaltenen Vortrag.) *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.*, Bd. 3, S. 149. 1925.

LUQUET, G. H. [1] Notions de logique formelle. Paris 1925.

LUSIN, N. [1] Sur les ensembles projectifs de M. HENRI LEBESGUE. *C. R. des séances de l'Acad. des Sc. Paris*, Bd. 180, S. 1572—1574. 1925. (Vgl. auch ebenda, S. 1318—1320 und 1817—1819, sowie Bd. 181, S. 95—96 und 279—281. 1925.)

— [2] Sur les ensembles analytiques. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 10, S. 1—95. 1927.

MAHLO, P. [1] Über lineare transfinite Mengen. *Ber. üb. d. Verhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Kl.*, Bd. 63, S. 187—225. 1911.

— [2] Zur Theorie und Anwendung der ϱ_0-Zahlen. Ebenda, Bd. 64, S. 108—112. 1912. Bd. 65, S. 268—282. 1913.

MAHNKE, D. [1] LEIBNIZens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik. *Jahrb. f. Philos. u. phänomenolog. Forsch.*, Bd. 7, S. 305—612. 1925.

— [2] LEIBNIZ als Begründer der symbolischen Mathematik. *Isis*, Bd. 9, S. 279 bis 293. 1927.

MALLY, E. [1] (Überleitungen von der Logik zur Logistik.) In HÖFLER [1] enthalten.

MANNOURY, G. [1] Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik. Haarlem 1909.

MENGER, K. [1] Bericht über die Dimensionstheorie. *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 35, S. 113—150. 1926. (Vgl. auch ebenda, Bd. 36, S. *8—12*. 1927.)

MÉRAY, CH. [1] Nouveau précis d'analyse infinitesimale. Paris 1872.

MERZBACH, J. [1] Bemerkungen zur Axiomatik der Mengenlehre. Marburger Inauguraldissertation 1925.

MIRIMANOFF, D. [1] Les antinomies de RUSSELL et de BURALI-FORTI et le problème fondamental de la théorie des ensembles. *L'Enseignement Mathématique*, Bd. 19, S. 37—52. 1917.

— [2] Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes. I. Ebenda, S. 209—217. II. Ebenda, Bd. 21, S. 29—52. 1920.

MITTAG-LEFFLER, G. [1] Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. *Acta Math.*, Bd. 4, S. 1—79. 1884. (Vgl. schon C. R. Paris, Bde. 94 u. 95. 1882.)

— [2] Zusätzliche Bemerkungen (zu SCHOENFLIES [12]). Ebenda, Bd. 50, S. 25f. 1928.

MOLLERUP, J. [1] Die Definition des Mengenbegriffs. *Math. Ann.*, Bd. 64, S. 231 bis 238. 1907.

— [2] Sur la théorie des ensembles et le concept du nombre. *Oversigt over d. Kgl. Danske Vidensk. Selskabs Forhandl.*, 1907, Nr. 3, S. 127—149.

MOORE, E. H. [1] Introduction to a form of general analysis. New Haven 1910.

MÜLLER, A. [1] Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie. Braunschweig 1922.
— [2] Über Zahlen als Zeichen. *Math. Ann.*, Bd. 90, S. 153—158. 1923. (Vgl. auch ebenda, S. 163.)
MÜNTZ, CH. [1] Ein nichtreduzierbares Axiomsystem der Geometrie. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 23, S. 54—80. 1914.
NATORP, P. [1] Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. (*Wissenschaft u. Hypothese*, Bd. 12.) 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1923.
NATUCCI, A. [1] Il concetto di numero et le sue estensioni. Torino 1923.
NELSON, L. [1] Bemerkungen über die nichteuklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. *Abhandl. d. FRIESschen Schule*, N. F., [Bd. 1] Heft 2/3, S. 373—430. 1905/06.
Siehe auch unter GRELLING.
VON NEUMANN, J. [1] Zur Einführung der transfiniten Zahlen. *Acta litterarum ac scientiarum r. universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio sc. mathem.*, Bd. 1, S. 199—208. Szeged 1923.
— [2] Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journ. f. Math.*, Bd. 154, S. 219—240. 1925.
— [3] Zur HILBERTschen Beweistheorie. *Math. Zeitschr.*, Bd. 26, S. 1—46. 1927.
— [4] Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Ebenda, Bd. 27, S. 669—752. 1928.
— [5] Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. *Math. Ann.*, Bd. 99, S. 134 bis 141. 1928.
— [6] Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Ebenda, S. 373—391. (Mit einem Zusatz von A. FRAENKEL, ebenda, S. 392f.)
NICOD, J. G. P. [1] A reduction in the number of the primitive propositions of logic. *Proc. of the Cambridge Philos. Soc.*, Bd. 19, S. 32—41. 1917/20.
— [2] Les tendances philosophiques de M. BERTRAND RUSSELL. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 29, S. 77—84. 1922.
— [3] Mathematical logic and the foundations of mathematics. *The Encyclopaedia Britannica*, 12th ed., Bd. 31, S. 874—876. 1922.
— [4] Les relations de valeurs et les relations de sens en logique formelle. Ebenda, Bd. 31, S. 577—583. 1924.
— [5] Le problème logique de l'induction. Paris 1924.
NOETHER, EMMY [1] Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transzendenten Zahlen. *Math. Ann.*, Bd. 77, S. 103—128. 1916.
— [2] Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung. Ebenda, S. 536 bis 545.
NOLTE, A. [1] Zur Kritik der Mengenlehre. (Als Manuskript gedruckt.) Göttingen 1927.
OSTROWSKI, A. [1] Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. *Journ. f. Math.*, Bd. 143, S. 255—284. 1913.
PADOA, A. [1] Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre. *C. R. du 2e Congrès Internat. des Mathématiciens, Paris 1900*, S. 249—256. 1902.
— [2] Essai d'une théorie algebrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque. *Bibl. du Congr. Internat. de Philos., Paris 1900*, Bd. 3, S. 309—365. 1903.
— [3] Le problème No. 2 de M. DAVID HILBERT. *L'Enseignement Math.*, Bd. 5, S. 85—91. 1903.
— [4] La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique. *Proceed. of the fifth Intern. Congr. of Math., Cambridge 1912*, Bd. 2, S. 471—479. Cambr. (Engl.) 1913.

PASCH, M. [1] Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882. (Eine gemeinsam mit M. DEHN bearbeitete Neuausgabe ist 1926 als Bd. 23 der vorliegenden Sammlung erschienen.)
— [2] Betrachtungen zur Begründung der Mathematik. *Math. Zeitschr.*, Bd. 20, S. 231—240, 1924 und Bd. 25, S. 166—171, 1926.
— [3] Die axiomatische Methode in der neueren Mathematik. *Ann. d. Philos. u. philos. Kritik*, Bd. 5, S. 241—274. 1926. (Auch in [4] abgedruckt.)
— [4] Mathematik am Ursprung. Gesammelte Abhandlungen über Grundfragen der Mathematik. Leipzig 1927.
PEANO, G. [1] Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Math. Ann.*, Bd. 36, S. 157—160. 1890.
— [2] Sui fondamenti della geometria. *Rivista di Matem.*, Bd. 4, S. 51—90. 1894.
— [3] Formulaire de Mathématiques. (Zusammen mit anderen Mitarbeitern.) Zuerst Torino 1895 erschienen; bis 1908 in vier weiteren vermehrten Ausgaben.
— [4] Les définitions mathématiques. *Bibl. du Congr. Internat. de Philos., Paris 1900*, Bd. 3, S. 279—288. 1903.
PERRON, O. [1] Was sind und sollen die irrationalen Zahlen? *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 16, S. 142—155. 1907.
— [2] Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik. Ebenda, Bd. 20, S. 196 bis 211. 1911.
— [3] Irrationalzahlen. (*Göschens Lehrbücherei* I 1.) Berlin u. Leipzig 1921.
PETZOLDT, J. [1] Beseitigung der mengentheoretischen Paradoxa durch logisch einwandfreie Definition des Mengenbegriffs. *Kantstudien*, Bd. 30, S. 346 bis 356. 1925.
PFÄNDER, A. [1] Logik. *Jahrb. f. Philos. u. phänomenolog. Forsch.*, Bd. 4, S. 139 bis 543. 1921.
PICHLER, H. [1] Die Unverträglichkeit des Indeterminismus mit „der“ Logik. *Die Geisteswissenschaften*, Bd. 1, S. 924—927. 1913/14.
PIERI, M. [1] Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti*, (2) Bd. 31, S. 780—798. 1898.
— [2] I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2) Bd. 48, S. 1—62. 1898.
— [3] Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Ebenda, (2) Bd. 49, S. 173—223. 1899.
PIERPONT, J. [1] Lectures on the theory of functions of real variables. I und II. Boston 1905 und 1912.
— [2] Mathematical rigor, past and present. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 23—53. 1928.
PLANCHEREL, M. [1] Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme. *Ann. d. Physik*, (4) Bd. 42, S. 1061—1063. 1913.
POINCARÉ, H. [1] Mémoire sur les groupes KLEINéens. *Acta Math.*, Bd. 3, S. 49 bis 92. 1883.
— [2] Wissenschaft und Hypothese. Deutsche Ausgabe von F. und L. LINDEMANN. (*Wissensch. u. Hypothese*, Bd. 1.) 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1914.
— [3] Réflexions sur les deux notes précédentes. *Acta Mathematica*, Bd. 32, S. 195—200. 1909.
— [4] Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig u. Berlin 1910. (Hier kommt der 5. Vortrag in Betracht.)
— [5] Wissenschaft und Methode. Deutsche Ausgabe von F. und L. LINDEMANN. (*Wissensch. u. Hypothese*, Bd. 17.) Leipzig u. Berlin 1914.
— [6] Dernières pensées. Paris (1913). In (nicht voll zureichender) deutscher Übertragung durch K. LICHTENECKER in Leipzig 1913 erschienen.

POST, E. L. [1] Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journ. of Math.*, Bd. 43, S. 163—185. 1921.
— [2] On a simple class of deductive systems. (Bericht über einen im April 1921 gehaltenen Vortrag.) *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 27, S. 396f. 1921.
PRINGSHEIM, A. [1] Vorlesungen über Zahlenlehre. 1. Abteilung. Leipzig u. Berlin 1916.
PRÜFER, H. [1] Theorie der Abelschen Gruppen. I. *Math. Zeitschr.*, Bd. 20, S. 165 bis 187. 1924.
RAMSEY, F. P. [1] The foundations of mathematics. *Proceedings of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 25, S. 338—384. 1927.
Siehe auch unter WITTGENSTEIN.
REICHENBACH, H. [1] Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. Berlin und Leipzig 1928.
RICHARD, J. [1] Les principes de mathématiques et le problème des ensembles. *Revue Générale des Sciences p. et appl.*, Bd. 16, S. 541. 1905. (Vgl. auch *Acta Mathematica*, Bd. 30, S. 295f. 1906.)
— [2] Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome de ZERMELO. *L'Enseignement Math.*, Bd. 9, S. 94—98. 1907.
— [3] Considérations sur la logique et les ensembles. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 27, S. 355—369. 1920.
RIEFFERT, J. B. [1] Logik, eine Kritik an der Geschichte ihrer Idee. *Lehrbuch d. Philos.*, herausgeg. v. M. DESSOIR, Bd. 2, S. 1—294. Berlin (1925).
ROSENTHAL, A. [1] Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme. *Ann. der Physik*, (4) Bd. 42, S. 796—806. 1913.
— [2] Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasiergodenhypothese. Ebenda, (4) Bd. 43, S. 894—904. 1914.
— u. E. BOREL [1] (Bearbeitung der französischen Referate von L. ZORETTI, P. MONTEL, M. FRÉCHET.) Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. S.-A. aus der Encyklopädie der math. Wissenschaften II 3 (II C 9), S. 851—1187.
ROUGIER, L. [1] La structure des théories déductives. Paris 1921.
RÜSTOW, A. [1] Der Lügner. (Erlanger Inauguraldissertation.) Leipzig 1910.
RUSSELL, B. [1] The principles of mathematics. I. Cambridge (Engl.) 1903. (Fortsetzung nicht erschienen; statt dessen WHITEHEAD-RUSSELL [1].)
— [2] On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 4, S. 29—53. 1907.
— [3] Mathematical logic as based on the theory of types. *Amer. Journ. of Math.*, Bd. 30, S. 222—262. 1908. Vgl. auch *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 18, S. 263—301. 1910.
— [4] L'Importance philosophique de la logistique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 19, S. 281—291. 1911. Vgl. auch *The Monist*, Bd. 23, S. 481 bis 493. 1913.
— [5] Einführung in die mathematische Philosophie. Deutsch von GUMBEL und GORDON. München 1923.
— [6] Logical atomism. In: *Contemporary British Philosophy* (ed. by J. H. MUIRHEAD), S. 357—383. London 1925.
— [7] Unser Wissen von der Außenwelt. Übersetzt von W. ROTHSTOCK. Leipzig 1926.
— [8] Die Probleme der Philosophie. Deutsch von P. HERTZ. Erlangen 1926.
Siehe auch unter WHITEHEAD.
RUSSELL, L. J. [1] An elementary symbolism for logic. *Mind*, Bd. 37, S. 40—61. 1928.
SAMUEL, O. [1] Über diskursive Sophismen. *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik*, Bd. 147, S. 185—222. 1912.

SCHEEFFER, L. [1] Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. *Acta Math.*, Bd. 5, S. 49—82. 1884. (Vgl. auch ebenda, Bd. 4, S. 387. 1884.)
— [2] Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. Ebenda, S. 183—194 und 279—296.
SCHLESINGER, L. und A. PLESSNER [1] Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Berlin u. Leipzig 1926.
SCHLICK, M. [1] Allgemeine Erkenntnislehre. 2. Aufl. Berlin 1925.
SCHÖNFINKEL, M. [1] Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Math. Ann.*, Bd. 92, S. 305—316. 1924.
SCHOENFLIES, A. [1] Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. I. Teil. (*Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 8, Heft 2.) Leipzig 1900. II. Teil (*2. Ergänzungsband zu den Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*). Leipzig 1908.
— [2] Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre. *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 15, S. 19—25. 1906.
— [3] Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung. Ebenda, Bd. 15, S. 26—41. 1906.
— [4] Die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie und Funktionentheorie. Ebenda, S. 557—576.
— [5] Über eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre. *Acta Mathematica*, Bd. 32, S. 177—184. 1909.
— [6] Über die Stellung der Definition in der Axiomatik. *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 20, S. 222—255. 1911. (Schon 1910 in den *Schriften der Phys. ökon. Gesellsch. zu Königsberg*, Bd. 51, erschienen.)
— [7] Zur Grundlegung der Mengenlehre. *Math. Ann.*, Bd. 72, S. 551—561. 1912
— [8] Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Gemeinsam mit H. HAHN herausgegeben. 1. Hälfte. Leipzig u. Berlin 1913. (An Stelle einer Fortsetzung ist HAHN [2] erschienen.)
— [9] Zur Axiomatik der Mengenlehre. *Math. Ann.*, Bd. 83, S. 173—200. 1921. (Auch schon in *Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Proceedings*, Bd. 22, 1920.)
— [10] Bemerkung zur Axiomatik der Größen und Mengen. Ebenda, Bd. 85, S. 60—64. 1922.
— [11] Zur Erinnerung an GEORG CANTOR. *Jahresb. d. Dtsch. Math.-Verein.*, Bd. 31, S. 97—106. 1922.
— [12] Die Krisis in CANTORS mathematischem Schaffen. *Acta Mathematica*, Bd. 50, S. 1—23. 1928.
SCHOLZ, H. [1] (Rezension des Buches FRAENKEL [10].) *Deutsche Literaturzeitung*, N. F., Bd. 4, Sp. 2416—2426. 1927.
— [2] (Rezension des Buches BECKER [2].) Ebenda, Bd. 5, Sp. 679—690. 1928.
SCHRÖDER, E. [1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 1. Bd. (mehr nicht erschienen). Leipzig 1873.
— [2] Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3 Bde. Leipzig 1890—1905.
SCHWEITZER, R. [1] Concerning independence. (Bericht über einen im April 1918 gehaltenen Vortrag.) *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 24, S. 428f. 1918.
SHAW, J. B. [1] Lectures on the philosophy of mathematics. Chicago and London 1918.
SHEFFER, H. M. [1] A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 14, S. 481—488. 1913.
— [2] Mutually prime postulates. (Bericht über einen an Neujahr 1916 gehaltenen Vortrag.) *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 22, S. 287. 1916.
— [3] Notational relativity. *Proc. of the 6th Intern. Congr. of Philosophy, Cambridge Mass. 1926*, S. 348—351. 1927.

SIERPIŃSKI, W. [1] L'axiome de M. ZERMELO et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Classe des sciences math. et nat., Série A, 1918,* S. 97—152. 1919.

— [2] Les exemples effectifs et l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae,* Bd. 2, S. 112—118. 1921.

— [3] Une remarque sur la notion de l'ordre. Ebenda, S. 199—200.

— [4] Sur la notion d'isomorphisme des ensembles. Ebenda, Bd. 3, S. 50—51. 1922.

— [5] Sur l'hypothèse du continu. Ebenda, Bd. 5, S. 177—187. 1924.

SIGWART, CHR. [1] Logik. 2 Bde. 5. Aufl. Tübingen 1924.

SKOLEM, TH. [1] Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls etc. *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania* 1919. I. Mat.-naturv. Klasse, Nr. 3, S. 1—37.

— [2] Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Ebenda 1920, Nr. 4, S. 1—36.

— [3] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors* 1922, S. 217—232. 1923.

— [4] Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. *Skrifter utg. av Vid.-Selsk. i Kristiania* 1923. I. Mat.-nat. Kl., Nr. 6, S. 1—38.

— [5] Ein Verfahren zu beliebig angenäherter Bestimmung einer Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung. *Norsk Matematisk Forenings Skrifter,* Serie 1, Nr. 15. 1924.

SMART, H. R. [1] The philosophical presuppositions of mathematical logic. (*Cornell Studies in Philosophy,* Nr. 17.) New-York 1925.

— [2] On mathematical logic. *The Journ. of Philosophy,* Bd. 23, S. 296—300. 1926.

SMITH, H. B. [1] Symbolic logic. Method and development. New York 1927.

SMITH, H. J. ST. [1] On the integration of discontinuous functions. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (1) Bd. 6, S. 140—153. 1875.

SOUSLIN, M. [1] Sur un corps dénombrable de nombres réels. (Rédigé d'après un mémoire posthume de M. SOUSLIN par C. KURATOWSKI.) *Fundamenta Mathematicae,* Bd. 4, S. 311—315. 1923.

SPAIER, A. [1] La pensée et la quantité. Paris 1927.

STAMMLER, G. [1] Der Zahlbegriff seit GAUSS. Halle a. S. 1925.

— [2] Begriff, Urteil, Schluß. Untersuchungen über Grundlagen und Aufbau der Logik. Halle a. S. 1928. (Bei Abschluß des Druckes erschienen.)

STECKEL, S. [1] Remarque sur une classe d'ensembles ordonnés. *Fundam. Math.,* Bd. 11, S. 285f., 1928.

STEINITZ, E. [1] Algebraische Theorie der Körper. *Journ. f. Math.,* Bd. 137, S. 167 bis 309. 1909.

STROHAL, R. [1] Untersuchungen zur psychologischen Vorgeschichte der Definitionen, Axiome und Postulate. (*Wissensch. u. Hypoth.,* Bd. 27.) Leipzig und Berlin 1925. (Vgl. dazu BERNAYS [7].)

STUDY, E. [1] Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. (*Die Wissenschaft,* Bd. 54.) Braunschweig 1914 (2. Aufl., 1. Teil, 1923).

— [2] Mathematik und Physik. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung. (*Sammlung Vieweg,* Heft 65.) Braunschweig 1923.

SUDAN, G. [1] Sur le nombre transfini ω^{ω}. *Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sciences,* Bd. 30, 1 (S. 1—20). 1927.

[TAJTELBAUM-]TARSKI, A. [1] Sur le terme primitif de la logistique. *Fundamenta Mathematicae,* Bd. 4, S. 196—200. 1923.

— [2] Sur les *truth-functions* au sens de MM. RUSSELL et WHITEHEAD. Ebenda. Bd. 5, S. 59—74. 1924.

TARSKI, A. [3] Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix. Ebenda, S. 147—154.
— [4] Sur les ensembles finis. Ebenda, Bd. 6, S. 45—95. 1925.
— [5] Sur les principes de l'arithmétique des nombres ordinaux (transfinis). (Bericht über einen am 9. Mai 1924 gehaltenen Vortrag.) *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.*, Bd. 3, S. 150. 1925.
— [6] Quelques théorèmes sur les alephs. *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 7, S. 1—14. 1925.
Siehe auch unter LINDENBAUM.
TAMBS LYCHE, R. [1] Sur l'équation fonctionelle d'ABEL. (Mit einer Bemerkung von C. KURATOWSKI.) *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 5, S. 331—333. 1924. (Vgl. auch *Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, Bd. 51, S. 262. 1927.)
TAYLOR, J. S. [1] Complete existential theory of BERNSTEIN's set of four postulates for Boolean algebras. *Annals of Math.*, (2) Bd. 19, S. 64—69. 1917.
— [2] A set of five postulates for Boolean algebras in terms of the operation „exception". *Univers. of California Publications in Mathematics*, Bd. 1, S. 241 bis 248. 1920.
— [3] SHEFFER's set of five postulates for Boolean algebras in terms of the operation „rejection" made completely independent. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 26, S. 449—454. 1920.
TERNUS, J., S. J. [1] Zur Philosophie der Mathematik. *Philos. Jahrb. d. Görresgesellsch.*, Bd. 39, S. 217—231. 1926.
TOEPLITZ, O. [1] Der Algebraiker HILBERT. *Die Naturwissenschaften*, Bd. 10, S. 73—77. 1922.
TONELLI, L. [1] Fondamenti di calcolo delle variazioni. I und II. Bologna (1922/3).
TSCHETWERUCHIN, N. [1] Über die Bedeutung des Axioms von PASCH für die linearen Anordnungsaxiome. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 33, S. 65—74. 1925.
URBACH, B. [1] Über das Wesen der logischen Paradoxa. *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik*, Bd. 140, S. 81—108. 1910.
— [2] Das logische Paradoxon. *Ann. d. Philos. u. philos. Kritik*, Bd. 6, S. 161 bis 176 und 265—273. 1927.
URYSOHN, P. Siehe unter ALEXANDROFF.
VAHLEN, K. TH. [1] Über nicht-archimedische Algebra. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 16, S. 409—421. 1907.
DE LA VALLÉE POUSSIN, C. [1] Sur l'intégrale de LEBESGUE. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 16, S. 435—501. 1915.
— [2] Intégrales de LEBESGUE, fonctions d'ensembles, classes de BAIRE. Paris 1916.
VASILIEV, N. A. [1] Imaginary (non-aristotelian) logic. *Atti del V Congresso Intern. di Filosofia, Napoli 1924*, S. 107—109. 1925.
VEBLEN, O. [1] A system of axioms for geometry. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 5, S. 343—384. 1904.
VERONESE, G. [1] Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen usw. (Das Original erschien 1891.) Übers. von A. SCHEPP. Leipzig 1894.
VERRIEST, G. [1] L'infini mathématique. Paris 1926.
VIELER, H. [1] Untersuchungen über Unabhängigkeit und Tragweite der Axiome der Mengenlehre in der Axiomatik ZERMELOS und FRAENKELS. Marburger Inauguraldissertation 1926.
VIVANTI, G. [1] Paradossi dell' infinito. *Periodico di Matematiche*, (4) Bd. 1, S. 190 bis 209. 1921.
VOROVKA, CH. [1] Ce qu'il y a de juste dans la critique de la logistique de H. POINCARÉ. *Atti del V Congresso Intern. di Filosofia, Napoli 1924*, S. 583—590. 1925.
VOSS, A. [1] Über die mathematische Erkenntnis. (*Die Kultur der Gegenwart*, III. Teil, 1. Abteil., 3. Lieferung.) Leipzig u. Berlin 1914.

WÄSCHE, H. [1] Grundzüge zu einer Logik der Arithmetik. (*Biblioth. f. Philos.*, Bd. 29.) Berlin 1926.

WAISMANN, FR. [1] Die Natur des Reduzibilitätsaxioms. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Bd. 35, S. 143—146. 1928.

WANGERIN, A. [1] Georg Cantor. *Leopoldina* (der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher), Bd. 54, S. 10—13 und 32. 1918.

WARRAIN, F. [1] Les mathématiques et la réalité. *Revue de Philos.*, Bd. 32, S. 457 bis 472. 1925.

WAVRE, R. [1] Y a-t-il une crise des mathématiques? A propos de la notion d'existence et d'une application suspecte du principe du tiers exclu. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 31, S. 435—470. 1924.

— [2] Logique formelle et logique empiriste. Ebenda, Bd. 33, S. 65—75. 1926.

— [3] Sur le principe du tiers exclu. Ebenda, S. 425—430.

WEBER-EPSTEIN [1]: WEBER, H. Arithmetik, Algebra, Analysis. (WEBER-WELLSTEIN: Enzyklopädie der Elementarmathematik, 1. Bd.) 4. Aufl., neubearb. von P. EPSTEIN. Leipzig u. Berlin 1922.

WEINLÖS, S. [1] Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité etc. *Fund. Math.*, Bd. 11, S. 206—221. 1928.

WEYL, H. [1] Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe. (Habilitationsvortrag.) *Math.-naturwiss. Blätter*, Bd. 7, S. 93—95 und 109—113. 1910.

— [2] Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918.

— [3] Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis. *Jahresb. d. D. Mathem.-Ver.*, Bd. 28, S. 85—92. 1919.

— [4] Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Math. Zeitschr.*, Bd. 10, S. 39—79. 1921.

— [5] Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Ebenda, Bd. 20, S. 131—150. 1924.

— [6] Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. *Symposion*, Bd. 1, S. 1—32. 1925. (Auch als Heft 3 der „Sonderdrucke des Symposion" erschienen.)

— [7] Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Teil I. (4. Lieferung [Abt. II A] des Handbuchs der Philosophie, herausgegeben von A. BAEUMLER und M. SCHRÖTER.) München u. Berlin 1926.
Siehe auch unter HILBERT [10].

WHITEHEAD, A. N. [1] Science and the modern world. Cambridge (Engl.) 1926.

WHITEHEAD, A. N., and B. RUSSELL [1] Principia Mathematica. Cambridge (England). Vol. I (1910, Neuaufl. 1925), II (1912, unveränderte Neuaufl. 1927), III (1913 bezw. 1927).

WIENER, N. [1] A new theory of measurement. A study in the logic of mathematics. *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 19, S. 181—205. 1920.

WILSON, E. B. [1] Logic and the continuum. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 14, S. 432—443. 1908.

WITTGENSTEIN, L. [1] Tractatus Logico-Philosophicus. With an introduction by B. RUSSELL. London 1922. (Auch in den *Ann. der Natur- u. Kulturphilosophie*, Bd. 14, 1921.) Siehe auch die eingehende Besprechung durch F. P. RAMSEY in *Mind*, Bd. 32, S. 465—478. 1923.

WRINCH, D. [1] On mediate cardinals. *Amer. Journ. of Math.*, Bd. 45, S. 87—92. 1923.

YOUNG, J. W. [1] Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry. New York 1911.

YOUNG, W. H. and GR. CH. [1] The theory of sets of points. Cambridge (Engl.) 1906. Mit besonders vollständigen Literaturangaben. (Neuaufl. in Vorbereitung.)

— W. H. [2] The progress of mathematical analysis in the twentieth century. *Proc. of the London Math. Soc.*, (2) Bd. 24, S. 421—434. 1926.

YULE, D. [1] Zur Grundlegung des Klassenkalküls. *Math. Ann.*, Bd. 95, S. 446 bis 452. 1926.

ZAREMBA, ST. [1] Théorie de la démonstration dans les sciences mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, Bd. 18, S. 4—44. 1916.

— [2] La logique des mathématiques. (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. XV.) Paris 1926.

ZERMELO, E. [1] Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Ann.*, Bd. 59, S. 514—516. 1904.

— [2] Neuer Beweis für die Wohlordnung. Ebenda, Bd. 65, S. 107—128. 1908.

— [3] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. Ebenda, S. 261 bis 281. (Fortsetzung nicht erschienen; vgl. FRAENKEL [9].)

— [4] Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. *Acta Mathematica*, Bd. 32, S. 185—193. 1909. (Vgl. auch *Atti del IV Congresso Intern. dei Matematici, Roma 1908*, Bd. 2, S. 8—11. 1909.)

— [5] Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proc. of the fifth Intern. Congr. of Math., Cambridge 1912*, Bd. 2, S. 501—504. Cambridge (Engl.) 1913.

— [6] Über ganze transzendente Zahlen. *Math. Ann.*, Bd. 75, S. 434—442. 1914.

ZIEHEN, TH. [1] Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre. *Philos. Vorträge*, Nr. 16. Berlin 1917.

— [2] Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik. Bonn 1920.

Nach Abschluß des Druckes mir noch zugänglich gewordene Schriften.

BERNAYS, P. [7] Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung. *Die Naturwissenschaften*, Bd. 16, S. 197—203. 1928.

BERNAYS, P. und M. SCHÖNFINKEL [1] Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. *Math. Ann.*, Bd. 99, S. 342—372. 1928.

BORNSTEIN, B. [1] La logique geométrique et sa portée philosophique. *Bibliotheca Univ. lib. Polonae*, fasc. 20. Varsaviae 1928. [Zu § 15.]

BROUWER, L. E. J. [20] Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. *Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Kl.*, 1928, S. 48—52.

CASSIRER, E. [3] Zur Theorie des Begriffs. *Kantstudien*, Bd. 33, S. 129—136. 1928. (Zu HEYMANS [2].)

CHADWICK, J. A. [3] Note on families included in the field of a relation. *Mind*, Bd. 37, S. 260f. (vgl. auch S. 392). 1928. [Zu S. 268ff.]

DRESDEN, A. [3] Some philosophical aspects of mathematics. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 438—452. 1928. [Zu den §§ 14 und 18.]

DUBISLAV, W. [4] Zur kalkülmäßigen Charakterisierung der Definitionen. *Ann. d. Philos. u. phil. Kritik*, Bd. 7, S. 136—145. 1928.

FRINK, O. [2] On the existence of linear algebras in Boolean algebras. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 34, S. 329—333. 1928. [Zu S. 264.]

HASSE, H. und H. SCHOLZ [1] Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. *Kantstudien*, Bd. 33, S. 4—34. 1928. (Mit einem Anhang von H. SCHOLZ, ebenda, S. 35—72.)

HEISS, R. [1] Der Mechanismus der Paradoxien und das Gesetz der Paradoxienbildung. *Philos. Anzeiger*, Bd. 2, S. 403—433. 1928.

HEYMANS, G. [2] Zur CASSIRERschen Reform der Begriffslehre. *Kantstudien*, Bd. 33, S. 109—128. 1928. [Zu S. 59.]

HURWITZ, W. A. [1] On BELL's arithmetic of Boolean algebra. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, Bd. 30, S. 420—424. 1928.

KALMÁR, L. [1] Zur Theorie der abstrakten Spiele. *Acta litt. ac. sc. univ. Hung. Franc.-Jos., sectio sc. math.*, Bd. 4, S. 65—85. 1928.

KNASTER, B. [1] Un théorème sur les fonctions d'ensembles. (Ber. über einen am 9. 12. 1927 gehalt. Vortrag.) *Ann. de la Soc. Pol. de Math.*, Bd. 6, S. 133f. 1928.

LINDENBAUM, A. [1] Sur l'arithmétique des types ordinaux. (Ber. üb. einen am 23. 4. 1926 gehalt. Vortrag.) Ebenda, Bd. 5, S. 103f. 1927. [Zu § 9.]

MENGER, K. [2] Bemerkungen zu Grundlagenfragen. *Jahresb. d. D. Math.-Ver.*, Bd. 37, S. 213—226. 1928. [Zu S. 224, Fußn. 2.]

— [3] Dimensionstheorie. Leipzig und Berlin 1928. [Zu S. 102.]

VON NEUMANN, J. [7] Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre. Erscheint im *Journ. f. Math.* 1929.

PATAI, L. [1] Über die Reihe der unendlichen Kardinalzahlen. *Math. Zeitschr.*, Bd. 28, S. 321—329. 1928. [Vgl. J. KÖNIG [1].]

REYMOND, M. A. [1] L'axiomatique logique et le principe du tiers exclu. (Mit Diskussion von L. BRUNSCHVICQ, R. LENOIR, P. LÉVY.) *Bull. de la Soc. Française de Philosophie*, Bd. 27, Nr. 1. 1928. [Zu den §§ 14 und 18.]

SIERPIŃSKI, W. [6] Leçons sur les nombres transfinis. Paris 1928. [Ein Lehrbuch der abstrakten Mengenlehre.]

TARSKI, A. [7] Remarque concernant l'arithmétique des nombres cardinaux. (Ber. üb. einen am 23. 10. 1925 gehalt. Vortrag.) *Ann. de la Soc. Pol. de Math.*, Bd. 5, S. 101. 1927.

— [8] Sur quelques propriétés caractéristiques des images d'ensembles. — Quelques théorèmes généraux sur les images d'ensembles. (Ber. üb. zwei am 18. 2. und 9. 12. 1927 gehalt. Vorträge.) Ebenda, Bd. 6, S. 127f. und 132f. 1928.

TARSKI, A. und A. LINDENBAUM [2] Sur l'indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques. (Ber. üb. einen am 17. 12. 1926 gehalt. Vortrag.) Ebenda, Bd. 5, S. 111—113. 1927.

VAN DER WAERDEN, B. L. [1] De strijd om de abstraktie. (Antrittsrede Groningen.) Groningen 1928. [Zu S. 334ff.]

WEISS, P. [1] The theory of types. *Mind*, Bd. 37, S. 338—348. 1928. [Zu S. 267.]

WHITTAKER, J. M. [1] A note on the correlation of classes. *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.*, (2) Bd. 1, S. 47f. 1927. [Zu S. 76, Fußnote, und zur Aufg. 6 von S. 142.]

Namenverzeichnis.

(Die Stelle des Vorkommens im Literaturverzeichnis ist in der Regel nicht angegeben.)

Sachverzeichnis.

In der Regel ist nur die Stelle aufgeführt, wo der betreffende Begriff zum erstenmal (vielfach gesperrt) vorkommt und erklärt wird.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.